CORNEL MARIN

VIBRAȚIILE STRUCTURILOR MECANICE

MECHANICAL STRUCTURES VIBRATIONS

Replay of the mechanic system from the various external excitation determined or aleatory depends both on its intrinsic characteristics (inertia, elasticity and hysteresis) and on the characteristics of links with fix medium and/or with the vibrations source.

By using of some dynamic models of study the suitable schematic depictions enable a certain mathematical approach and solution of equations which characterize the phenomenon of vibrations having possibility to plot the variation diagrams of different characteristic functions of vibrations (the amplification factor of the forced vibrations, the transmission factor, the dynamic factor, the active and reactive power, etc), these results could be verified on the tests benches and on the basis of checks the mathematical model might be validated. Only major difficulty to solve of an application remains the introduction the work assumptions, which might allow the obtaining a mathematical model having a behaviour as close as possible of the real model.

This work is engaged in the study of discrete linear elastic and continuous systems, of free and forced vibrations of these systems without and with damping using different assumptions on dumping.

Conf. dr. ing. CORNEL MARIN

VIBRAȚIILE STRUCTURILOR MECANICE

EDITURA IMPULS
București 2003

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
MARIN, CORNEL
Vibrațiile structurilor mecanice /
Cornel Marin - Bucueşti : Editura IMPULS, 2003
390 p; 25cm - (Universitaria)
Bibliografie
ISBN 973-8132-43-6

Recenzia ştiințifică:
Prof. dr. ing. Polidor BRATU
Prof. dr. ing. Nicolae ENESCU

CUVÂNT ÎNAINTE

Studiul dinamic al proceselor cu parametri variabili, în regim determinist sau aleator, se constituie ca o necesitate permanentă în abordarea, elucidarea, măsurarea şi aprecierea cât mai justă a consecinţelor asupra mediului tehnologic, a mediului construit şi a mediului natural. Din această cauză analiza şi sinteza structurilor mecanice acţionate din exterior de forţe perturbatoare reprezintă un capitol fundamental în teoria sistemelor dinamice cu impact direct în activitatea de proiectare, evaluare, expertizare şi mentenanţă, atât pentru menţinerea performanţelor funcţionale şi tehnologice, cât şi pentru protecţia omului şi a mediului.

Problematica complexă a vibraţiilor structurilor mecanice a fost analizată în modalităţi variate de diverşi cercetători din ţară şi străinătate, fără a fi epuizată sub aspect ştiinţific şi tehnic. De aceea, consider că demersul lăudabil al domnului conf. univ. dr. ing. Cornel Marin se înscrie ca o contribuţie pertinentă şi esenţială în sistematizarea şi modelarea vibraţiilor structurilor mecanice.

În acest context, menţionez că autorul a abordat analiza vibraţiilor liniare deterministe şi aleatoare folosind modele fizice de interes practic astfel încât la finalul fiecărui capitol să poată realiza sinteza rezultatelor sub forma răspunsului sistemului la variate acţiuni exterioare.

Această modalitate de prezentare, a unei analize dinamice bogate în reprezentări grafice trasate cu programe automate de calcul, constituie punctul forte al conceptului de abordare simultană a modelului fizic cu modelul numeric. Din această perspectivă, menţionez că în primul capitol sunt elaborate modelele fizice şi au fost obţinute răspunsurile dinamice cu parametrii de interes folosind reprezentări compuse ale modelului reologic Voigt-Kelvin şi Hooke Maxwell.

Vibraţiile cu două şi mai multe grade de libertate sunt abordate într-o manieră ştiinţifică uşor de transpus în programe informatice specializate astfel încât răspunsul structurii mecanice să aibă o reprezentare convenabilă pentru utilizatorul final.

Vibrațiile aleatoare sunt analizate într-un capitol dedicat proceselor dinamice tehnologice şi naturate cu reprezentare statistică şi probabilistică a parametrilor specifici.

În ultimul capitol autorul a reuşit, în mod cu totul deosebit, să abordeze problema complicată a sintezei teorie-practică din domeniul maşinilor cu acțiune vibrantă. Astfel, pot afirma că rezultatele obținute sunt foarte importante pentru inginerii din proiectare, cercetare şi managementul producției.

În final menționez faptul că pe lângă caracterul ştiințific şi original al cărții, autorul a realizat o lucrare redactată clar şi cursiv, fiind accesibilă cititorilor care posedă cunoştințe de analiză matematică, mecanică şi rezistența materialelor. De remarcat, în mod deosebit, atât modul riguros şi sintetic de prezentare a fiecărei demonstrații, cât şi interpretarea fenomenologică şi inginerească pe baza unui algoritm coerent.

Față de cele de mai sus, consider că prezenta lucrare se constituie ca o contribuție valoroasă în domeniul dinamicii sistemelor mecanice cu impact deosebit asupra dezvoltării ştiințelor inginereşti.

Bucureşti,
1 Decembrie 2003

Prof. Univ. Dr. ing. Dr. h.c. Polidor Bratu

Membru al Academiei de Ştiințe Tehnice din România
Preşedinte al Societății Române de Acustică

PREFAȚA

Dinamica structurilor mecanice elastice este la ora actuală una dintre disciplinele de bază din programa de pregătire a inginerului mecanic care proiectează, realizează sau exploatează maşini unelte, autovehicule, echipamente, utilaje pentru construcții, roboți industriali sau alte tipuri de sisteme mecanice clasice sau mecatronice (micromaşini, microacționări, microroboți, etc).

Prezența vibrațiilor în toate structurile mecanice este un fapt binecunoscut cu implicații foarte serioase în funcționarea lor atunci când se pune problema preciziei, duratei de funcționare şi stabilității impuse prin tema de proiectare. Acesta este motivul pentru care răspunsul dinamic şi impactul acestuia asupra performanțelor structurii mecanice trebuie să reprezinte un punct important al memoriului tehnic de prezentare al oricărui produs.

Efectul vibrațiilor asupra structurii interne a materialelor este în general un fenomen legat de îmbătrânirea şi rezistența la oboseală care se manifestă în final prin scăderea capacității de rezistență în timp chiar pentru excitații având frecvențe mai îndepărtate de rezonanță. Răspunsul sistemului mecanic la diverse excitații exterioare deterministe sau aleatoare este funcție atât de caracteristicile intrinseci ale lui (inerție, elasticitate şi histerezis) cât şi de caracteristicile legăturilor cu mediul fix şi/sau cu sursa de vibrații.

Folosirea unor modele dinamice de studiu şi a schematizărilor corespunzătoare permite o abordare şi rezolvare matematică precisă a ecuațiilor care caracterizează fenomenul vibrațiilor şi posibilitatea trasării diagramelor de variație a diferitelor mărimi caracteristice ale vibrațiilor (factorul de amplificare al vibrațiilor forțate, factorul de transmitere, factorul dinamic, puterea activă şi reactivă, etc.), aceste rezultate cantitative şi calitative putând fi verificate pe standurile de încercări, iar pe baza acestor verificări, modelul matematic poate fi validat. Singura dificultate majoră în rezolvarea unei aplicații rămâne însă introducerea corectă a ipotezelor de lucru, ipoteze care să permită obținerea unui model matematic cu o comportare cât mai apropiată de cea a modelului real.

Prezenta lucrare este dedicată studiului dinamic al sistemelor elastice liniare discrete şi continue, a vibrațiilor libere şi forțate ale acestor sisteme cu şi fără amortizare, folosind diferite ipoteze asupra amortizării.

Astfel, în primul capitol sunt prezentate vibrațiile sistemelor elastice liniare cu un grad de libertate libere şi forțate, cu şi fără amortizare, rezolvarea reală şi în complex a ecuațiilor matematice ale vibrațiilor, impedanța mecanică şi transmisibilitatea vibrațiilor, expresiile energetice ale vibrațiilor liniare.

În al doilea capitol sunt prezentate vibrațiile sistemelor elastice liniare cu două grade de libertate libere şi forțate, cu şi fără amortizare, rezolvarea în complex a ecuațiilor matematice, exprimarea matriceală a ecuațiilor, demonstrarea ortogonalității modurilor proprii de vibrație şi prezentarea coordonatelor principale. Problemele rezolvate prezintă rezultatele pulsațiilor proprii şi imaginile grafice ale modurilor proprii de vibrație, imagini deosebit de utile în interpretarea şi înțelegerea acestor fenomene.

În cel de al treilea capitol sunt abordate vibrațiile sistemelor discrete cu N grade de libertate din punctul de vedere al analizei modale. Vectorii proprii ai matricei modale permit generalizarea rezultatelor obținute în capitolul anterior şi extinderea lor în studiul vibrațiilor sistemelor liniare nu N grade de libertate. Tot în acest capitol sunt prezentate metode exacte şi aproximative folosite pentru determinarea pulsațiilor şi modurilor proprii de vibrație.

În capitolul al patrulea sunt prezentate bazele matematice ale determinării ecuațiilor vibrațiilor sistemelor continue cele mai simple (de tip fir omogen şi bară dreaptă). Sunt tratate vibrațiile longitudinale şi transversale ale firelor, vibrațiile longitudinale, de răsucire şi transversale ale barelor de secțiune constantă omogene şi cu mase concentrate la capete. Sunt prezentate rezultate numerice ale ecuațiilor transcendente obținute folosind metode grafice şi numerice de rezolvare.

În capitolul al cincilea sunt prezentate pe scurt bazele matematice ale vibrațiile aleatoare, tipurile de vibrații statistice şi probabilistice, răspunsul sistemelor liniare la excitații aleatoare de tip şoc dreptunghiular, triunghiular, semisinusoidal, răspunsul sistemelor liniare la acțiuni seismice, răspunsul seismic Fourier şi spectral al unui sistem mecanic cu un grad de libertate.

Ultimul capitol (al şaselea) este dedicat unor aplicații clasice din dinamica maşinilor vibratoare monomasice cu acționare cinematică cu diferite tipuri de lşegături (suporți de sprijin) şi diferite tipuri de cuplaje între motorul de acționare şi organul de lucru (masa vibratoare). Sunt prezentate modelele matematice utilizate în fiecare caz, soluțiile analitice ale ecuațiilor diferențiale ale mişcării, reprezentarea grafică a acestor soluții şi concluziile ce rezultă din analiza calitativă a acestor diagrame de variație.

Sper ca această lucrare să fie utilă atât studenților de la specializările tehnice cât şi inginerilor care lucrează în domeniul proiectării şi exploatării structurilor mecanice supuse vibrațiilor deterministe sau aleatoare.

În final doresc să mulțumesc în mod deosebit d-lui prof. Dr. ing. Polidor BRATU , membru corespondent al Academiei de Ştiințe Tehnice a României şi d-lui prof. Dr. ing. Nicolae ENESCU, pentru răbdarea cu care au parcurs manuscrisul şi pentru observațiile d-lor deosebit de utile care au permis apariția lucrării sub această formă.

Conf. dr. ing. **Cornel MARIN**
UNIVERSITATEA VALAHIA TARGOVIŞTE
Târgovişte, 10 noiembrie 2003

CUPRINS

CAPITOLUL III - VIBRAȚIILE SISTEMELOR CU *N* GRADE DE LIBERTATE

CAPITOLUL IV - VIBRAȚIILE SISTEMELOR CONTINUE

CAPITOLUL V - VIBRAȚII ALEATOARE

INTRODUCERE

Definiții

În cele mai multe din aplicațiile inginereşti vibrațiile au un efect negativ asupra funcționării sistemelor mecanice, de aceea proiectanții trebuie să identifice sursele de vibrații şi folosind diferite metode să minimizeze sau elimine efectul acestora asupra sistemelor mecanice sau omului care le exploatează. Există însă şi aplicații în care vibrațiile au un efect pozitiv, acestea stând la baza funcționării sistemelor mecanice respective, cum ar fi în cazul sitelor vibratoare, aparatelor percutante de perforat betoane, benzilor transportoare inerțiale, instalațiilor de foraj, etc.

Un *sistem dinamic* este un sistem format dintr-o mulțime de elemente mecanice a căror stare poate fi precizată în timp cu ajutorul unor funcții reale de timp numite coordonate generalizate sub acțiunea unor factori externi.

Un *sistem dinamic oscilant* este acel sistem dinamic în care cel puțin una din coordonatele generalizate variază în jurul unei *valori de referință.*

Vibrația este oscilația sistemului dinamic ce implică prezența unor forțe elastice, unde parametrii cinematici care determină mişcarea la un moment dat (deplasare, viteză, accelerație) variază față de o anumită valoare de referință.

Vibrația periodică este mişcarea descrisă de o funcție periodică în care parametrii se repetă identic după un interval minim de timp numit *perioadă.* În acest caz parametrii cinematici (deplasarea $\Delta\bar{r}$, viteza $\bar{v}$ şi accelerația $\bar{a}$) corespunzători unuia sau mai multor puncte ale sistemului pentru două momente de timp aflate la o distanță de o perioadă *T* (sau mai multe perioade), trebuie să fie identici. O vibrație periodică poate fi exprimată cu ajutorul relației matematice:

$$x(t) = x(t+T) \tag{1}$$

Vibrația armonică este o vibrație periodică exprimată printr-o sinusoidă de forma:

$$x = A\sin\omega t \quad sau: \quad x = A\sin(\omega t + \varphi_0) \tag{2}$$

Aceste funcții au diagramele de variație prezentate în figurile 1. a şi b

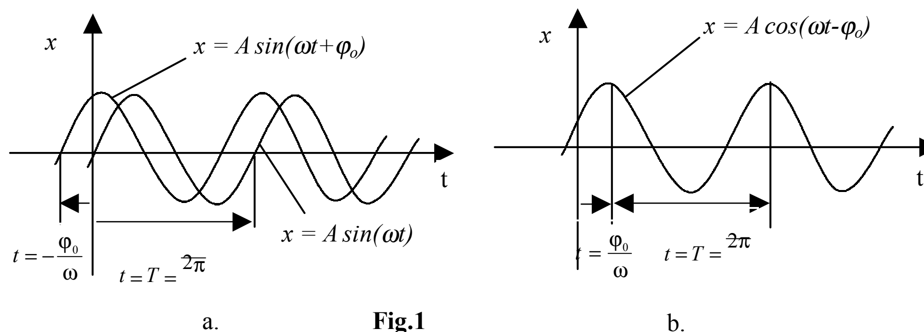


Fig.1

Vibrația armonică poate fi mişcarea unui punct material acționat de o forță elastică dezvoltată de un arc având o caracteristică elastică liniară. Punctul material scos din poziția de echilibru cu cantitatea *b* va avea o mişcare liniar-alternativă în jurul poziției sale de echilibru M_0 (fig. 2) şi se mai numeşte şi *oscilator armonic liniar.*

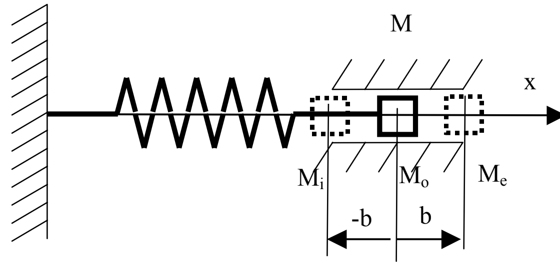


Fig. 2

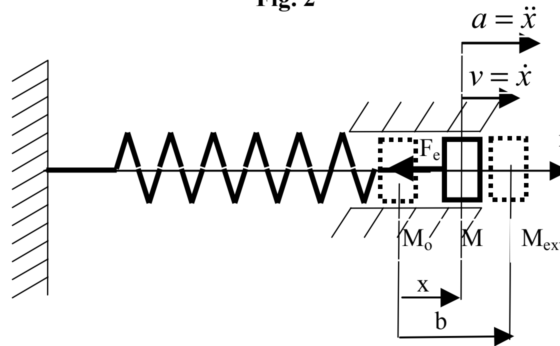


Fig. 3

Cu ajutorul oscilatorului liniar se definesc **mărimile caracteristice ale unei vibrații armonice** (fig. 3) şi anume:

- *elongația* x este distanța la un moment dat dintre centrul vibrațiilor şi poziția deplasată a punctului;
- *amplitudinea* A - elongația maximă sau deplasarea maximă atinsă de punct în mişcarea armonică;
- *perioada mişcării armonice* - timpul cel mai scurt după care legea deplasării se repetă identic. Punând condiția:

$$sin(\omega t + \varphi_0) = sin[\omega(t+T) + \varphi_0] \tag{3}$$

sau

$$(\omega t + \varphi_0 + \omega T) = (\omega t + \varphi_0) + 2\pi \tag{4}$$

rezultă perioada: $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, care se măsoară în secunde (5)

- *frecvența* este inversul perioadei şi reprezintă numărul de vibrații complete efectuate în unitatea de timp (o secundă):

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{şi se măsoară în hertzi: } 1Hz = 1s^{-1} \tag{6}$$

- *pulsația* mişcării sau *frecvența circulară* ω reprezintă numărul de vibrații sinusoidale efectuate într-un interval de 2π *secunde*: $\omega = 2\pi f$ sau viteza unghiulară a vectorului rotativ în reprezentarea fazorială a funcției armonice a mişcării (fig. 4): $x = A\,sin(\omega t + \varphi_0)$ (7)

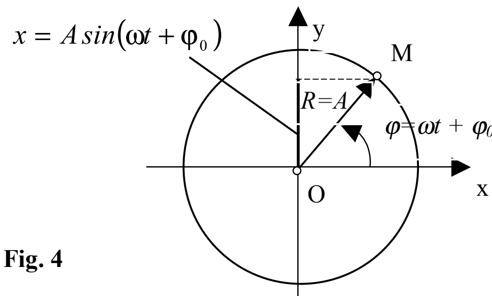


Fig. 4

Legătura dintre pulsație şi frecvență este: $\omega = 2\pi f$. (8)

Pulsația se măsoară în *rad /s.*

- *faza* $\varphi = \omega t + \varphi_0$ este argumentul funcției trigonometrice care caracterizează vibrația armonică şi se măsoară în *radiani* .
- *diferența de fază* sau *faza inițială* φ_0 reprezintă diferența dintre fazele mişcărilor vibratorii armonice date de ecuațiile (fig. 1.a):

$$x = A\ sin\,\omega t, \quad respectiv$$
$$x = A\ sin(\omega t + \varphi_0) \qquad (9)$$

Diferența de fază reprezintă decalajul - la momentul inițial t_0 - dintre vibrațiile a două mişcări izocrone date de relațiile (9).

- *forța elastică* F_e - este forța dezvoltată în arcul (elementul elastic) care produce vibrația armonică (fig. 3):

$$F_e = kx \qquad (10)$$

Dându-se legea de mişcare al unui oscilator armonic liniar sub forma:

$$x = A\,cos(\omega t - \varphi_0). \qquad (11)$$

se definesc *parametrii mişcării de vibrație:*

- *viteza* este prima derivată a deplasării:

$$\dot{x} = -A\omega\,sin(\omega t - \varphi_0) \qquad (12)$$

- *accelerația* - a doua derivată a deplasării:

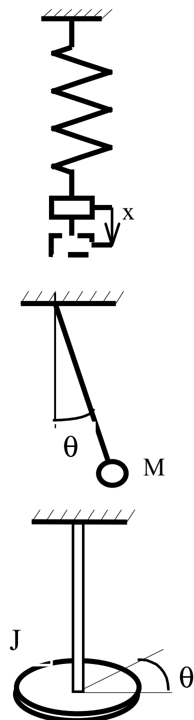
$$\ddot{x} = -A\,\omega^2\,cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x. \qquad (13)$$

Vibrațiile se pot clasifica după mai multe criterii, dintre care :

1. după numărul gradelor de libertate, vibrațiile pot fi:

- *pentru sisteme discrete cu unul sau mai multe grade de libertate*, după cum configurația sistemului la un moment dat poate fi determinată de unul sau mai mulți parametri scalari independenți. În figura 5 sunt prezentate trei exemple de sisteme cu un grad de libertate, iar în figura 6 patru sisteme cu două grade de libertate.

- *pentru sisteme continue (cu o infinitate de grade de libertate)*



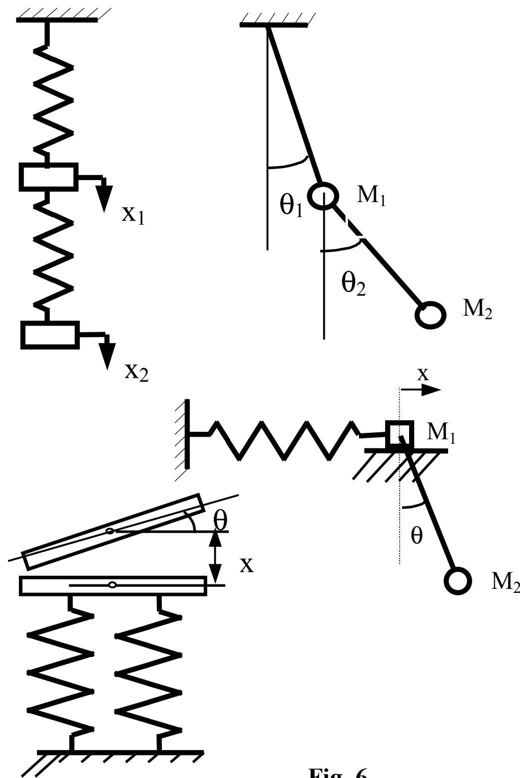


Fig. 5

Fig. 6

2. **după forțele exterioare (*active-perturbatoare* sau *pasive-rezistente*) care intervin în mişcările vibratorii :**

- *vibrații libere sau proprii* - au loc într-un sistem izolat în urma unei perturbații exterioare de scurtă durată; vibrațiile proprii depind de forțele elastice interne ale sistemului şi structura lui fizică ;
- *vibrații forțate* (întreținute sau excitate) - când intervin forțe exterioare periodice active-perturbatoare independente de vibrațiile din sistem; energia vibrațiilor este asigurată de aceste forțe;
- *vibrații parametrice* – provocate de variația periodică din exterior a unui parametru cinematic (deplasarea, viteza) sau fizic (masa, constanta elastică)
- *autovibrațiile* apar într-un sistem în lipsa unei acțiuni periodice exterioare, caracterul vibrațiilor este determinat exclusiv de structura internă a sistemului

3. **după natura energetică sistemului vibrator**

- *vibrații neamortizate* – pentru sisteme nedisipative sau conservative când forțele exterioare pasive-rezistente sunt nule;
- *vibrații amortizate* - pentru sisteme disipative când forțele exterioare pasive-rezistente nu sunt nule.

4. **în funcție de ecuațiile e descriu mişcarea:**

- Vibrații liniare şi vibrații neliniare

CAPITOLUL I
VIBRAȚIILE SISTEMELOR CU UN GRAD DE LIBERTATE

1.1. Vibrații libere

1.1.1 Ecuațiile generale

Pentru a deduce legea vibrațiilor libere ale unui oscilator armonic liniar se consideră punctul material M de masă *m* legat de mediul fix cu un element elastic liniar de constantă *k* (fig. 1.1.1) și următoarele condiții inițiale:

$$x(0) = x_0;\ \dot{x}(0) = v_0 \tag{1.1.1}$$

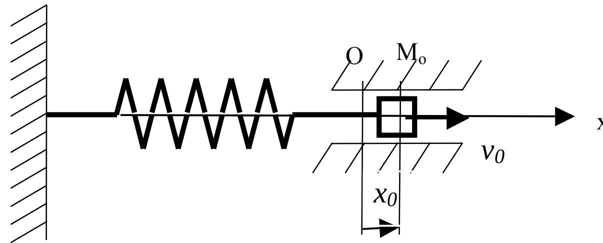


Fig.1.1.1

Se scrie legea fundamentală a dinamicii după axa Ox:

$$m\ddot{x} = -F_e \iff m\ddot{x} + kx = 0 \iff \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{1.1.2}$$

Notând: $\frac{k}{m} = p^2$ se obține: $\ddot{x} + p^2 x = 0$ (1.1.3)

care este o ecuație diferențială de ordinul II omogenă, având ecuația caracteristică:

$$r^2 + p^2 = 0 \tag{1.1.4}$$

cu două rădăcini complexe: $r_{1,2} = \pm ip$ (1.1.5)

Soluția ecuației diferențiale (1.1.3) are forma:

$$x = C_1 e^{-ipt} + C_2 e^{ipt} \tag{1.1.6}$$

Ținând seama de expresia derivatei: $\dot{x} = ip\,(-C_1 e^{-ipt} + C_2 e^{ipt})$ și înlocuind condițiile inițiale (1.1.1) se obține:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = x_0 \\ -C_1 + C_2 = \dfrac{v_0}{p} i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{2}\left(x_0 - \dfrac{v_0}{p} i \right) \\ C_2 = \dfrac{1}{2}\left(x_0 + \dfrac{v_0}{p} i \right) \end{cases} \qquad (1.1.7)$$

Ținând seama de formula: $e^{\pm ipt} = cos\ pt \pm i\, sin\ pt$ şi înlocuind (1.1.7) în relația (1.1.6) se obține soluția sub forma:

$$x = x_0\, cos\ pt + \frac{v_0}{p} sin\ pt \qquad (1.1.8)$$

Dacă se notează:

$$tg\varphi_0 = \frac{v_0}{px_0} \quad si \quad A = x_0 \sqrt{1 + \left(\frac{v_0}{x_0 p} \right)^2} = \frac{x_0}{cos\, \varphi_0} \qquad (1.1.9)$$

unde φ_0 reprezintă faza inițială şi A amplitudinea mişcării, se obține soluția sub forma:

$$x = A cos(pt - \varphi_0). \qquad (1.1.10)$$

Perioada mişcării armonice este:

$$T = \frac{2\pi}{p} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (1.1.11)$$

Observații:

a. perioada (sau frecvența) vibrațiilor libere nu depinde de condițiile inițiale nici de aplitudinea mişcării ci numai de masa *m* a corpului şi constanta elastică *k* a resortului, deci toate vibrațiile libere ale unui sistem cu un grad de libertate sunt *izocrone* (au aceeaşi perioadă);
b. aplitudinea mişcării *A* şi faza inițială φ_0 depind de condițiile inițiale (x_0, v_0);
c. nu există disipare de energie, sistemul se numeşte *conservativ* şi vibrațiile libere se produc cu aceeaşi amplitudine un timp nelimitat; acesta este un sistem ideal.
d. perioada şi frecvența mişcării nu depind de starea de tensiune a arcului în poziția de echilibru (fig.1.1.2). Astfel, din ecuația de echilibru static se determină săgeata statică:

$$F_{e0} = mg \quad \Rightarrow kx_{st} = mg \quad \Rightarrow x_{st} = \frac{mg}{k} \qquad (1.1.12)$$

şi legea fundamentală a dinamicii se scrie:

$$m\ddot{x} = mg - F_e; \quad unde:\ F_e = k(x + x_{st}) = k\left(x + \frac{mg}{k} \right) = kx + mg$$
$$\Rightarrow\ m\ddot{x} = mg - (kx + mg) \quad \Leftrightarrow \quad m\ddot{x} + kx = 0 \qquad (1.1.13)$$

adică s-a obținut ecuația mişcării (1.1.2) pentru arcul netensionat.

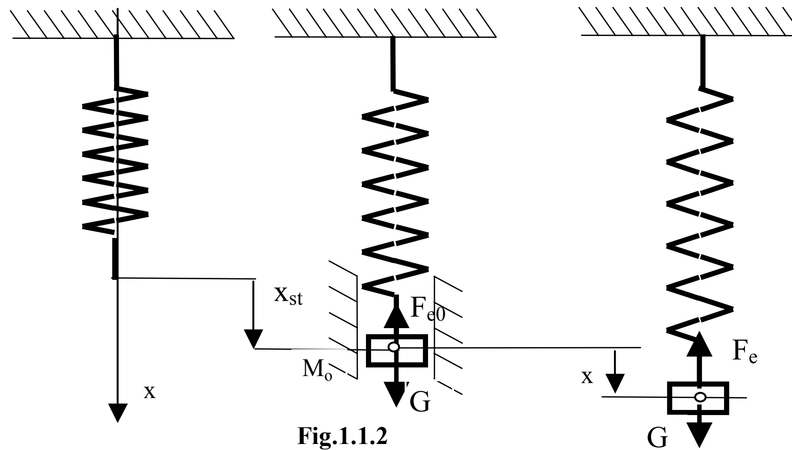


Fig.1.1.2

e. vibrații pot apărea nu numai în sisteme în care forța care produce vibrațiile este o forță elastică ci şi sub acțiunea forțelor restauratoare de tipul gravitaționale, electromagnetice, electrostatice, magnetice, etc.

1.1.2. Probleme rezolvate

a. Pendulul matematic şi pendulul fizic izocron

Pendulul matematic este un corp punctiform de masă *m* legat de mediul fix în O_1 cu un fir inextensibil de lungime l_m (fig. 1.1.3.a). **Pendulul fizic** este un corp rigid legat de mediul fix printr-o articulație cilindrică O_1 având centrul de greutate în punctul C situat sub articulație (fig.1.1.3.b). Parametrul mişcării în ambele cazuri este unghiul θ pe care îl face verticala cu linia care uneşte punctul O_1 cu punctul C.

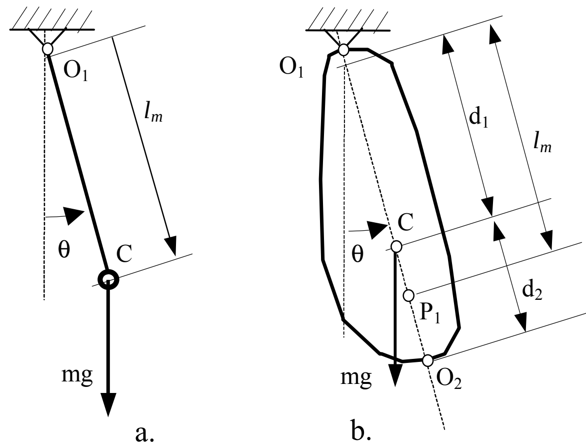


Fig.1.1.3

Ecuația diferențială a mişcării **pendului matematic** se scrie folosind teorema momentului cinetic:

$$ml_m^2\ \ddot{\theta} = -mgl_m \sin\theta \tag{1.1.14}$$

sau: $$\ddot{\theta}+\frac{g}{l_m}\sin\theta=0 \qquad (1.1.15)$$

Din dezvoltarea în serie a funcției sinus: $\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+...$ (1.1.16)

pentru micile oscilații ($\theta<4...5^0$) se poate aproxima:

$$\sin\theta\cong\theta \qquad (1.1.17)$$

Ecuația (1.1.15) devine :

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l_m}\theta=0 \qquad (1.1.18)$$

Deci pulsația proprie a micilor oscilații este:

$$p_m=\sqrt{\frac{g}{l_m}} \qquad (1.1.19)$$

iar perioada: $$T=\frac{2\pi}{p}=2\pi\sqrt{\frac{l_m}{g}} \qquad (1.1.20)$$

Ecuația diferențială a mişcării **pendulului fizic** se scrie folosind teorema momentului cinetic: $J_{O1}\ddot{\theta}=-mgd_1\sin\theta$ (1.1.21)

sau: $$\ddot{\theta}+\frac{mgd_1}{J_{O1}}\sin\theta=0 \qquad (1.1.22)$$

pentru micile oscilații ($\theta<4...5^0$) ecuația diferențială (1.1.22) se scrie:

$$\ddot{\theta}+\frac{mgd_1}{J_{O1}}\theta=0 \qquad (1.1.23)$$

Deci pulsația micilor oscilații ale pendulului fizic este:

$$p_{f1}=\sqrt{\frac{mgd_1}{J_{O1}}} \qquad (1.1.24)$$

Lungimea pendului matematic izocron cu pendulul fizic se obține din condiția: $$p_m=p_{f1} \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{\frac{g}{l_m}}=\sqrt{\frac{mgd_1}{J_{O1}}} \qquad (1.1.25)$$

Se obține lungimea pendului matematic izocron cu cel fizic în funcție de distanța d_1 , masa m şi momentul de inerție J_C:

$$l_m=\frac{J_{O1}}{md_1}=\frac{J_C+md_1^2}{md_1}\Rightarrow l_m=d_1+\frac{J_C}{md_1} \qquad (1.1.26)$$

Dacă se schimbă centrul de oscilație din punctul O_1 în punctul P_1 , aflat pe linia O_1C la distanța $O_1P_1=l_m$ (fig. 1.1.3.b) se obține un pendul izocron cu cel inițial, întrucât sunt valabile relațiile:

$$p_{f2}=\sqrt{\frac{mg(l_m-d_1)}{J_{P1}}}=\sqrt{\frac{mg(l_m-d_1)}{J_C+m(l_m-d_1)^2}}=\sqrt{\frac{mgd_1}{J_C+md_1^2}} \qquad (1.1.27)$$

$$\Rightarrow\ p_{f1}=p_{f2}$$

Folosind această proprietate se poate determina experimental poziția centrului de greutate şi momentul de inerție mecanic față de axa ce trece prin centrul de greutate J_C cu ajutorul perioadelor micilor oscilații ale celor două pendule fizice (având centrele de oscilație O_1 şi O_2 situate pe aceeaşi linie cu centrul de greutate C, figura 1.1.3.b). Sunt valabile relațiile:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_{O1}}{mgd_1}} = \sqrt{\frac{J_C + md_1^2}{mgd_1}};$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J_{O2}}{mgd_2}} = \sqrt{\frac{J_C + md_2^2}{mgd_2}} \qquad d_1+d_2=d \qquad (1.1.28)$$

Relațiile (1.1.28) formează un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute: d_1, d_2 şi J_G . Rezolvând acest sistem se obține:

$$d_1 = \frac{d^2 - T_2^2\frac{gl}{4\pi^2}}{2d - \frac{g}{4\pi^2}\left(T_1^2 + T_2^2\right)}; \qquad d_2 = \frac{d^2 - T_1^2\frac{gl}{4\pi^2}}{2d - \frac{g}{4\pi^2}\left(T_1^2 + T_2^2\right)} \qquad (1.1.29)$$

$$J_C = md_1\left(\frac{g}{4\pi^2}T_1^2 - d_1\right) \quad sau \quad J_C = md_2\left(\frac{g}{4\pi^2}T_2^2 - d_2\right)$$

b. Pendulul torsional cu un fir

În figura 1.1.4 este prezentat un pendul torsional cu un fir de lungime *L* la capătul căruia se află un corp axial simetric având momentul de inerție mecanic axial *J*. Se cere să se determine perioada oscilațiilor torsionale ale discului.

Dacă se scoate corpul din poziția de echilibru cu un unghi φ, în fir ia naştere un cuplu de răsucire M_t având sensul opus şi proporțional cu unghiul φ. Ecuația diferențială a mişcării se scrie sub forma teoremei momentului cinetic:

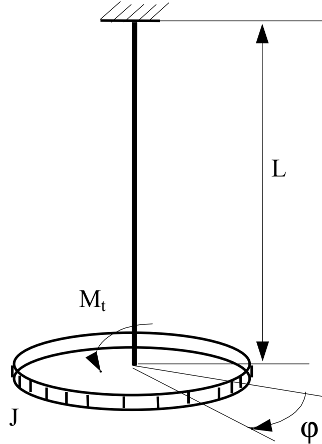


Fig.1.1.4

$$J\ddot{\varphi} = -M_t \qquad (1.1.30)$$

Dacă se scrie unghiul φ în funcție de cuplul de torsiune M_t se obține:

$$\varphi = \frac{M_t L}{GI_p} = \frac{M_t}{k_t} \Leftrightarrow M_t = k_t\varphi \qquad (1.1.31)$$

unde s-a notat cu k_t constanta elastică la răsucire a firului $\left(k_t = \frac{GI_p}{L}\right)$.

Ecuația (1.1.30) devine:

$$J\ddot{\varphi} = -k\varphi \;\Leftrightarrow\; \ddot{\varphi} + \frac{k}{J}\varphi = 0 \qquad (1.1.32)$$

S-a obținut astfel o ecuație diferențială de ordinul II de forma (1.1.3). Deci pusația proprie a vibrațiilor în acest caz se scrie:

$$p = \sqrt{\frac{k}{J}} = \sqrt{\frac{GI_p}{JL}} \tag{1.1.33}$$

Perioada vibrațiilor este:

$$T = \frac{2\pi}{p} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{JL}{GI_p}} \tag{1.1.34}$$

Momentul de inerție J al discului se poate determina experimental dacă se cunoaşte constanta elastică la răsucire a firului ($k = \frac{GI_p}{L}$) şi perioada vibrațiilor torsionale T. Acesta se determină din (1.1.34) cu ajutorul relației:

$$J = \frac{GI_p}{4\pi^2 L} T^2 \tag{1.1.35}$$

c. Pendulul torsional cu trei fire

În figura 1.1.5.a este prezentat pendulul torsional format din trei fire paralele de lungime *L*, la capătul cărora se prinde un disc având momentul de inerție *J*; prinderea se face în trei puncte echidistante situate pe un cerc de rază *R*. Se cee să se determine perioada oscilațiilor discului.

Dacă se scoate discul din poziția de echilibru rotindu-l în jurul axei verticale cu unghiul φ, din cauza înclinării firelor aceasta urcă cu cantitatea δ, iar forța de tensiune care revine unui fir se descompune după 2 direcții (fig.1.1.5.b):

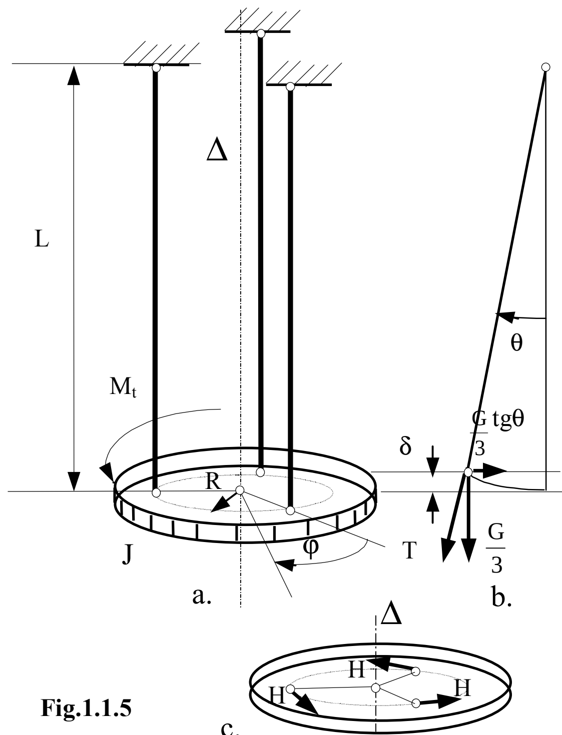


Fig.1.1.5

- după direcția firului:

$$T = \frac{G}{3}\frac{1}{cos\,\theta} \tag{1.1.36}$$

- după direcția orizontală:

$$H = \frac{G}{3} tg\theta \tag{1.1.37}$$

Forța de readucere în poziția de echilibru este deci *3H* şi produce un cuplu de readucere opus unghiului φ (fig.1.1.4.c) având mărimea:

$$M_\Delta = 3HR \tag{1.1.38}$$

Teorema momentului cinetic pentru mişcarea discului în jurul axei Δ se scrie:

$$J\ddot{\varphi} = -M_\Delta \tag{1.1.39}$$

unde *J* – este momentul de inerție mecanic al coroanei circulare în raport cu axa Δ.

M_Δ - momentul forțelor de readucere în raport cu axa de rotație Δ.

Pentru unghiuri mici forța orizontală H se mai poate scrie:

$$H = \frac{G}{3} \cdot tg\theta = \frac{G}{3} \cdot \frac{R\varphi}{L} \tag{1.1.40}$$

Ecuația diferențială a mişcării (1.1.39) devine:

$$J\ddot{\varphi} + \frac{GR^2}{L} \cdot \varphi = 0 \quad sau \quad \ddot{\varphi} + \frac{GR^2}{JL} \cdot \varphi = 0 \tag{1.1.41}$$

Pusația şi perioada vibrațiilor proprii în acest caz se scrie:

$$p = \sqrt{\frac{GR^2}{JL}}, \qquad T = \frac{2\pi}{p} = 2\pi\sqrt{\frac{JL}{GR^2}} \tag{1.1.42}$$

Se poate determina experimental momentul de inerție J al discului dacă se cunosc: lungimea firului L greutatea (masa) discului şi perioada vibrațiilor torsionale T cu ajutorul relației:

$$J = \frac{GR^2}{4\pi^2 L} T^2 \tag{1.1.43}$$

d. Sistem elastic format din corpuri şi discuri omogene

Se consideră sistemul elastic cu un grad de libertate format dintr-o roată omogenă de masă m care este legată de mediul fix prin intermediul unei articulații peste care este înfăşurat un fir care are la un capăt masa M iar celălalt capăt este înfăşurat pe o a doua roată omogenă de masă $2m$ şi legat de mediul fix ca în figura 1.1.6; axul celei de-a doua roți este legat de mediul fix prin intermediul unui arc de rigiditate k. Să se determine pulsația, vibrațiilor libere ale acestui sistem.

Date numerice: m_1=m; m_2=m_3=2m; m=1 kg; k=100 N/mm.

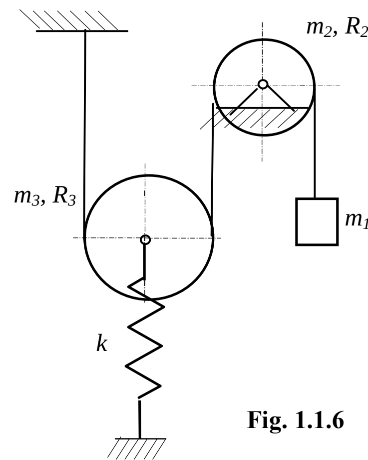


Fig. 1.1.6

Pentru scrierea ecuațiilor de mişcare se folosesc ecuațiile lui Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{1.1.44}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{\partial V}{\partial q} = 0 \tag{1.1.45}$$

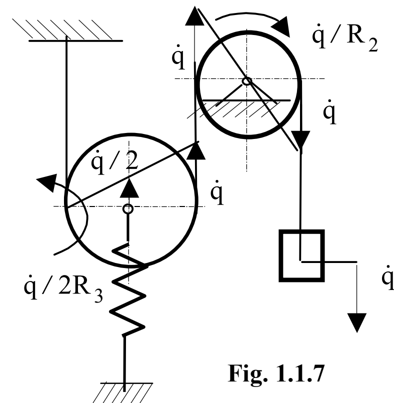


Fig. 1.1.7

Pentru analiza cinematică a mişcării din figura 1.1.7 s-a notat:

- $q, \dot{q}$ deplasarea respectiv viteza generalizată a corpului de masă m_1;
- $q/R_2, \dot{q}/R_2$ rotirea, respectiv viteza unghiulară a corpului de masă m_2

- $q/2, \dot{q}/2R_3$ deplasarea centrului de masă respectiv viteza unghiulară a roţii de masă m_3 .

Energia cinetică totală a sistemului E_c se scrie:

$$E_c = \frac{1}{2}m_1\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_2 R_2^2}{2}\left(\frac{\dot{q}}{R_2}\right)^2 + \frac{1}{2}m_3\left(\frac{\dot{q}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{m_3 R_3^2}{2}\left(\frac{\dot{q}}{2R_3}\right)^2$$

$$E_c = \frac{\dot{q}^2}{2}\left(m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{3m_3}{8}\right) \quad (1.1.46)$$

Energia potenţială a sistemului V este: $V = \frac{1}{2}k\left(\frac{q}{2}\right)^2$ (1.1.47)

Derivatele parţiale se calculează imediat:

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}} = \left(m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{3m_3}{8}\right)\dot{q};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}}\right) = \left(m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{3m_3}{8}\right)\ddot{q}; \qquad \frac{\partial V}{\partial q} = \frac{1}{4}kq \quad (1.1.48)$$

Ecuaţia Lagrange (1.1.45) se scrie:

$$\left(m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{3m_3}{8}\right)\ddot{q} + \frac{1}{4}kq = 0 \quad (1.1.49)$$

Pulsaţia proprie se determină imediat:

$$p = \sqrt{\frac{k}{4m_1 + 2m_2 + \frac{3m_3}{2}}} \quad (1.1.50)$$

e. Sistem elastic orizontal cu o roată omogenă

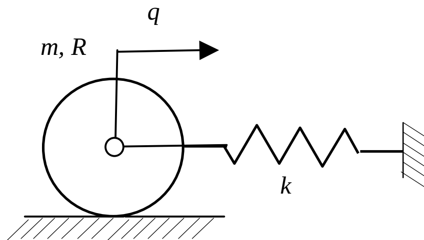


Fig. 1.1.8

Se consideră sistemul elastic cu un grad de libertate format dintr-o roată omogenă de masă *m* şi rază *R* care este legată de mediul fix prin intermediul unui arc de constantă *k* ca în figura 1.1.8. Roata se rostogoleşte fără alunecare pe o suprafaţă orizontală Să se determine pulsaţia, vibraţiilor libere ale acestui sistem şi valoarea minimă a coeficientului de frecare pentru ca vibraţiile să se producă fără alunecare ($a=10^{-2}$m)

Date numerice: m_1=m; m_2=m_3=2m; *m*=1kg; *k*=100 N/mm, g=10ms^{-2}

Energia cinetică şi potenţială a sistemului se scriu:

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\left(\frac{\dot{q}}{R}\right)^2 = \frac{3}{4}m\dot{q}^2; \quad V = \frac{1}{2}kq^2 \quad (1.1.51)$$

Înlocuind în relația (1.1.45) se obține:

$$\frac{3}{2}m\ddot{q}+kq=0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{q}+\frac{2k}{3m}q=0 \tag{1.1.52}$$

Pulsația proprie a sistemului este: $p=\sqrt{\frac{3k}{2m}}$ (1.1.53)

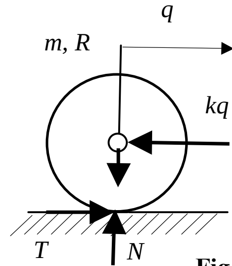


Fig. 1.1.9

Dacă se izolează corpul și se introduc forțele de legătură se poate scrie principiul al II lea al dinamicii obținându-se:

$$m\ddot{q}=-kq+T \tag{1.1.54}$$

$$T=m\ddot{q}+kq=(k-mp^2)q \tag{1.1.55}$$

Forța de frecare maximă este:

$$T_{max}=(k-mp^2)a=\frac{ka}{3}$$
$$T_{max}\leq \mu N \tag{1.1.56}$$

Rezultă valoarea minimă a coeficientului de frecare pentru care se produce rostogolirea fără alunecare: $\mu\geq\frac{ka}{3mg}$ (1.1.57)

f. Vibrațiile libere ale unui corp fixat pe o bară cu suporți elastici

Se consideră sistemul elastic format dintr-un corp de masă *m* fixat pe o bară dreaptă de lungime *L* la distanța $a=\alpha L$ de capătul ei, de rigiditate la încovoiere constantă EI și masă neglijabilă, situată pe două reazeme elastice de constante elastice k (fig. 1.1.7). Să se determine pulsația proprie a vibrațiilor corpului.

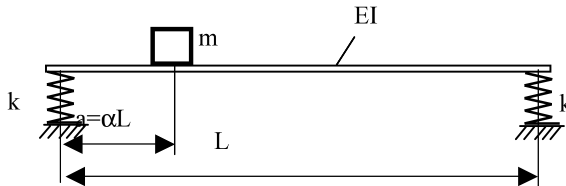


Fig. 1.1.7

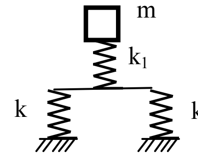


Fig. 1.1.8

Sistemul elastic este echivalent cu cel din figura 1.1.8 a cărui constantă echivalentă se calculează cu ajutorul relației:

$$\frac{1}{k_e}=\frac{1}{2k}+\frac{1}{k_b} \tag{1.1.58}$$

unde k_b este constanta elastică la încovoiere a barei și are expresia:

$$\frac{1}{k_b}=\frac{\alpha^2(1-\alpha)^2}{3}\frac{L^3}{EI} \tag{1.1.59}$$

Pulsația proprie a sistemului este:

$$p=\sqrt{\frac{k_e}{m}}=\sqrt{\frac{1}{m\left(\frac{1}{2k}+\frac{\alpha^2(1-\alpha)^2}{3}\frac{L^3}{EI}\right)}} \tag{1.1.60}$$

1.2. Vibrații libere cu amortizare vâscoasă

1.2.1. Ecuațiile generale

Acest tip de vibrații apar în cazul mişcărilor în aer al unui corp cu viteza *v <1 m/s* sau în cazul mişcărilor într-un mediu rezistent cu vâzcozitate mică, când forța rezistentă vâscoasă se considera proporțională cu viteza $\overline{R} = -c\overline{v}$, unde *c* este coeficientul de amortizare vâscoasă.

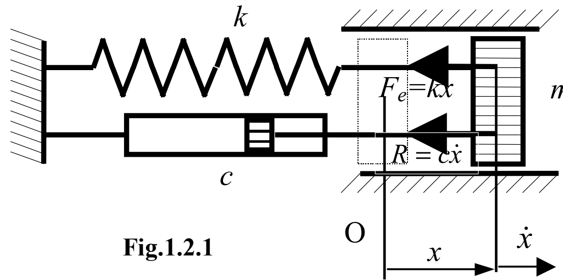


Fig.1.2.1

Modelului mecanic folosit este dat în figura 1.2.1, fiind format dintr-un corp de masă *m*, un arc de constantă elastică *k* şi un element de amortizare ce produce o forță rezistentă proporțională cu viteza şi de sens opus ($R = c\dot{x}$, *c* este coeficientul de amortizare). Ecuația diferențială a mişcării se scrie:

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} \quad \Leftrightarrow \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \qquad (1.2.1)$$

sau:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \qquad (1.2.2)$$

Dacă se notează:

$$\frac{c}{m} = 2n - \text{unde } n \text{ are dimensiunea unei pulsații;} \qquad (1.2.3)$$

$$\frac{k}{m} = p^2 \text{ unde } p \text{ este pulsația proprie a oscilatorului fără amortizare}$$

atunci ecuația diferențială (1.2.2) se mai scrie sub forma :

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2 x = 0 \qquad (1.2.4)$$

Ecuația caracteristică corespunzătoare este:

$$r^2 + 2nr + p^2 = 0 \qquad (1.2.5)$$

având rădăcinile:

$$r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - p^2} \qquad (1.2.6)$$

Se doesebesc următoarele cazuri de rădăcini ale ecuației caracteristice:

a) $n^2 - p^2 < 0$ *– rădăcini complex - conjugate;*

b) $n^2 - p^2 > 0$ *– rădăcini reale şi distincte;*

c) $n^2 - p^2 = 0$ *– rădăcini reale şi confundate.*

În cazul *(c)* coeficientul de amortizare *c* vâscoasă are o valoare limită numită *coeficient de amortizare critic* (c_{cr}):

$$n = p \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c_{cr}}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad c_{cr} = 2\sqrt{km} = 2mp \qquad (1.2.7)$$

Se defineşte *factorul de amortizare* ca raportul dintre coeficientul de amortizare c şi coeficientul de amortizare critic c_{cr}:

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{n}{p} \tag{1.2.8}$$

Cazul a. Rădăcini complexe conjugate

Acest caz corespunde domeniului subcritic ($n < p$ respectiv $c < c_{cr}$) şi se notează:

$$n^2 - p^2 = -\ p_1^2 \tag{1.2.9}$$

Rădăcinile ecuației caracteristice (1.2.5) devin:

$$r_{1,2} = -n \pm ip_1 \tag{1.2.10}$$

Soluția ecuației diferențiale (1.2.4) este de forma:

$$x = e^{-nt}\left(C_1 \cos p_1 t + C_2 \sin p_1 t\right) \tag{1.2.11}$$

unde C_1 şi C_2 sunt constantele de integrare care se determină cu ajutorul condițiilor inițiale:

$$t = 0 \ \Rightarrow x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = v_0. \tag{1.2.12}$$

Derivând în raport cu timpul expresia (1.2.11) se obține:

$$\dot{x} = -ne^{-nt}\left(C_1 \cos p_1 t + C_2 \sin p_1 t\right) + p_1 e^{-nt}\left(-C_1 \sin p_1 t + C_2 \cos p_1 t\right) \tag{1.2.13}$$

Introducând (1.2.12) în (1.2.11) şi (1.2.13) rezultă:

$$C_1 = x_0; \qquad C_2 = \frac{v_0 + nx_0}{p_1} \tag{1.2.14}$$

Deci soluția ecuației diferențiale (1.2.4) are forma:

$$x = e^{-nt}\left(x_0 \cos p_1 t + \frac{v_0 + nx_0}{p_1} \sin p_1 t\right) \tag{1.2.15}$$

Soluția (1.2.15) se mai scrie sub forma:

$$x = Ae^{-nt} \cos\left(p_1 t - \varphi_0\right) \tag{1.2.16}$$

unde A este amplitudinea iar φ_0 faza inițială a mişcării oscilatorului, care obțin prin identificarea celor două relații (1.2.15) şi (1.2.16):

$$\left(x_0 \cos p_1 t + \frac{v_0 + nx_0}{p_1} \sin p_1 t\right) \equiv A\left(\cos p_1 t \cdot \cos \varphi_0 + \sin p_1 t \cdot \sin \varphi_0\right)$$

$$\Rightarrow \quad A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + nx_0}{p_1}\right)^2}; \qquad tg\varphi_0 = \frac{v_0 + nx_0}{p_1 x_0} \tag{1.2.17}$$

Derivând expresia (1.2.16) se obține viteza oscilatorului:

$$\dot{x} = -Ae^{-nt}\left[n \cos\left(p_1 t - \varphi_0\right) + p_1 \sin\left(p_1 t - \varphi_0\right)\right]$$

sau : (1.2.18)

$$\dot{x} = -B\ e^{-nt} \sin\left(p_1 t - \varphi_0 + \theta\right)$$

unde B este amplitudinea iar θ diferența de fază dintre viteză şi deplasare, care obțin prin identificarea celor două relații:

$$A\left[n\cos(p_1t-\varphi_0)+p_1\sin(p_1t-\varphi_0)\right]\equiv$$
$$\equiv B\left[\sin(p_1t-\varphi_0)\cos\theta+\cos(p_1t-\varphi_0)\sin\theta\right] \qquad (1.2.19)$$
$$\Rightarrow B=A\sqrt{n^2+p_1^2}; \qquad tg\theta=\frac{n}{p_1}$$

Legea de variație a deplasării şi vitezei se scriu sub forma:

$$x=Ae^{-nt}\cos(p_1t-\varphi_0)$$
$$\dot{x}=-Ae^{-nt}\sqrt{n^2+p_1^2}\sin(p_1t-\varphi_0+\theta) \qquad (1.2.20)$$

Acestea exprimă o mişcare vibratorie amortizată, cu un defazaj între viteză şi deplasare de ($\pi/2+\theta$).

Amplitudinea mişcării (deplasare şi viteză) scade în timp după o lege exponențială, deci se obține o mişcare modulată în amplitudine. Mărimea p_1 se numeşte *pseudopulsație* şi se exprimă în funcție de factorul de amortizare ζ astfel :

$$p_1=\sqrt{p^2-n^2}=p\sqrt{1-\left(\frac{c}{c_{cr}}\right)^2}=p\sqrt{1-\zeta^2} \qquad (1.2.21)$$

Se observă că *pseudopulsația* este mai mică decât pulsația proprie p corespunzătoare vibrațiilor libere neamortizate. *Pseudoperioada* T_{p1} a mişcării amortizate este:

$$T_{p1}=\frac{2\pi}{p_1}=\frac{2\pi}{\sqrt{p^2-n^2}}, \qquad (1.2.22)$$

Pseudoperioada T_{p1} se poate exprima în funcție de perioada vibrațiilor proprii T_p şi factorul de amortizare ζ cu ajutorul relației:

$$T_{p1}=\frac{2\pi}{p_1}=\frac{2\pi}{\sqrt{p^2-n^2}}=\frac{2\pi}{p}\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}=\frac{T_p}{\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad (1.2.23)$$

Pentru următorele valori particulare al parametrilor:

$m=1kg;\ c=14Ns/m;\ k=625N/m;\ x_0=10mm,\ v_0=20mm/s$

$\Rightarrow \quad p=24;\ n=7;\ \beta=25;\ A=10{,}628mm;\ \varphi_0=0{,}345\ rad$

legile deplasării şi vitezei: $x=Ae^{-nt}\cos(p_1t-\varphi_0)$, $\quad \dot{x}=-Be^{-nt}\cos(p_1t-\varphi_0+\theta)$ se scriu sub forma analitică astfel:

$$\begin{cases} x=10{,}628\,exp(-7t)\cos(25t-0{,}375) & mm \\ \dot{x}=-275{,}92\,exp(-7t)\sin(25t-0{,}375+0{,}514) & mm/s \end{cases} \qquad (1.2.24)$$

Folosind programul MATHCAD deplasarea şi viteza s-au reprezentat în figurile 1.2.2 şi 1.2.3. Valorile maxime ale deplasării (elongația maximă) A_k se obțin din condiția de anulare a vitezei $\dot{x}=0$ de unde rezultă timpii corespunzători:

$$t_{mk}=\frac{1}{p_1}(\varphi_0-\theta+k\pi) \qquad (1.2.24)$$

$$\Rightarrow \quad A_k=Ae^{-\frac{n}{p_1}(\varphi_0-\theta+k\pi)}\cos(k\pi-\theta)$$

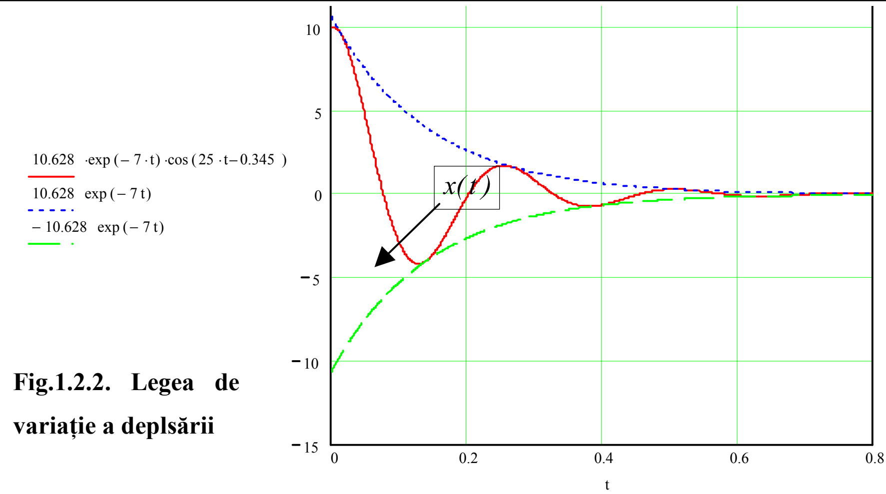


Fig.1.2.2. Legea de variație a deplsării

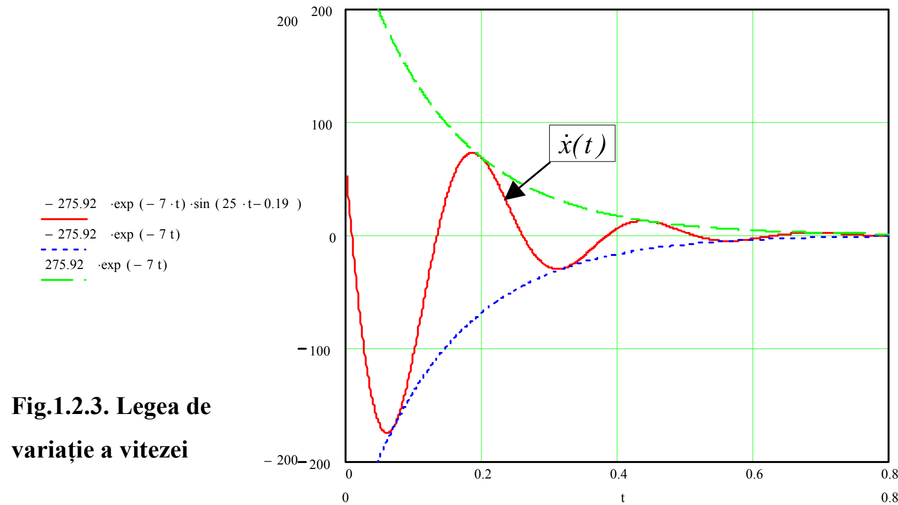


Fig.1.2.3. Legea de variație a vitezei

Pentru a studia modul de amortizare a mişcării, se calculează raportul a două elongații maxime situate la un interval de timp de o pseudoperioadă:

$$\frac{A_{(k)}}{A_{(k+2)}}=\frac{Ae^{-\frac{n}{p_1}(\varphi_0-\theta+k\pi)}\,cos(k\pi-\theta)}{Ae^{-\frac{n}{p_1}(\varphi_0-\theta+k\pi+2\pi)}\cdot cos(k\pi+2\pi-\theta)}=e^{\frac{2\pi n}{p_1}} \qquad (1.2.25)$$

Relația (1.2.25) indică faptul că elongațiile maxime măsurate la un interval de timp egal cu o pseudoperioadă scad în progresie geometrică (raportul este independent de timp). Pentru a caracteriza această progresie se defineşte *decrementul logaritmic* ca logaritm natural al acestui raport:

$$\delta = ln\frac{A_{(k)}}{A_{(k+2)}} = ln\, e^{\frac{2\pi n}{p_1}} = \frac{2\pi n}{p_1} = \frac{2\pi n}{\sqrt{p^2 - n^2}} = 2\pi\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad (1.2.26)$$

Folosind programul MATHCAD şi relația (1.2.26) s-a reprezentat în figura 1.2.4 şi 1.2.5 variația decrementului logaritmic şi variația raportului $\frac{T_{p1}}{T_p}$ în funcție de factorul de amortizare ζ conform relației (1.2.23).

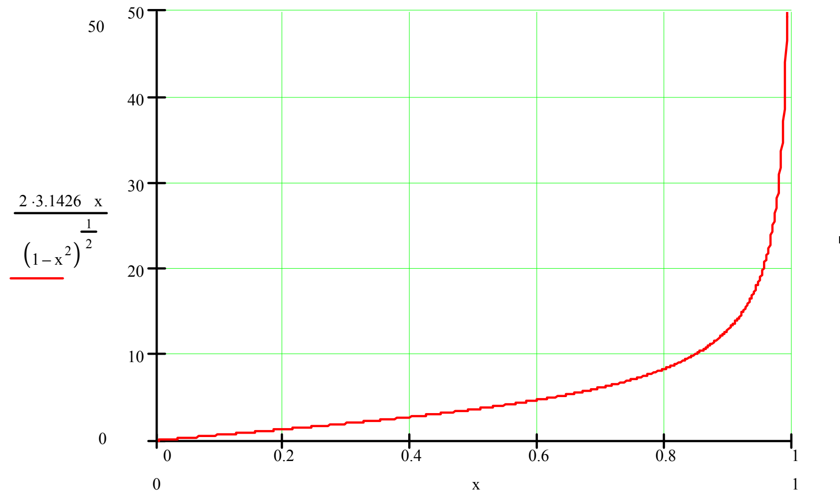


Fig.1.2.4. Variația decrementului logaritmic cu factorul de amortizare $\zeta\ (\zeta \equiv x)$

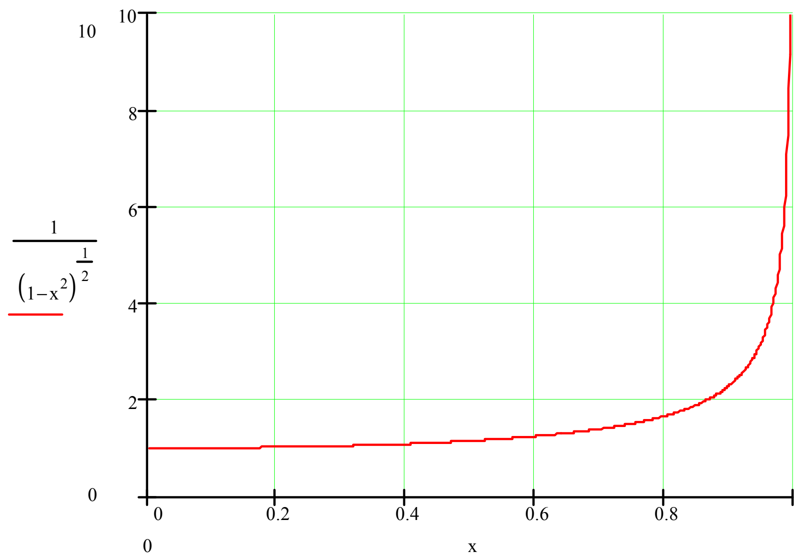


Fig.1.2.5. Variația raportului T_{p1}/T_p **cu factorul de amortizare** $\zeta\ (\zeta \equiv x)$

Cazul b. Rădăcini reale şi distincte ($n^2 - p^2 > 0$)

Acest caz corespunde domeniului supracritic ($n > p$ respectiv $c > c_{cr}$). Rădăcinile ecuației caracteristice (1.55) sunt reale şi au valorile:

$$r_{1,2} = -n \mp \sqrt{n^2 - p^2} = -n \mp \lambda \qquad (1.2.27)$$

Soluția ecuației diferențiale (1.2.4) pentru acest caz se scrie:

$$x(t) = C_1 e^{(-n-\lambda)t} + C_2 e^{(-n+\lambda)t} = e^{-\alpha t}(B_1\, sh\lambda t + B_2\, ch\lambda t) \qquad (1.2.28)$$

Derivata lui $x(t)$ se scrie:

$$\dot{x}(t) = e^{-nt}\left(-nB_1\; sh\lambda t - nB_2\; ch\lambda t + B_1\lambda\; ch\lambda t + B_2\lambda\; sh\lambda t\right) \qquad (1.2.29)$$

Constantele de integrare B_1 şi B_2 se determină din condițiile inițiale:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad x(0) = x_0,\; \dot{x}(0) = v_0. \qquad (1.2.30)$$

Înlocuind rezultă: $B_1 = \dfrac{v_0 + nx_0}{\lambda}$; $B_2 = x_0$ (1.2.31)

Deci soluția este o funcție aperiodică, hiprebolică tinzând asimptotic către poziția de repaus: $x = e^{-nt}\left(\dfrac{v_0 + nx_0}{\lambda} sh\lambda t + x_0 ch\lambda t\right)$ (1.2.32)

Dacă se consideră patru condiții inițiale caracterizate de următoarele valorile numericefolosind programul MATHCAD şi relația (1.2.32) s-au obținut cele 4 grafice din figura 1.2.6.

1. $p = 16;\; \alpha = 20;\; \lambda = 12;\; x_0 = 10;\; v_0 = 400$
2. $p = 16;\; \alpha = 20;\; \lambda = 12;\; x_0 = 10;\; v_0 = 0$
3. $p = 16;\; \alpha = 20;\; \lambda = 12;\; x_0 = 10;\; v_0 = -800$
4. $p = 16;\; \alpha = 20;\; \lambda = 12;\; x_0 = -10;\; v_0 = -400$

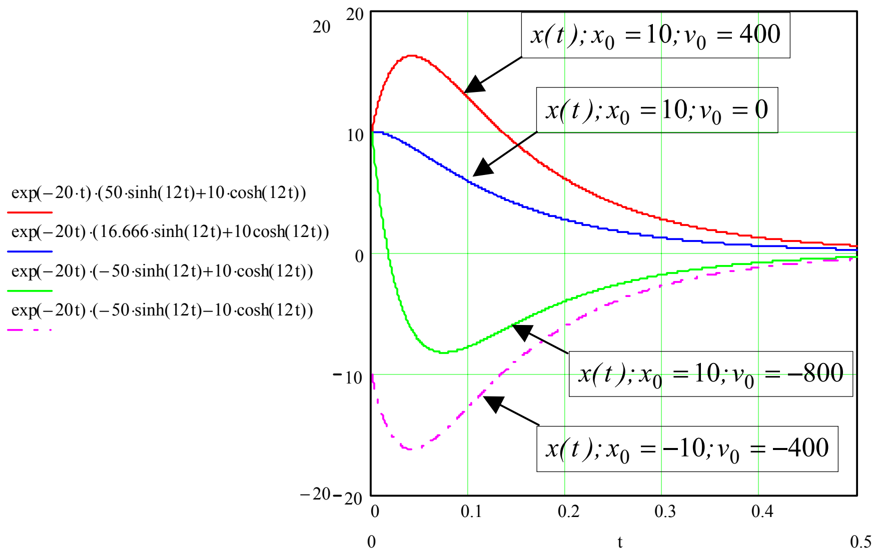


Fig.1.2.6. Variația deplasării pentru cele patru condiții inițiale

Cazul c. Rădăcini reale confundate ($n^2 - p^2 = 0, \quad n = p, \quad c = c_{cr}$)

Acest caz corespunde amortizării critice şi rădăcinile ecuației caracteristice (1.2.5) sunt reale şi egale: $r_1 = r_2 = -n$

Soluția ecuației diferențiale pentru acest caz este:

$$x = e^{-nt}(C_1 t + C_2) \tag{1.2.33}$$

Pentru limita $t \to \infty$ aplicând regula l'Hospital se obține:

$$x = \lim_{t\to\infty} \frac{C_1 t + C_2}{e^{nt}} = \lim_{t\to\infty} \frac{C_1}{ne^{\alpha t}} = 0, \tag{1.2.34}$$

adică mişcarea este aperiodică tinzând asimptotic la zero ca şi în cazul precedent.

Derivata acestei soluții se scrie: $\dot{x} = e^{-nt}(-nC_1 t - nC_2 + C_1)$ (1.2.35)

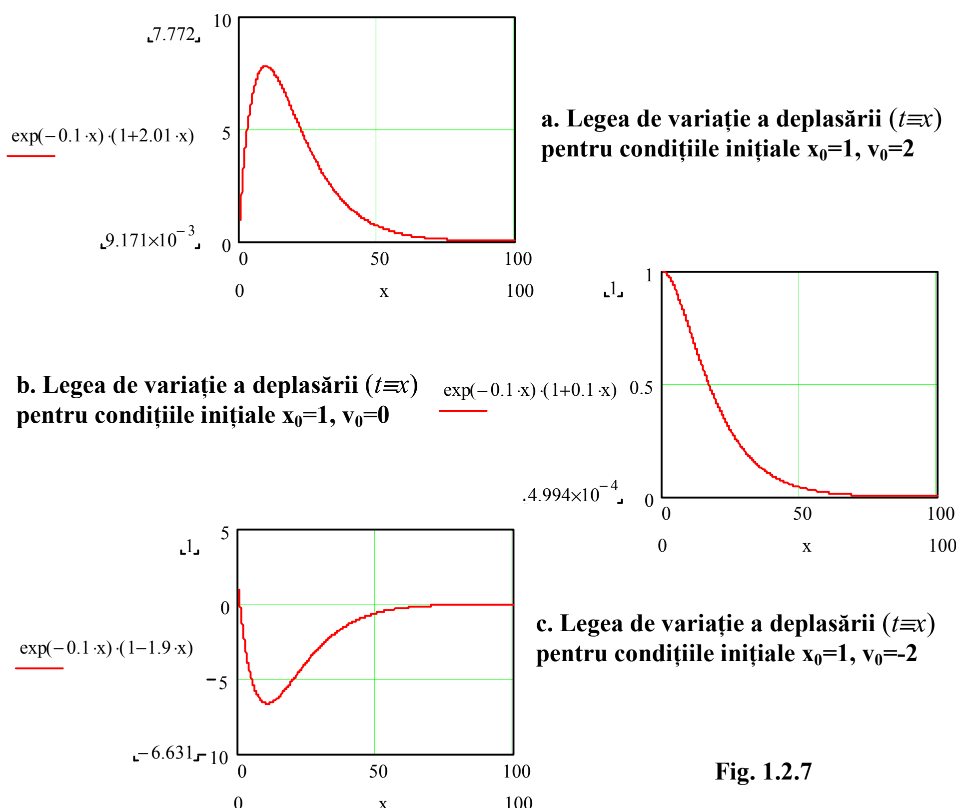
Constantele de integrare C_1 şi C_2 se determină din condițiile inițiale:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = v_0. \tag{1.2.36}$$

rezultă: $C_1 = v_0 + nx_0 \ ; \quad C_2 = x_0$ (1.2.37)

$$x = e^{-nt}[x_0 + (v_0 + nx_0)t] \tag{1.2.38}$$

Spre exemplificare se consideră următoarele valori: α*=0.1;* x_0*=1* şi trei cazuri pentru condițiile inițiale: a) v_0*=2;* b) v_0=0 şi c) v_0*=-2.* Înlocuind în (1.2.38) şi folosind programul MATHCAD s-au obținut graficele din fig. 1.2.7.



a. Legea de variație a deplasării (*t≡x*) pentru condițiile inițiale x_0**=1,** v_0**=2**

b. Legea de variație a deplasării (*t≡x*) pentru condițiile inițiale x_0**=1,** v_0**=0**

c. Legea de variație a deplasării (*t≡x*) pentru condițiile inițiale x_0**=1,** v_0**=-2**

Fig. 1.2.7

1.2.2. Aplicație

Se consideră sistemul format din două corpuri de mase m_1 şi m_2 (fig. 1.2.8) legate între ele printr-un arc având constanta elastică k şi un amortizor hidraulic având coeficientul de amortizare c. Se cere să se determine *legea mişcării relative* dintre cele două corpuri ştiind că rezistența vâscoasă este proporțională cu viteza relativă: $R = -c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$ şi condițiile inițiale sunt: $\dot{x}_{20} - \dot{x}_{10} = 0$ (viteza relativă a celor două corpuri este nulă) şi $x_2 - x_1 = x_0$.

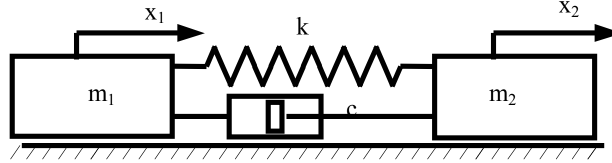


Fig. 1.2.8

Dacă se notează cu x_1 şi x_2 deplasările absolute ale celor două corpuri, măsurate dintr-o poziție când arcul este nedeformat, deplasarea relativă a celor două corpuri $x = x_2 - x_1$ ($\dot{x} = \dot{x}_2 - \dot{x}_1$) este egală cu deformația arcului. Ecuațiile diferențiale ale mişcării corpurilor sunt (fig. 1.2.10):

x1

m1

Fe=k(x2-x1)

$R = c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$

x2

Fe=k(x2-x1)

$R = c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$

m2

Fig. 1.2.9

$$m_1\ddot{x}_1 + c\dot{x} + kx = 0,$$
$$m_2\ddot{x}_2 - c\dot{x} - kx = 0. \qquad (1.2.39)$$

Înmulțind prima ecuație cu m_2 şi a doua cu m_1, prin scădere se obține:

$$m_1 m_2 \ddot{x} + (m_1 + m_2)c\dot{x} + (m_1 + m_2)kx = 0$$

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0. \qquad (1.2.40)$$

Dacă se notează: $m = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

se obține ecuația diferențială (1.2.1) a mişcării relative:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0. \qquad (1.2.41)$$

Înlocuind în expresia soluției (1.2.35) $x = e^{-nt}\left(x_0 \cos p_1 t + \dfrac{v_0 + n x_0}{p_1}\sin p_1 t\right)$

condiția inițială $v_0 = 0$ se obține:

$$x = x_0 e^{-nt}\left(\cos p_1 t + \frac{n}{p_1}\sin p_1 t\right) \qquad (1.2.42)$$

Notând: $A = x_0\sqrt{1 + \left(\dfrac{n}{p_1}\right)^2}$, $\quad tg\theta = \dfrac{n}{p_1}$, $\qquad (1.2.43)$

rezultă:

$$x = A\, e^{-nt}\, cos(p_1 t - \theta) \qquad (1.2.44)$$

Pseudopulsația a mişcării relative este:

$$p_1 = \sqrt{p^2 - n^2} = p\sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_{cr}}\right)^2}. \qquad (1.2.45)$$

unde:

$$p = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)k}{m_1 m_2}} \qquad (1.2.46)$$

$$c_{cr} = 2\sqrt{km} = 2\sqrt{\frac{k \cdot m_1 m_2}{m_1 + m_2}} \qquad (1.2.47)$$

Pentru exemplificare se consideră următoarele valori numerice ale parametrilor:

$x_0=10;\ v_0=0;\ c=1,6;\ m_1=1;\ m_2=0,25;\ k=2000.$

Înlocuind se obține:

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = 0,2;\ n = \frac{c}{2m} = 4;\ \ c_{cr} = 2\sqrt{km} = 40;\ \ p = \sqrt{\frac{k}{m}} = 100;\ \ p_1 = 99,92$$

Legea de mişcare se scrie:

$$x = 10,008\ e^{-4t}\ cos(99,92t - 0,04) \qquad (1.2.48)$$

Folosind programul MATHCAD se obține graficul deplasării relative din figura 1.2.10.

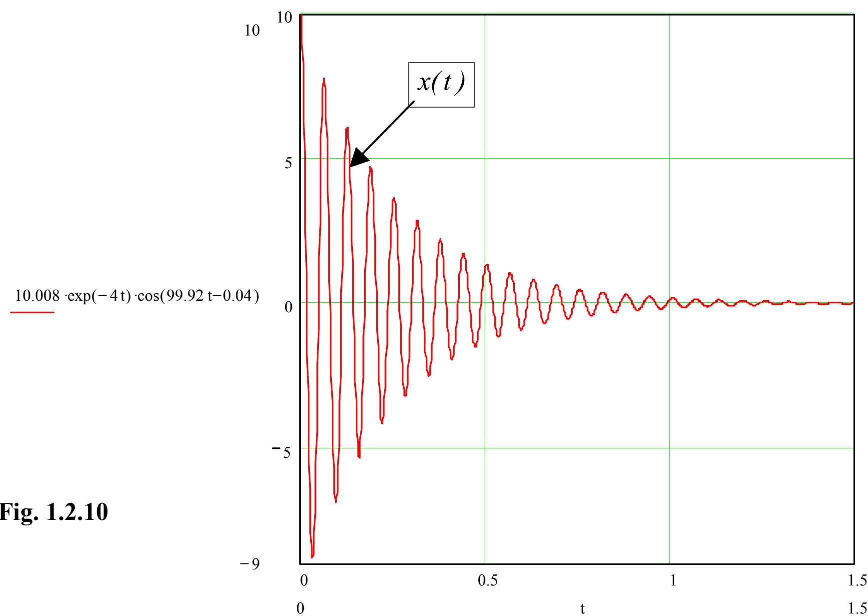


Fig. 1.2.10

1.3. Vibrații libere cu amortizare uscată

Acest tip de vibrații apar în cazul mişcărilor unui corp pe o suprafață uscată când forța rezistentă de frecare uscată este constantă şi are sens opus vitezei $R = -T \cdot sign\,\dot{x}$, unde $T = \mu mg$ este forța de fecare uscată maximă, iar $sign\,\dot{x} = \pm 1$ după cum viteza este pozitivă sau negativă (fig. 1.3.1). Condițiile la momentul inițial sunt: $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$.

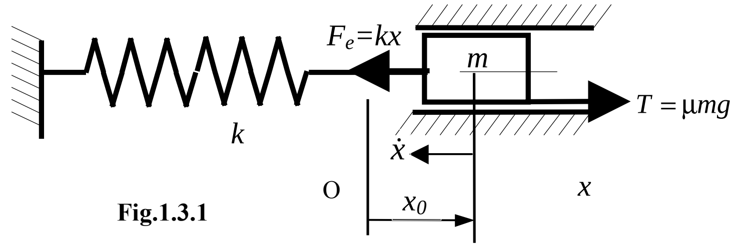


Fig.1.3.1

Pentru prima fază a mişcării corpul se deplasează spre poziția de echilibru şi cuația diferențială a mişcării se scrie:

$$m\ddot{x} = -kx + \mu mg \qquad \Leftrightarrow \qquad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = +\mu g \tag{1.3.1}$$

Se notează: $\frac{k}{m} = p^2$, unde p este pulsația proprie. (1.3.2)

Soluția ecuației diferențiale (1.3.2) este formată din suma dintre soluția ecuației diferențiale omogene şi o soluție particulară:

$$\begin{aligned} &x = A\cos pt + B\sin pt + \frac{\mu mg}{k} \\ &\dot{x} = -Ap\sin pt + Bp\cos pt \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

- Pentru prima semiperioadă $t \in \left(0, \frac{\pi}{p}\right)$, introducând condițiile inițiale

$$t = 0 \Rightarrow \quad x = x_0, \quad \dot{x} = 0 \tag{1.3.4}$$

se obține: $$\begin{cases} x_0 = A + \frac{\mu mg}{k} & \Rightarrow A = x_0 - \frac{\mu mg}{k} \\ 0 = Bp\cos pt & \Rightarrow B = 0 \end{cases} \tag{1.3.5}$$

Dacă se notează $a = \frac{\mu mg}{k}$ soluția pentru subintervalul $t \in \left(0, \frac{\pi}{p}\right)$ este:

$$\begin{cases} x = (x_0 - a)\cos pt + a \\ \dot{x} = -p(x_0 - a)\sin pt \end{cases} \tag{1.3.6}$$

După prima semiperioadă deplasarea şi viteza rezultă din (1.3.6) înlocuind :

$$t = \frac{\pi}{p} \Rightarrow \quad x = -x_0 + 2a; \quad \dot{x} = 0 \tag{1.3.7}$$

Soluția pentru următorul subinterval există dacă forța elastică este mai mare decât forța de frecare:

$$k(x_0 - 2a) > \mu mg \quad \Leftrightarrow \quad x_0 > 3a \tag{1.3.8}$$

➢ Pentru a doua semiperioadă: $t \in \left(\frac{\pi}{p}, \frac{2\pi}{p}\right)$ (1.3.9)

se schimbă numai sensul forței de frecare T şi ecuația diferențială se scrie:

$$m\ddot{x} = kx - \mu mg \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = -\mu g \tag{1.3.10}$$

soluția ecuației diferențiale este de forma:

$$\begin{cases} x = A^* \cos pt + B^* \sin pt - \dfrac{\mu mg}{k} \\ \dot{x} = -A^* p \sin pt + B^* p \cos pt \end{cases} \tag{1.3.11}$$

Înlocuind în condițiile inițiale (1.3.9): $x = -x_0 + 2a; \quad \dot{x} = 0$, se obține:

$$\begin{cases} -x_0 + 2a = -A^* - \dfrac{\mu mg}{k} \Rightarrow A^* = x_0 - 3a \\ 0 = -B^* p \Rightarrow B^* = 0 \end{cases} \tag{1.3.12}$$

Soluția pentru subintervalul : $t \in \left(\frac{\pi}{p}, \frac{2\pi}{p}\right)$ se scrie:

$$\begin{cases} x = (x_0 - 3a)\cos pt - a \\ \dot{x} = -p(x_0 - 3a)\sin pt \end{cases} \tag{1.3.13}$$

După a doua semiperioadă deplasarea şi viteza rezultă din (1.3.13) înlocuind :

$$t = \frac{\pi}{p} \Rightarrow \quad x = x_0 - 4a; \quad \dot{x} = 0 \tag{1.3.14}$$

Existența soluției rezultă din condiția ca la momentul $t = 2\pi / p$ forța elastică să fie mai mare decât forța maximă de frecare:

$$k(x_0 - 4a) > \mu mg \quad \Leftrightarrow \quad x_0 - 4a > \frac{\mu mg}{k} \quad \Rightarrow x_0 > 5a \tag{1.3.15}$$

Pentru celelalte semiperioade modul de rezolvare este similar dar condițiile inițale sunt altele (amplitudinea scade cu fiecare semiperioadă cu *2a*).

Pentru semiperioada $t \in \left((k-1)\frac{\pi}{p}, k\frac{\pi}{p}\right)$, $k \in N$ (1.3.16)

ținând seama de relațiile (1.3.7) şi (1.3.13), soluția generală se scrie:

$$\begin{cases} x = (x_0 - 2ka + a)\cos pt - (-1)^k a \\ \dot{x} = -p(x_0 - 2ka + a)\sin pt \end{cases} \tag{1.3.17}$$

Existența soluției rezultă din condiția ca la momentul $t = k\pi / p$ forța elastică să fie mai mare decât forța de frecare maximă:

$$k(x_0 - 2ka) > \mu mg \quad \Leftrightarrow \quad x_0 - 2ka > \frac{\mu mg}{k} \quad \Rightarrow x_0 > (2k+1)a \tag{1.3.18}$$

Dacă se consideră schimbarea de variabilă: $t=(k-1)\frac{\pi}{p}$, $k \in R$ soluția (1.3.17) se scrie analitic sub forma:

$$\begin{cases} x=\left(x_0-2\,int(k)\,a+a\right)cos(k-1)\pi-(-1)^k a \\ \dot{x}=-p\left(x_0-2\,int(k)\,a+a\right)sin(k-1)\pi \end{cases} \quad (1.3.19)$$

Pentru a reprezenta sub formă grafică soluția analitică obținută (1.3.19) se consideră următoarele valori numerice ale parametrilor:

$$m=0{,}1kg;\ k=1000N/m;\ \mu=0{,}1;\ g=10m/s^2;\ x_0=10mm \quad (1.3.20)$$
$$p=100;\ a=1mm$$

Soluția analitică (1.3.19) pentru aceste valori se scrie:

$$\begin{cases} x=\left(11-2\cdot ceil(k-1)\right)cos(k-1)\pi-(-1)^{ceil(k-1)} & (mm) \\ \dot{x}=-0.1\left(11-2\cdot ceil(k-1)\right)sin(k-1)\pi & (m/s) \end{cases} \quad (1.3.21)$$

unde s-a folosit funcția Mathcad: $ceil(k)=[k]+1$ (1.3.22)

Reprezentările grafice ale funcțiilor deplasare şi viteză pentru acest caz particular sunt date în figura 1.3.2. Mişcarea se opreşte atunci când forța elastică este mai mică decât forța de frecare:

$$F_e^{(k)}<\mu mg \quad \Leftrightarrow k(x_0-2ka)<\mu mg \quad \Rightarrow k>\frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{a}-1\right) \quad (1.3.23)$$

Pentru exemplul considerat numărul de semiperioade după care mişcarea încetează este dat de condiția:

$$k(x_0-2ka)<\mu mg \quad \Rightarrow k>\frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{a}-1\right)\Rightarrow k=5 \quad (1.3.24)$$

Acest lucru se observă şi din diagramele mişcării din figura 1.3.2.

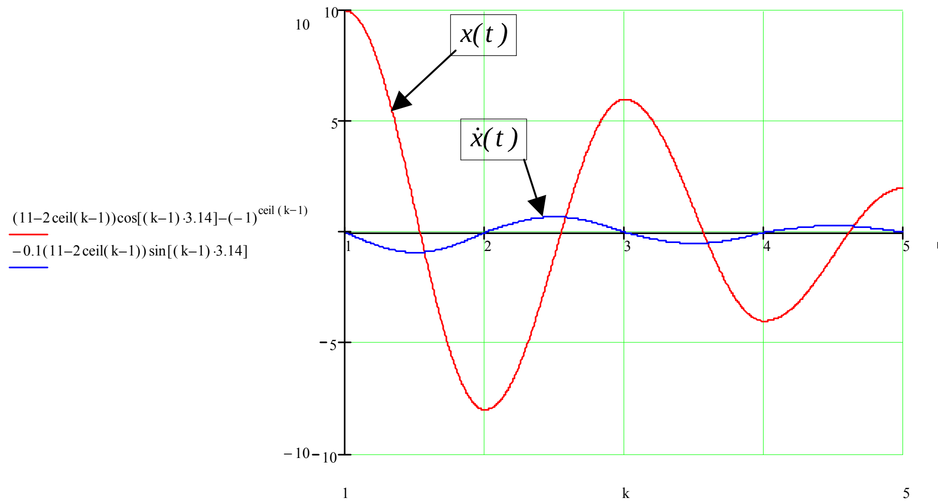


Fig. 1.3.2. Reprezentarea deplasării şi vitezei in cazul vibrațiilor cu amortizare uscată

1.4. Vibrații forțate fără amortizare sub acțiunea unei forțe armonice

Se consideră cazul particular al vibrațiilor forțate fără amortizare sub acțiunea unei forțe perturbatoare armonice: $F_p = F_0 \cos\omega t$. Modelul matematic este un sistem mecanic format dintr-un element elastic de constantă k şi un corp de masă m acționat de forța perturbatoare F_p (fig. 1.4.1). Condițiile la momentul inițial sunt: $x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0$ (1.4.1)

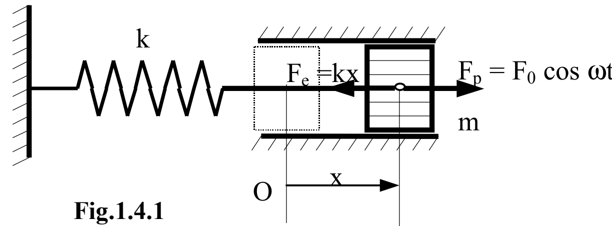


Fig.1.4.1

Ecuația fundamentală a dinamicii se scrie:

$$m\ddot{x} = -kx + F_0 \cos \omega t \tag{1.4.2}$$

Dacă se fac notațiile: $\dfrac{k}{m} = p^2, \ \dfrac{F_0}{m} = q$ (1.4.3)

relația (1.4.2)se mai poate pune sub forma:

$$\ddot{x} + p^2 x = q\cos \omega t \tag{1.4.4}$$

Ecuația diferențială (1.4.4) este liniară, neomogenă, cu coeficienți constanți. Soluția generală se compune din soluția ecuației omogene corespunzătoare la care se adaugă o soluție particulară x_p a ecuației neomogene:

$$x = A\cos pt + B\sin pt + x_p \tag{1.4.5}$$

unde soluția particulară a ecuației diferențiale neomogene este de forma:

$$x_p = C\cos \omega t \tag{1.4.6}$$

Constanta C se determină prin metoda indentificării (în ipoteza că $\omega \neq p$). Dacă se derivează (1.4.6) de două ori şi se introduce în (1.4.4) se obține:

$$-C\omega^2 \cos \omega t + p^2 C\cos \omega t = q\cos \omega t \tag{1.4.7}$$

de unde rezultă:

$$C\left(-\omega^2 + p^2\right) = q \quad \Rightarrow \quad C = \frac{q}{p^2 - \omega^2} \tag{1.4.8}$$

Constantele de integrare A şi B se determină introducând condițiile inițiale (1.4.1) în expresiile soluției şi a derivatei corespunzătoare:

$$\begin{aligned} x &= A\cos pt + B\sin pt + \frac{q}{p^2 - \omega^2}\cos \omega t \\ \dot{x} &= -Ap\sin pt + Bp\cos pt - \frac{q\omega}{p^2 - \omega^2}\sin \omega t \end{aligned} \tag{1.4.9}$$

Înlocuind rezultă:

$$\begin{cases} x_0 = A + \dfrac{q}{p^2 - \omega^2} \Rightarrow A = x_0 - \dfrac{q}{p^2 - \omega^2} \\ v_0 = Bp \Rightarrow B = \dfrac{v_0}{p} \end{cases} \quad (1.4.10)$$

Deci legea de mişcare (1.4.5) se scrie:

$$x = x_0 \cos pt + \frac{v_0}{p} \sin pt - \frac{q}{p^2 - \omega^2} \cos pt + \frac{q}{p^2 - \omega^2} \cos \omega t \quad (1.4.11)$$

Expresia legii de mişcare arată o vibrație *nearmonică* deoarece se suprapun două mişcări armonice de pulsații diferite: o vibrație proprie de pulsație p (primii trei termeni din relația 1.4.11) şi o vibrație forțată a cărei pulsație este egală cu cea a forței perturbatoare ω (ultimul termen din relația 1.4.11). În expresiile vibrațiilor de pulsație p sunt incluse atât condițiile inițiale (x_0 şi v_0) cât şi amplitudinea respectiv pulsația forței perturbatoare ($q=F_0/m$, ω). Ultimul termen corespunzător vibrației de pulsație ω este independent de condițiile inițiale.

În cazul particular $x_0=0$ şi $v_0=0$ relația (1.119) devine:

$$x = -\frac{q}{p^2 - \omega^2} \cos pt + \frac{q}{p^2 - \omega^2} \cos \omega t \quad (1.4.12)$$

Amplitudinea vibrației forțate conform legii de mişcare (1.4.11) este:

$$A = \frac{q}{p^2 - \omega^2} = \frac{\dfrac{F_0}{m}}{p^2 - \omega^2} = \frac{\dfrac{F_0}{m} \cdot \dfrac{1}{p^2}}{1 - \left(\dfrac{\omega}{p}\right)^2} = \frac{\dfrac{F_0}{m} \cdot \dfrac{m}{k}}{1 - \left(\dfrac{\omega}{p}\right)^2}$$

$$A = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{1 - \left(\dfrac{\omega}{p}\right)^2} \quad (1.4.13)$$

Se notează cu $\dfrac{F_0}{k} = A_0$ deformația statică a sistemului elastic sub acțiunea unei forțe având valoarea amplitudinii a forței perturbatoare F_0.

Se defineşte *factorul de amplificare* ξ astfel:

$$\xi = \left|\frac{A}{x_{st}}\right| = \frac{1}{\left|1 - \eta^2\right|}; \quad unde: \eta = \frac{\omega}{p} \quad (1.4.14)$$

Reprezentarea grafică a acestei funcții de η reprezintă *curba de rezonanță* sau *curbă răspuns în frecvențe* a sistemului şi este reprezentată în fig1.4.2.

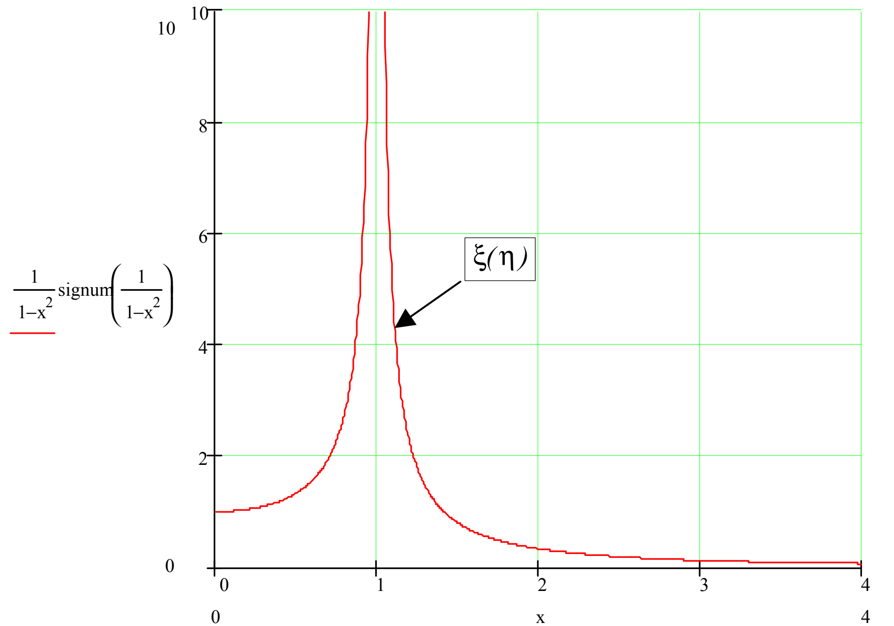


Fig. 1.4.2. Variația factorului de amplificare ξ cu pulsația relativă η($x \equiv \eta$)

1.4.1. Fenomenul de rezonanță

Se observă că pentru $\omega = p$ are loc fenomenul de rezonanță care produce amplitudini infinite ale vibrațiilor. Practic însă amplitudinile nu ating valori infinite, ci se produc deformații foarte mari care pot duce la deteriorarea pieselor aflate în rezonanță. Dacă în expresia (1.4.12) se trece la limită ($\omega \to p$) apare o nedeterminare de forma ($\frac{0}{0}$). Pentru a rdica nedeterminarea aplicăm regula lui l'Hospital, astfel:

$$x_R = \lim_{\omega \to p}\left(q \cdot \frac{\cos \omega t - \cos pt}{p^2 - \omega^2}\right) = \lim_{\omega \to p}\left(q \cdot \frac{t \sin \omega t}{2\omega}\right) = \frac{qt}{2p} \sin pt \qquad (1.4.17)$$

Se obține astfel o amplitudine modulată de o funcție liniară de timp .

În cazul rezonanței mişcarea armonică modulată în amplitudine este defazată în urma forței perturbatoare cu $\pi/2$ (în cuadratura cu aceasta). Într-adevăr expresia (1.4.17) se mai scrie:

$$x_R = \frac{qt}{2p} \sin pt = \frac{qt}{2p} \cos\left(pt - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (1.4.18)$$

În fig. 1.4.3 s-a reprezentat cu ajutorul programului Mathcad funcția $x_R = f(t) = \frac{qt}{2p} \sin pt$ pentru valorile particulare ale parametrilor $p=20$ şi $q=800$.

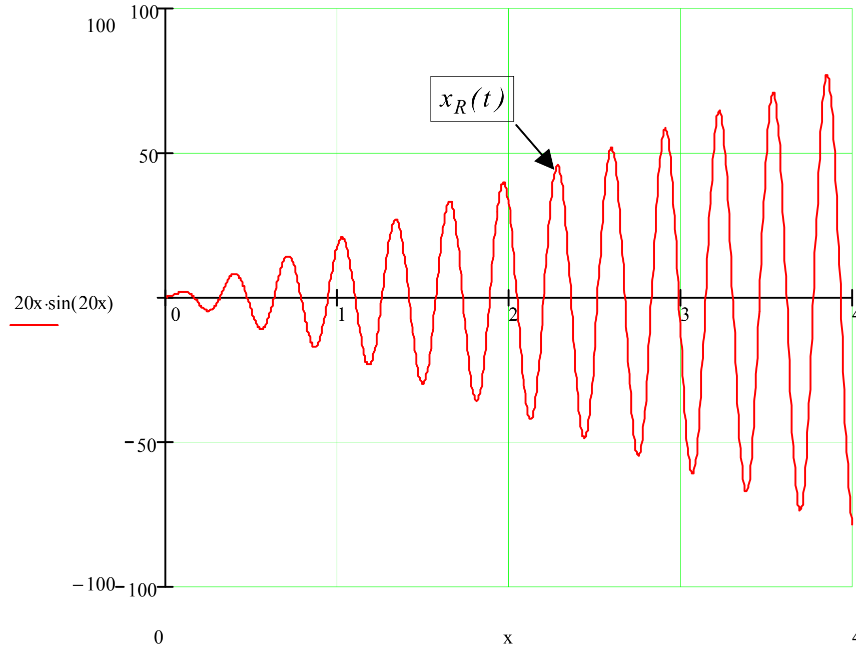


Fig. 1.4.3. Variația amplitudinii în timp pentru rezonanță (x≡t)

1.4.2. Fenomenul bătăilor

Acest fenomen apare în cazul vibrațiilor forțate neamortizate sau amortizare mică astfel încât se poate neglija, numai atunci când pulsația forței perturbatoare este foarte apropiată de pulsația proprie, în apropierea punctului de rezonanță.

Se notează $\omega - p = 2\varepsilon$ ($\varepsilon <<$). Dacă în relația (1.4.12) se aproximează $p/\omega \cong 1$ *si* $p + \omega \cong 2\omega$ se obține:

$$x = \frac{q}{p^2 - \omega^2}\left(\cos\omega t - \cos pt\right) = \frac{2q}{p^2 - \omega^2} \sin\left(\frac{\omega - p}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega + p}{2}t\right) \qquad (1.4.19)$$

$$\Rightarrow x = \left(\frac{q}{\omega\varepsilon} \cdot \sin\varepsilon t\right) \cdot \sin\omega t \qquad (1.4.20)$$

Se obține astfel o vibrație de pulsație ω modulată în amplitudine cu funcția armonică de pulsație:

$$A(t) = \frac{q}{\omega\varepsilon}\sin\varepsilon t \qquad (1.4.22)$$

Fenomenul bătăilor reprezintă o variație periodică a amplitudinii vibrației atunci când frecvența forței perturbatoare are valori în jurul frecvenței de rezonanță: $\omega = p + 2\varepsilon$.

În figura 1.4.4 s-a reprezentat cu ajutorul programului Mathcad funcția $x(t)=\left(\frac{q}{\omega\varepsilon}\sin\varepsilon t\right)\cdot\sin\omega t$ pentru valorile $q=100$, $\varepsilon=0.5$ şi $\omega=10$.

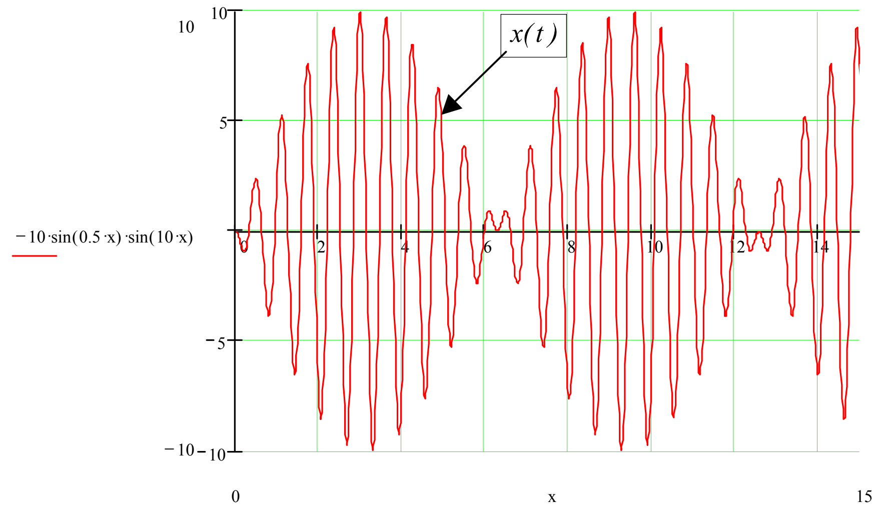


Fig. 1.4.4. Variația amplitudinii vibrațiilor în timpul fenomenlui de bătăti (t≡x)

1.4.3. Fenomenul de anterezonanță

Acest fenomen apare în cazul vibrațiilor forțate neamortizate când $\omega << p$ adică înainte de fenomenul de rezonanță.

În cazul particular $x_0=0$ şi $v_0=0$ relația (1.120) se scrie:

$$x=-\frac{q}{p^2-\omega^2}(\cos pt-\cos\omega t)=-\frac{2q}{p^2-\omega^2}\sin\left(\frac{p-\omega}{2}t\right)\sin\left(\frac{p+\omega}{2}t\right) \qquad (1.4.23)$$

S-a obținut astfel o mişcare de pulsație $\frac{p+\omega}{2}$ modulată în amplitudine de o funcție armonică de pulsație mai mică $(p-\omega)/2$.

Pentru următoarele valori $q=112$, $p=15$, $\omega=1$ se obține cu ajutorul programului MATHCAD graficul din figura 1.4.5. Pentru următoarele valori ale parametrilor corespunzători condițiilor inițiale:

$$x_0=\frac{q}{p^2-\omega^2};\quad v_0=0 \qquad (1.4.24)$$

relația (1.4.11) devine ecuația vibrațiilor staționare:

$$x=\frac{q}{p^2-\omega^2}\cos\omega t \qquad (1.4.25)$$

Se observă în acest caz că mişcarea este în fază cu forța perturbatoare

$$F=mq\cdot\cos\omega t \qquad (1.4.26)$$

În figura 1.4.5 s-a reprezentat cu ajutorul programului Mathcad funcția (1.4.23) pentru valorile particulare $q=112$, $p=15$ şi $\omega=1$

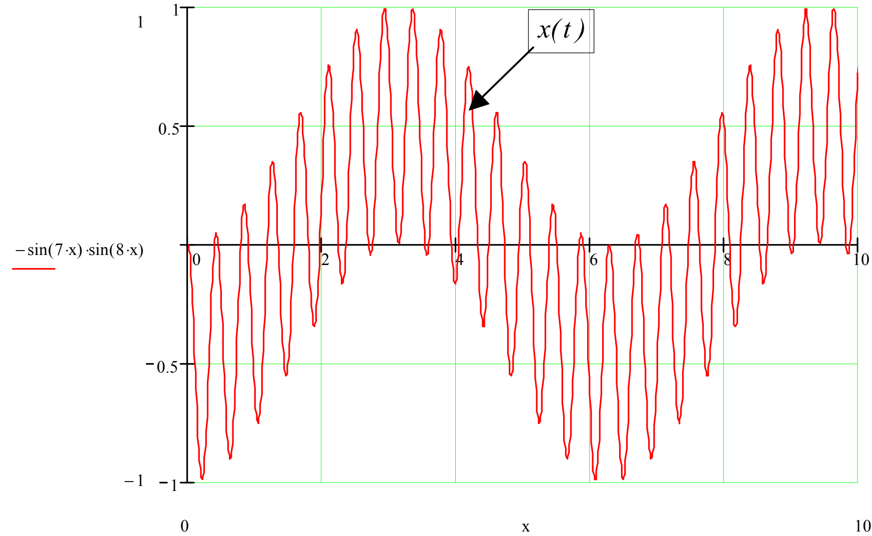


Fig. 1.4.5. Variația amplitudinii la anterezonanță (t≡x).

1.4.4. Fenomenul de postrezonanță

Acest fenomen apare când $\omega >> p$ în cazul vibrațiilor forțate neamortizate adică înainte de fenomenul de rezonanță.

În cazul particular $x_0=0$ şi $v_0=0$ relația (1.4.12) se scrie:

$$x=-\frac{q}{\omega^2-p^2}(\cos\omega t-\cos pt)=-\frac{2q}{\omega^2-p^2}\sin\left(\frac{\omega-p}{2}t\right)\sin\left(\frac{p+\omega}{2}t\right) \qquad (1.4.27)$$

S-a obținut astfel o mişcare de pulsație $(p+\omega)/2$ modulată în amplitudine de o funcție armonică de pulsație $(\omega-p)/2$. Pentru următoarele valori ale parametrilor corespunzători condițiilor inițiale:

$$x_0=\frac{q}{p^2-\omega^2};\quad v_0=0 \qquad (1.4.28)$$

relația (1.4.11) devine ecuația vibrațiilor staționare:

$$x=-\frac{q}{\omega^2-p^2}\cos\omega t=\frac{q}{\omega^2-p^2}\cos(\omega t-\pi) \qquad (1.4.29)$$

Se observă în acest caz că mişcarea este în opoziție de fază cu forța perturbatoare:

$$F=mq\cdot\cos\omega t \qquad (1.4.30)$$

În figura 1.4.6 s-a reprezentat cu ajutorul programului MATHCAD funcția (1.4.23) pentru valorile particulare $q=1200$, $p=2$ şi $\omega=22$

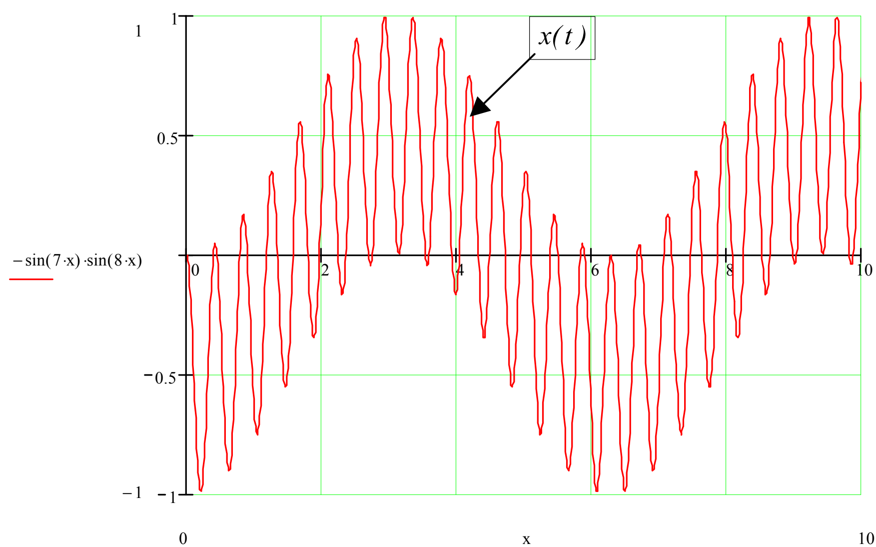


Fig. 1.4.6. Variația amplitudinii la postrezonanță (t≡x).

1.5. Vibrații forțate cu amortizare vâscoasă sub acțiunea unei forțe armonice

Se consideră cazul vibrațiilor forțate amortizate produse de o forță perturbatoare armonică: $F_p = F_0 \cos \omega t$. Modelul matematic este prezentat în figura 1.5.1, şi este format dintr-un corp de masă m acționat de o forță perturbatoare armonică $F_p = F_0 \cos \omega t$, un element elastic de constantă k, un element de amortizare vâscoasă ce produce o forța rezistentă proporțională cu viteza $\overline{R} = -c\overline{v}$, ($c$ este coeficientul de amortizare vâscoasă).

Condițiile la momentul inițial sunt:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \tag{1.5.1}$$

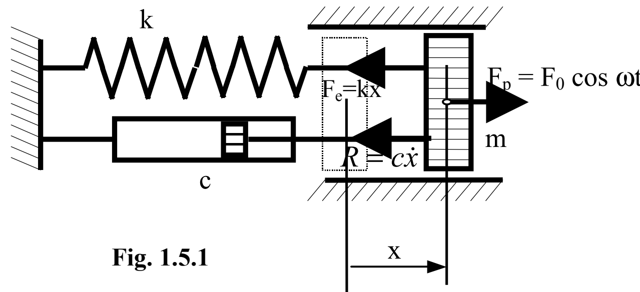


Fig. 1.5.1

Ecuația fundamentală a dinamicii se scrie:

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + F_0 \cos \omega t \tag{1.5.2}$$

Dacă se fac notațiile: $\frac{k}{m} = p^2, \frac{c}{m} = 2n, \quad \frac{F_0}{m} = q$ (1.5.3)

ecuația diferențială (1.5.2) se mai poate pune sub forma:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2 x = q \cos \omega t \tag{1.5.4}$$

Ecuația diferențială (1.5.4) este liniară, neomogenă, cu coeficienți constanți.

a. *Soluția ecuației omogene* x_{om} corespunzătoare pentru domeniul subcritic ($c < c_{cr}$) este o vibrație amortizată pseudoperiodică de forma:

$$x_{om} = e^{-nt}\left(A \cos p_1 t + B \sin p_1 t\right); \quad p_1 = \sqrt{p^2 - n^2} \tag{1.5.5}$$

b. *Soluția ecuației omogene* x_{om} corespunzătoare domeniului supracritic ($c > c_{cr}$) este o mişcare aperiodică de forma:

$$x_{om} = e^{-nt}(A\, sh\lambda t + B\, ch\lambda t), \qquad \lambda = \sqrt{n^2 - p^2} \tag{1.5.6}$$

În primul caz soluția generală se compune din soluția ecuației omogene corespunzătoare la care se adaugă o soluție particulară x_p a ecuației neomogene:

$$x = e^{-\alpha t}\left(A \cos \beta t + B \sin \beta t\right) + x_p \tag{1.5.7}$$

Soluția particulară a ecuației diferențiale neomogene este de forma:

$$x_p = D \sin \omega t + E \cos \omega t \tag{1.5.8}$$

Constantele D şi E se determină prin metoda indentificării. Se derivează de două ori soluția particulară (1.5.8) şi se obține:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= \omega(D\cos\omega t - E\sin\omega t) \\ \ddot{x}_p &= -\omega^2(D\sin\omega t + E\cos\omega t) \end{aligned} \tag{1.5.9}$$

care introduse în (1.5.4) conduce la:

$$\begin{aligned} -\omega^2(D\sin\omega t + E\cos\omega t) + 2n\omega(D\cos\omega t - E\sin\omega t) + \\ + p^2(D\sin\omega t + E\cos\omega t) = q\cos\omega t \end{aligned} \tag{1.5.10}$$

Prin identificarea celor doi membrii ai relației (1.5.10) rezultă:

$$\begin{cases} D(p^2-\omega^2) - 2En\omega = 0 \\ 2Dn\omega + E(p^2-\omega^2) = q \end{cases} \tag{1.5.11}$$

de unde se obțin constantele D și E:

$$\begin{aligned} D &= \frac{2n\omega q}{(p^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2 n^2} \\ E &= \frac{(p^2-\omega^2)q}{(p^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2 n^2} \end{aligned} \tag{1.5.12}$$

Soluția particulară este independentă de condițiile inițiale și are expresia:

$$x_p = \frac{2n\omega q}{(p^2-\omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}\sin\omega t + \frac{(p^2-\omega^2)q}{(p^2-\omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}\cos\omega t \tag{1.5.13}$$

care mai poate fi scrisă sub forma: $x_p = C\cos(\omega t - \theta)$ (1.5.14)

unde:

$$\begin{cases} C = \sqrt{D^2+E^2} = \dfrac{q}{\sqrt{(p^2-\omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} \\ tg\theta = \dfrac{D}{E} = \dfrac{2n\omega}{p^2-\omega^2} \end{cases} \tag{1.5.15}$$

Expresia soluției generale (1.5.7) și a derivatei ei se scrie:

$$\begin{aligned} x &= e^{-nt}(A\cos p_1 t + B\sin p_1 t) + \frac{2n\omega q}{(p^2-\omega^2)^2+4\omega^2 n^2}\sin\omega t + \frac{(p^2-\omega^2)q}{(p^2-\omega^2)^2+4\omega^2 n^2}\cos\omega t \\ \dot{x} &= e^{-nt}(-nA\cos p_1 t - nB\sin p_1 t - Ap_1\sin p_1 t + Bp_1\cos p_1 t) + \\ &+ \frac{2n\omega^2 q}{(p^2-\omega^2)^2+4\omega^2 n^2}\cos\omega t - \frac{\omega(p^2-\omega^2)q}{(p^2-\omega^2)^2+4\omega^2 n^2}\sin\omega t \end{aligned} \tag{1.5.16}$$

Introducând condițiile inițiale (1.5.1) în (1.5.16) se obține:

$$\begin{cases} x_0 = A + \dfrac{q(p^2-\omega^2)}{(p^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2 n^2} \\ v_0 = -nA + p_1 B + \dfrac{2n\omega^2 q}{(p^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2 n^2} \end{cases} \tag{1.5.17}$$

rezultă constantele de integrare *A* şi *B*:

$$\begin{cases} A = x_0 - \dfrac{q(p^2-\omega^2)}{(p^2-\omega^2)^2+4\omega^2 n^2} \\ B = \dfrac{v_0+nx_0}{p_1} - \dfrac{n}{p_1}\dfrac{(\omega^2+p^2)q}{(p^2-\omega^2)^2+4\omega^2 n^2} \end{cases} \tag{1.5.18}$$

Prin urmare, mişcarea sistemului este caracterizată de legea:

$$x = e^{-nt}\left(x_0 \cos p_1 t + \frac{v_0+nx_0}{p_1}\sin p_1 t \right) -$$
$$-\frac{qe^{-nt}}{(p^2-\omega^2)^2+4\omega^2 n^2}\left((p^2-\omega^2)\cos p_1 t + \frac{n}{p_1}(p^2+\omega^2)\sin p_1 t \right) \tag{1.5.19}$$
$$+\frac{2n\omega^2 q}{(p^2-\omega^2)^2+4\omega^2 n^2}\cos\omega t + \frac{\omega(p^2-\omega^2)q}{(p^2-\omega^2)^2+4\omega^2 n^2}\sin\omega t$$

Ecuația (1.5.19) arată faptul că legea de mişcare a corpului se obține prin însumarea următoarelor trei legi de mişcare:

- o vibrație de pseudopulsație p_1 datorată condițiilor inițiale
- o vibrație de pseudopulsație p_1 datorată forței perturbatoare
- o vibrație staționară având aceeaşi pulsație ω cu a forței perturbatoare

Se constată că într-o primă fază a mişcării vibrația proprie şi vibrația întreținută coexistă. Această fază se numeşte *regim tranzitoriu.* În a doua fază a mişcării, vibrația proprie se amortizează (datorită factorului e^{-nt}) şi sistemul vibrează numai cu pulsația forței perturbatoare *ω*. Această fază se numeşte *regim permanent sau staționar.*

Problema determinării soluției vibrației staționare în cazul de mai sus se mai poate rezolva utilizând calculul complex. Ecuația complexă asociată mişcării cu amortizare vâscoasă se scrie asociind o ecuație similară ecuației (1.5.4):

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2 x = q\cos\omega t \\ &\ddot{y} + 2n\dot{y} + p^2 y = q\sin\omega t \quad \Big| i \end{aligned} \tag{1.5.20}$$

Însumând rezultă:

$$\begin{aligned} &\ddot{z} + 2n\dot{z} + z = qe^{i\omega t}; \\ &unde: \ z = x + iy \quad si \quad e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t \end{aligned} \tag{1.5.21}$$

unde x şi y reprezintă soluțiile ecuațiilor diferențiale conjugate:

Soluția staționară a ecuației (1.5.21) si derivatele ei sunt de forma:

$$\begin{aligned} &z_{st} = Ae^{i(\omega t-\varphi)} = Ae^{-i\varphi}e^{i\omega t} = \widetilde{A}e^{i\omega t}; \\ &\dot{z}_{st} = i\omega\widetilde{A}e^{i\omega t}; \\ &\ddot{z}_{st} = -\omega^2\widetilde{A}e^{i\omega t}. \end{aligned} \tag{1.5.22}$$

Introducând în ecuația (1.5.21) se obține *amplitudinea complexă* a mişcării staționare $\widetilde{A}$:

$$-\omega^2 A e^{i\omega t} + 2n \cdot i\omega A e^{i\omega t} + p^2 A e^{i\omega t} = q e^{i\omega t}$$

$$\widetilde{A}\left(p^2 - \omega^2 + 2n\omega i\right) = q \tag{1.5.23}$$

$$\Rightarrow \widetilde{A} = \frac{q}{p^2 - \omega^2 + 2n\omega i}$$

rezultă soluția staționară complexă:

$$z_{st} = \widetilde{A} e^{i\omega t} = \frac{q}{p^2 - \omega^2 + 2n\omega i} e^{i\omega t} \tag{1.5.24}$$

Soluția staționară reală se scrie:

$$x = \frac{q}{\left(p^2 - \omega^2\right)^2 + (2n\omega)^2}\left[\left(p^2 - \omega^2\right)\cos\omega t + (2n\omega)\sin\omega t\right] \tag{1.5.25}$$

sau : $\qquad x = A \cdot \cos(\omega t - \theta)$;

$$\text{unde: } A = \frac{q}{\sqrt{\left(p^2 - \omega^2\right)^2 + (2n\omega)^2}}; \quad tg\theta = \frac{2n\omega}{p^2 - \omega^2} \tag{1.5.26}$$

este amplitudinea respective faza mişcării staționare este:
Se obține astfel aceeaşi ecuație a mişcării (1.5.14).

Pentru exemplificare se consideră o vibrație forțată cu următoarele valori particulare ale parametrilor: $x_0 = 0;\ v_0 = 0;\ p = 41;\ \omega = 6;\ \alpha = 9;\ q = 4194$. Introducând în relația (1.5.19) se obține ecuația mişcării:

$$x = e^{-9t}(2.53858 \cdot \cos 40t + 0.6118 \cdot \sin 40t) + \cos 6t + 15.23 \sin 6t$$

Reprezentarea grafică cu ajutorul programului MATHCAD a soluției generale (1.5.25) cât şi a soluției staționare corespunzătoare: $x_{st} = \cos 6t + 15.23 \sin 6t$ este dată în figura 1.5.2. Se observă din aceste grafice că soluția generală se obține prin suprapunerea soluției staționare cu soluția vibrațiilor proprii.

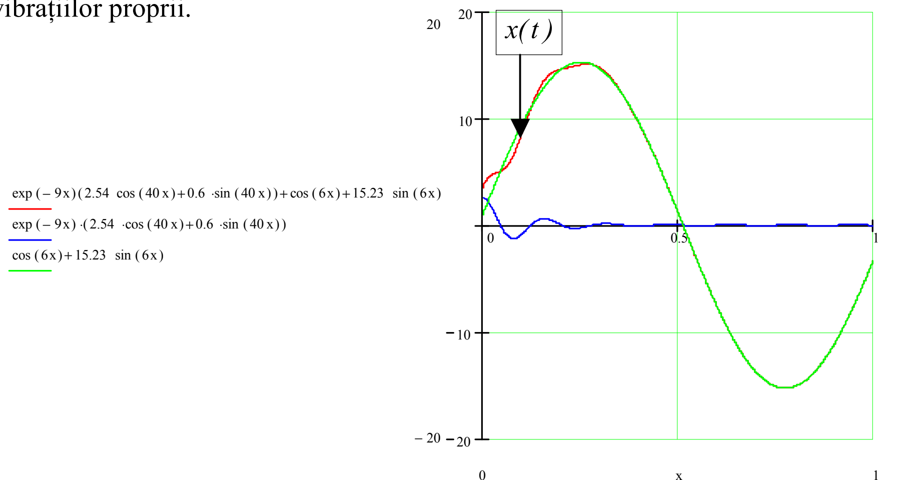


Fig. 1.5.2. Variația amplitudinii viratiilor forțate cu amortizare vâscoasă ($t \equiv x$).

Amplitudinea mișcării staționare conform (1.5.24) se mai scrie :

$$A=\frac{\dfrac{q}{p^2}}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega^2}{p^2}\right)^2+4\dfrac{n^2}{p^2}\cdot\dfrac{\omega^2}{p^2}}}=\frac{A_0}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega^2}{p^2}\right)^2+4\dfrac{n^2}{p^2}\cdot\dfrac{\omega^2}{p^2}}} \qquad (1.5.27)$$

Raportul dintre amplitudinea mișcării A și deformația statică a arcului sub acțiunea unei forțe egală cu amplitudinea forței perturbatoare A_0:

$A_0=\dfrac{F_0}{k}=\dfrac{q}{p^2}$; $\xi=\dfrac{A}{A_0}$ se numește *factor de amplificare.*

Ținând seama de definiția factorului de amortizare: $\dfrac{n}{p}=\dfrac{c}{c_{cr}}=\zeta$ factorul de amplificare ξ se scrie funcție de pulsația relativă $\dfrac{\omega}{p}=\eta$ sub forma:

$$\xi(\eta)=\frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+4\zeta^2\eta^2}} \qquad (1.5.28)$$

Reprezentând grafic factorul de amplificare ξ pentru valorile particulare ale parametrilor: $x_0=0$; $v_0=0$; $p=41$; $q=4194$ pentru $n=9$ precum și pentru $n=\dfrac{p}{\sqrt{2}}\cong 29$ se obțin curbele de răspuns în frecvențe din figura 1.5.3.

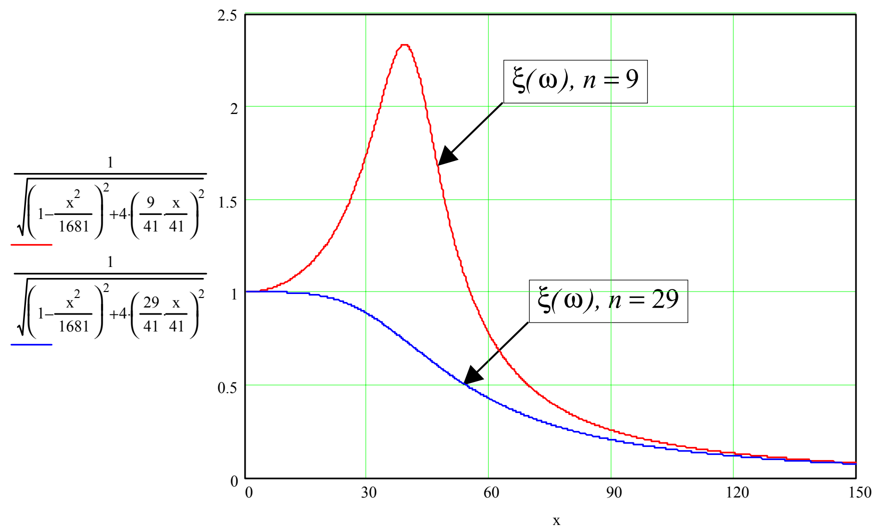


Fig.1.5.3. Variația factorului de amplificare cu pulsația pentru două alori ale factorului de amortizare ($\omega\equiv x$).

Amplitudinea maximă se obține pentru o valoare a pulsației ω în jurul valorii de rezonanță (coincide cu aceasta numai pentru $\alpha=0$). Pentru a găsi valoarea acestei pulsații (ω_m) se anulează derivata funcției amplitudine :

$$A(\omega)=\frac{q}{\sqrt{\left(p^2-\omega^2\right)^2+4n^2\omega^2}} \tag{1.5.29}$$

$$A'(\omega)=-q\frac{\dfrac{-4\omega\left(p^2-\omega^2\right)+4n^2 2\omega}{2\sqrt{\left(p^2-\omega^2\right)^2+4n^2\omega^2}}}{\left(p^2-\omega^2\right)^2+4n^2\omega^2}=-\frac{-2q\omega\left(\omega^2-p^2+2n^2\right)}{\left[\sqrt{\left(p^2-\omega^2\right)^2+4n^2\omega^2}\right]^3}=0 \tag{1.5.30}$$

rezultă:

$$\omega_m=\sqrt{p^2-2n^2} \quad sau \quad \left(\frac{\omega}{p}\right)_m=\sqrt{1-2\zeta^2} \tag{1.5.31}$$

Se observă că expresia (1.5.31) are sens numai dacă:

$$\zeta=\frac{n}{p}\le\frac{1}{\sqrt{2}}\cong 0{,}707 \tag{1.5.32}$$

Pentru $0.707\le\dfrac{n}{p}\le 1$ amplitudinea nu mai admite maxim (fig.1.5.3).

În figura 1.5.4 este reprezentată variația factorului de amplificare :

$$\xi(\eta)=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2+4\zeta^2\eta^2}}; \quad \eta=\frac{\omega}{p} \tag{1.5.33}$$

pentru patru valori ale factorului de amortizare: ζ=0.112; 0.353; 0.500 şi 0.707

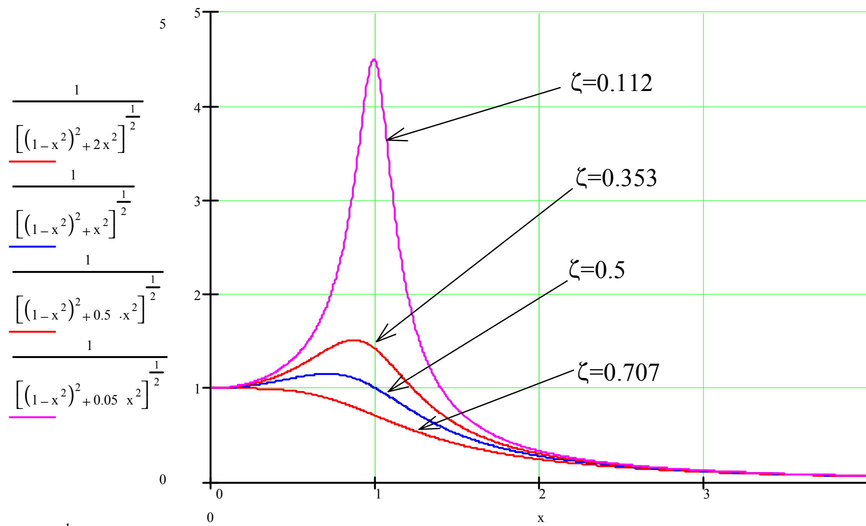


Fig.1.5.4. Variația factorului de amplificare cu pulsația relativă pentru patru valori ale factorului de amortizare (x≡η)

Înlocuind în expresia (1.5.33) valoarea η_m se obține factorul de amplificare maxim:

$$\xi_m = \frac{p^2}{2n\sqrt{p^2 - n^2}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad (1.5.34)$$

În figura 1.5.5 este reprezentată variația factorului de amplificare maxim ξ_m în funcție de factorul de amortizare ζ

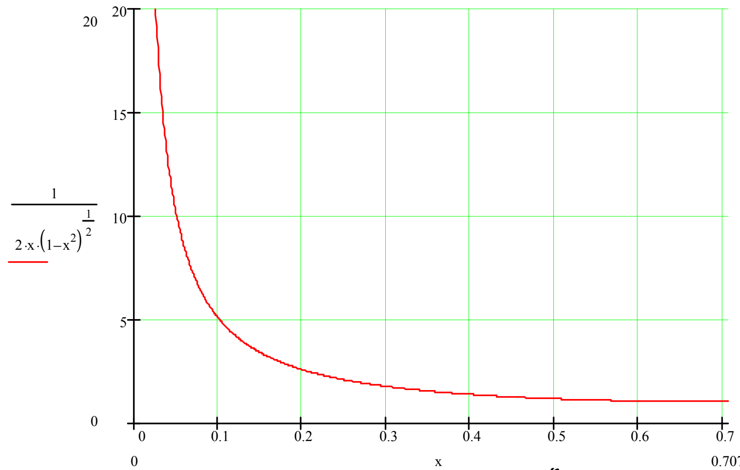


Fig.1.5.5. Variația factorului de amplificare maxim ξ_m cu amortizarea (x≡ζ)

Unghiul de defazaj al deplasării în raport cu forța de excitație conform relației (1.5.25) în funcție de pulsația relativă și factorul de amortizare se scrie:

$$\theta = arctg\frac{2\zeta\eta}{1-\eta^2} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = arccos\frac{1-\eta^2}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + (2\zeta\eta)^2}} \qquad (1.5.35)$$

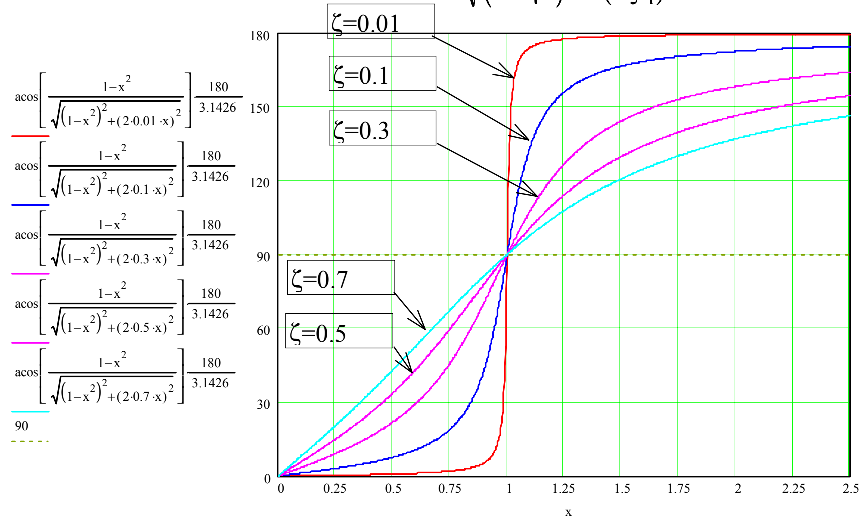


Fig.1.5.6. Variația defazajului cu pulsația relativă pentru diferite valori ale factorului de amortizare ζ(x≡η)

1.6. Vibrații forțate cu amortizare vâscoasă sub acțiunea unor forțe de inerție rotitoare

Se consideră un motor electric montat pe o placă legată de fundație prin intermediul a două arcuri de constantă $k/2$ şi un amortizor hidraulic (forța de amortizare vâscoasă fiind proporțională cu viteza $\overline{R} = -c\overline{v}$) având rotorul de masă m_0 dezaxat cu excentricitatea e (fig. 1.6.1) care se roteşte cu viteza unghiulară constantă $\omega=2\pi n$. Masa totală a sistemului (motor şi placă de fixare) este $m=m_1+m_0$. Să se studieze variația amplitudinii vibrațiilor forțate în funcție de ω şi de factorul de amortizare ζ.

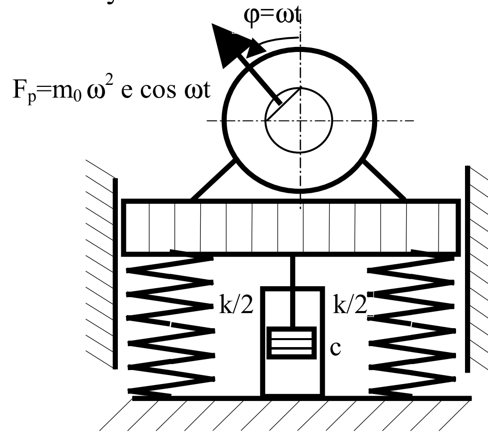


Fig.1.6.1

Forța centrifugă care acționează asupra sistemului este dată de:

$$F_p = m_0\,\omega^2\, e\, cos\ \omega t \tag{1.6.1}$$

Ecuația fundamentală a dinamicii în acest caz se scrie:

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + m_0\omega^2 e\, cos\ \omega t \tag{1.6.2}$$

Dacă se fac notațiile: $\frac{k}{m} = p^2, \frac{c}{m} = 2n,\ \frac{m_0}{m}e = r$, ecuația diferențială (1.6.2) se scrie sub forma:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2 x = r\omega^2 cos\,\omega t \tag{1.6.3}$$

Soluția staționară a acestei ecuații se scrie:

$$x = \frac{r\omega^2}{\sqrt{\left(p^2 - \omega^2\right)^2 + 4n^2\omega^2}} cos(\omega t - \theta)\,;\quad tg\theta = \frac{2n\omega}{p^2 - \omega^2} \tag{1.6.4}$$

Se observă că amplitudinea vibrațiilor forțate este o funcție de valoarea pulsației forței perturbatoare de forma:

$$A(\omega) = \frac{r\omega^2}{\sqrt{\left(p^2 - \omega^2\right)^2 + 4n^2\omega^2}} \tag{1.6.5}$$

Expresia amplitudinii şi factorului de amplificare a vibrațiilor forțate în funcție de $\eta = \omega / p$ şi de factorul de amortizare $\zeta = \frac{n}{p} = \frac{c}{c_{cr}}$ are forma:

$$A(\eta) = r\frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4\zeta^2\eta^2}}; \qquad \xi = \frac{A}{r} = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4\zeta^2\eta^2}} \quad (1.6.6)$$

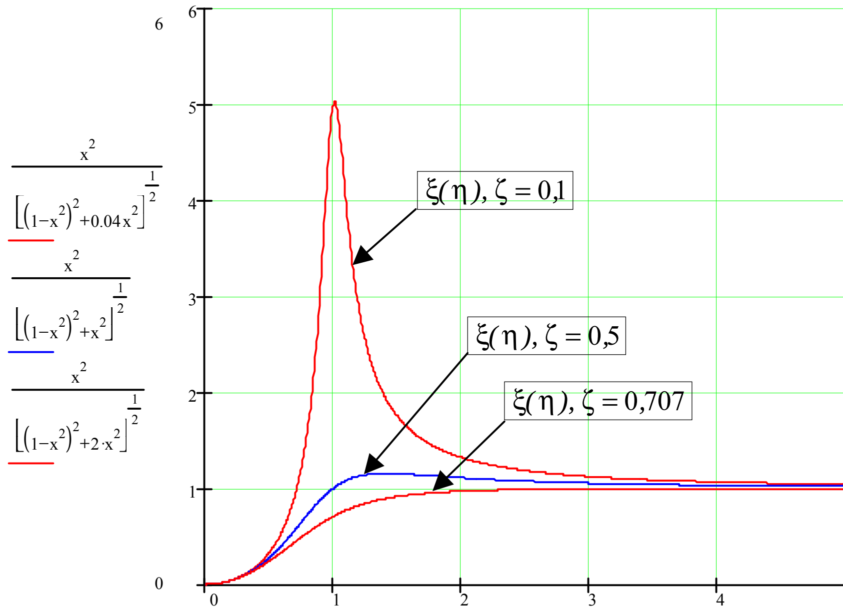


Fig. 1.6.2. Variația factorului de amplificare a amplitudinii vibrațiilor forțate cu pulsația relativă pentru diferite valori ale factorului de amortizare (x≡η)

Variațiile amplitudinii A(η) pentru trei valori ale factorului de amortizare ζ=0.1; ζ=0.5 şi ζ=0.707 , (pentru *r=1)* sunt prezentate în figura 1.6.2. Valoarea maximă a amplitudinii vibrațiilor forțate se obține prin anularea derivatei corespunzătoare:

$$A'(\omega) = r\frac{2\omega\left(p^4 - \omega^2(p^2 - 2n^2)\right)}{\left(\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}\right)^3} = 0 \quad (1.6.7)$$

rezultă valoarea pulsației pentru care amplitudinea are valoarea maximă:

$$\frac{\omega_m}{p} = \frac{p}{\sqrt{p^2 - 2n^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\zeta^2}}; \qquad \zeta = \frac{n}{p} \quad (1.6.8)$$

Expresia (1.6.8) are sens (amplitudinea admite maxim) numai dacă:

$$\zeta = \frac{n}{p} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.707\,. \quad (1.6.9)$$

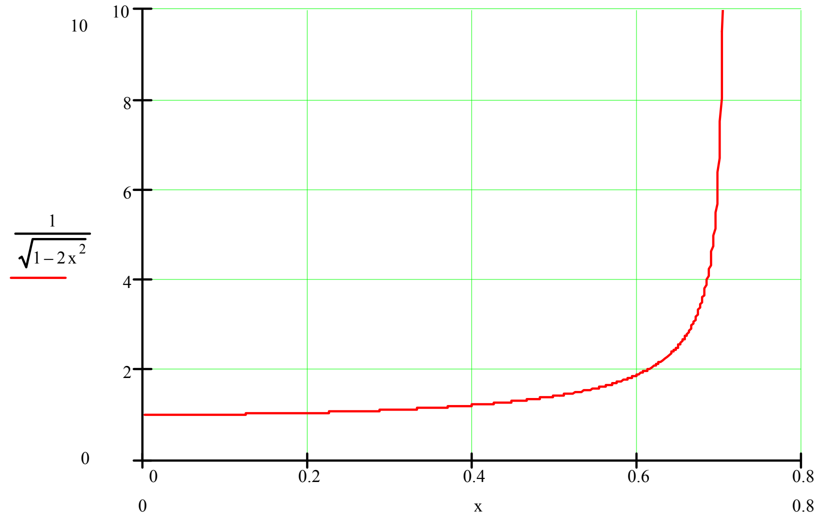


Fig.1.6.3. Variația pulsației relative ω_m/p pentru care amplitudinea este maximă cu factorul de amortizare (x≡ζ)

Înlocuind valoarea obținută pentru ω_m în expresia amplitudinii (1.6.5) se obține raportul dintre amplitudinea maximă a vibrațiilor forțate datorate forței centrifuge de inerție şi r în funcție de factorul de amortizare ζ:

$$\frac{A_m}{r} = \frac{p^2}{2n\sqrt{p^2 - n^2}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{1.6.10}$$

Reprezentarea grafică a raportului dintre amplitudinea maximă şi r a vibrațiilor pentru $r=1$ este dată în figura 1.6.4

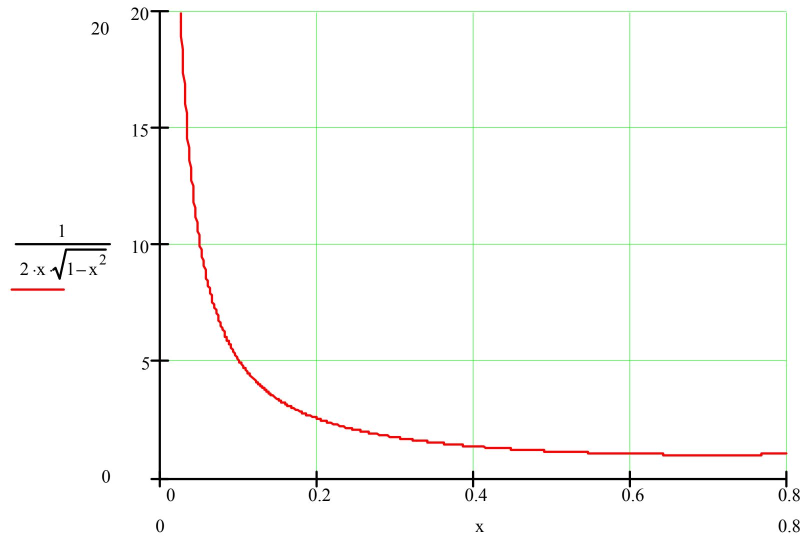


Fig.1.6.4. Variația raportului A_m /r cu factorul de amortizare ζ (x≡ζ)

1.7. Vibrații forțate parametrice cu amortizare vâscoasă (cu excitație cinematică armonică)

Se consideră sistemul mecanic din figura 1.7.1, format dintr-un corp de masă m legat prin intermediul unui arc de constantă k şi un amortizor hidraulic (forța de amortizare vâscoasă fiind proporțională cu viteza $\overline{R} = -c\overline{v}$). Capătul celălalt al amortizorului este legat la bază, iar al arcului este legat de un piston având o lege de mişcare armonică de forma: $y = r\cos\omega t$. Se va determina amplitudinea vibrațiilor staționare şi modul de variație al acesteia cu pulsația elementului perturbator şi cu factorul de amortizare.

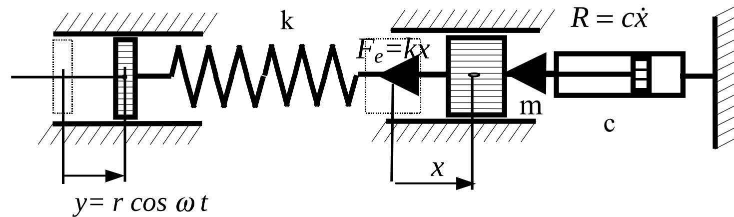


Fig.1.7.1

Ecuația fundamentală a dinamicii pentru acest caz se scrie:

$$m\ddot{x} = -k(x - y) - c\dot{x} \qquad (1.7.1)$$

dacă se fac notațiile: $\frac{k}{m} = p^2, \frac{c}{m} = 2n$, ecuația diferențială (1.7.1) se mai scrie sub forma: $\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2 x = p^2 r\cos\omega t$ (1.7.2)

Soluția staționară a acestei ecuații se scrie:

$$x = \frac{rp^2}{\sqrt{\left(p^2 - \omega^2\right)^2 + 4n^2\omega^2}}\cos(\omega t - \theta); \quad tg\theta = \frac{2n\omega}{p^2 - \omega^2} \qquad (1.7.3)$$

Amplitudinea vibrațiilor forțate este funcție de valoarea pulsației sistemului având o mişcare armonică:

$$A(\omega) = \frac{rp^2}{\sqrt{\left(p^2 - \omega^2\right)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} \qquad (1.7.4)$$

Variația raportului dintre amplitudinea A şi r în funcție de pulsația relativă $\eta = \frac{\omega}{p}$ şi de factorul de amortizare $\zeta = \frac{n}{p} = \frac{c}{c_{cr}}$ este dată de legea:

$$\xi = \frac{A(\eta)}{r} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \eta^2\right)^2 + 4\zeta^2\eta^2}} \qquad (1.7.5)$$

Reprezentarea grafică a variației factorului de amplificare (raportul dintre amplitudinea A şi r) cu pulsația relativă pentru patru valori ale factorului de amortizare ζ=0.1; 0.300; 0.500 şi ζ=0.707 este dată în figura 1.7.2.

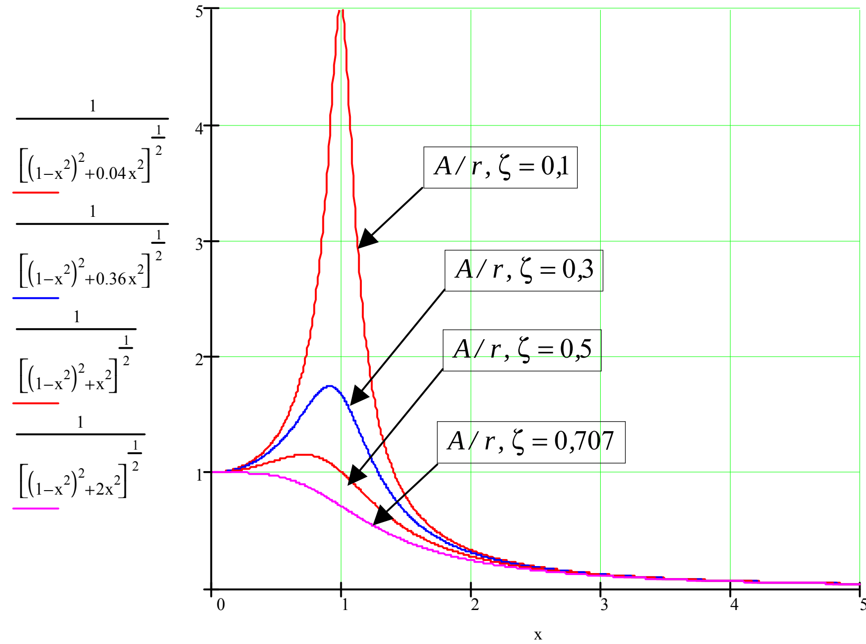


Fig.1.7.2. Variația amplitudinii cu pulsația relativă pentru patru valori ale factorului de amortizare (x≡η)

Valoarea maximă a amplitudinii se obține prin anularea derivatei :

$$A'(\omega) = -\frac{2rp^2\omega\left(\omega^2 - p^2 + 2n^2\right)}{\left(\sqrt{\left(p^2 - \omega^2\right)^2 + 4n^2\omega^2}\right)^3} = 0 \tag{1.7.6}$$

Rezultă valoarea pulsației pentru amplitudinea maximă:

$$\omega_m = \sqrt{p^2 - 2n^2} \tag{1.7.7}$$

Expresia (1.7.7) are sens numai dacă:

$$\zeta = \frac{n}{p} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.707\,. \tag{1.7.8}$$

Valoarea maximă a amplitudinii se obține înlocuind (1.7.7) în (1.7.5):

$$\frac{A_m}{r} = \frac{p^2}{2n\sqrt{p^2 - n^2}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}; \quad \zeta = \frac{n}{p} \tag{1.7.9}$$

Reprezentarea grafică a raportului dintre amplitudinea maximă și r în funcție de valorile factorului de amortizare ζ (pentru $r=1\ mm$) este dată în figura 1.7.3.

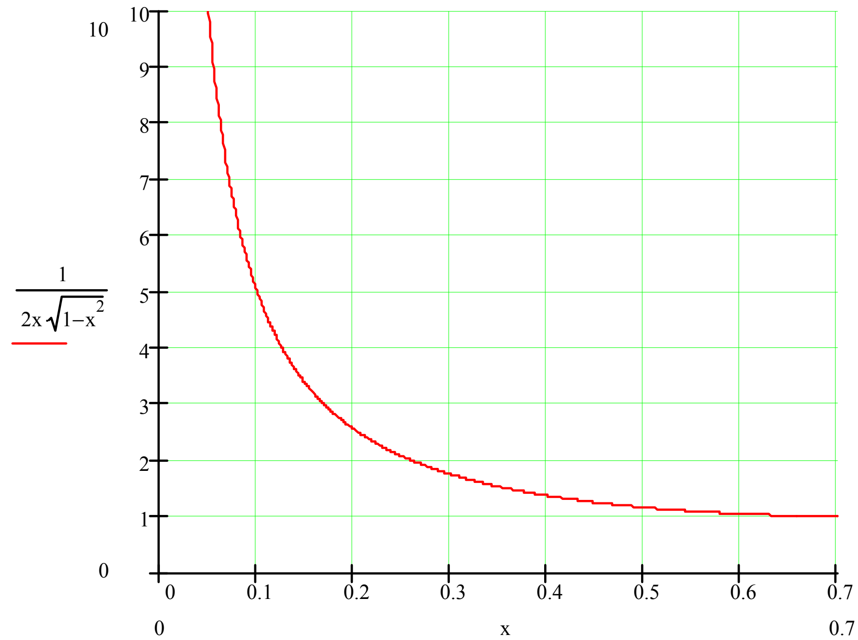


Fig.1.7.3. Variația raportului dintre amplitudinea maximă şi r cu factorul de amortizare ζ (x≡ζ)

1.8. Vibrații forțate cu amortizare histeretică sub acțiunea unor forțe armonice

Unele materiale şi structuri cu amortizare la îmbinări au proprietatea că energia disipată în timpul unui ciclu este independentă de frecvența vibrațiilor. Pentru a descrie acest mod de comportare se defineşte coeficientul de amortizare histeretică $h = c\omega$ constant, deci forța de frecare din amortizor este direct proporțională cu viteza şi invers proporțională cu pulsația: $R = \frac{h}{\omega}\dot{x}$, $c = h/\omega$.

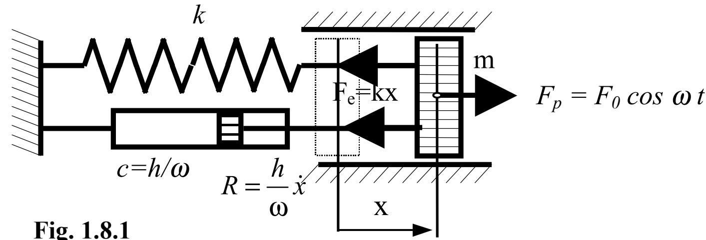


Fig. 1.8.1

Ecuația fundamentală a dinamicii se scrie:

$$m\ddot{x} = -kx - \frac{h}{\omega}\dot{x} + F_0 \cos \omega t \tag{1.8.1}$$

Ecuația complexă a unei mişcări cu amortizare histeretică se scrie:

$$\ddot{z} + \frac{h}{m\omega}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t}; \qquad z = x + iy \tag{1.8.2}$$

unde x şi y reprezintă soluțiile ecuațiilor diferențiale conjugate:

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + \frac{h}{m\omega}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos \omega t \\ &\ddot{y} + \frac{h}{m\omega}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{F_0}{m}\sin \omega t \end{aligned} \tag{1.8.3}$$

Soluția staționară a ecuației (1.8.2) si derivatele ei sunt de forma:

$$\begin{aligned} &z_{st} = Ae^{i(\omega t - \varphi)} \quad \Rightarrow \quad z_{st} = \widetilde{A}e^{i\omega t} \\ &\dot{z}_{st} = i\omega\widetilde{A}e^{i\omega t}; \qquad \ddot{z}_{st} = -\omega^2\widetilde{A}e^{i\omega t} \end{aligned} \tag{1.8.4}$$

Introducând (1.8.4) în ecuația (1.8.2) se obține:

$$\begin{aligned} &-\omega^2\widetilde{A}e^{i\omega t} + i\frac{h}{m\omega}\omega\widetilde{A}e^{i\omega t} + p^2\widetilde{A}e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t} \\ &\Rightarrow \quad \widetilde{A}\left(p^2 - \omega^2 + i\frac{h}{m}\right) = q; \qquad q = \frac{F_0}{m} \end{aligned} \tag{1.8.5}$$

Se obține *amplitudinea complexă a mişcării staționare:*

$$\widetilde{A} = \frac{q}{\left(p^2 - \omega^2\right) + i\frac{h}{m}} \tag{1.8.6}$$

şi soluția staționară complexă:

$$z_{st} = \tilde{A}e^{i\omega t} = \frac{q}{\left(p^2 - \omega^2\right) + i\dfrac{h}{m}} e^{i\omega t} \qquad (1.8.7)$$

Soluția staționară reală se scrie:

$$x = \frac{q}{\left(p^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\dfrac{h}{m}\right)^2}\left[\left(p^2 - \omega^2\right)\cos\omega t + \frac{h}{m}\sin\omega t\right]$$

sau : $\quad x = A \cdot \cos(\omega t - \theta)$; (1.8.8)

unde : $\quad tg\theta = \dfrac{h}{m\left(p^2 - \omega^2\right)}$

Amplitudinea reală a mişcării staționare este:

$$A = \frac{q}{\sqrt{\left(p^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\dfrac{h}{m}\right)^2}} \qquad (1.8.9)$$

Amplitudinea se scrie în funcție de A_0 (deformația statică a arcului cu o forță egală cu amplitudinea forței perturbatoare) şi de factorul de amplificare ξ :

$$A_0 = \frac{F_0}{k} = \frac{\dfrac{F_0}{m}}{\dfrac{k}{m}} = \frac{q}{p^2} \Rightarrow \quad A = \frac{\dfrac{q}{p^2}}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \left(\dfrac{h}{k}\right)^2}} = A_0 \cdot \xi \qquad (1.8.10)$$

Notând: $\dfrac{h}{k} = g$ coeficientul de amortizare histeretică şi $\eta = \dfrac{\omega}{p}$, expresia factorului de amplificare se scrie sub forma:

$$\xi(\eta) = \frac{A}{A_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \eta^2\right)^2 + g^2}} \qquad (1.8.11)$$

Reprezentând grafic variația factorului de amplificare pentru patru valori ale coeficientului de amortizare histeretică $(g = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}5;\ 1)$ se obțin curbele de răspuns în frecvențe din figura 1.8.2

Amplitudinea maximă se obține pentru valoarea de rezonanță $\eta=1$ indiferent de valoarea coeficientului amortizării histeretice g.

Anulând derivata expresiei (1.8.11) se obține:

$$\xi'(\eta) = \left(\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \eta^2\right)^2 + g^2}}\right)' = \frac{4\eta\left(1 - \eta^2\right)}{\left(\sqrt{\left(1 - \eta^2\right)^2 + g^2}\right)^3} = 0 \qquad (1.8.12)$$

cu soluția acceptabilă: $\eta = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_m = p$ (1.8.13)

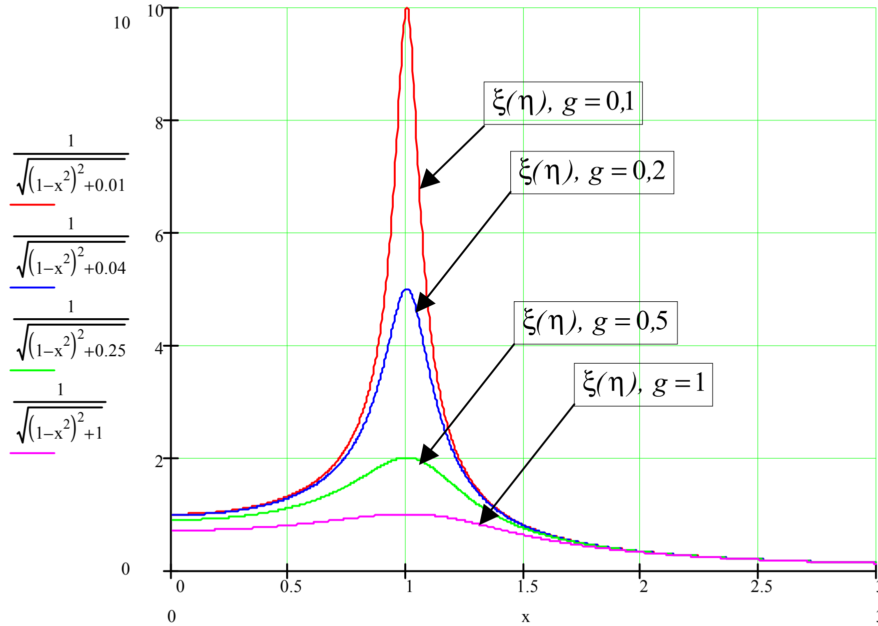


Fig.1.8.2. Variația factorului de amplificare cu pulsația relativă η pentru diferite valori ale coeficientului de amortizare histeretică (x≡η)

Înlocuind în expresia amplitudinii (1.8.10) valoarea pulsației $\omega_m = p$ se obține valoarea factorului de amplificare maxim:

$$\xi_m = 1/g \tag{1.8.14}$$

Deci inversul coeficientului de amortizare histeretică $\left(\frac{h}{k}\right)^{-1} = \frac{1}{g}$ reprezintă valoarea maximă a factorului de amplificare ξ_m.

1.9. Vibrații forțate cu amortizare histeretică sub acțiunea unor forțe de inerție rotitoare

Se consideră un motor electric montat pe o placă ce este legată de fundație prin intermediul a două arcuri de constantă *k/2* şi un amortizor cu amortizare histeretică având rotorul de masă m_0 dezaxat cu excentricitatea *e* (fig. 1.9.1) care se roteşte cu viteza unghiulară constantă $\omega=2\pi n$. Masa totală a sistemului (motor şi placă de fixare) este $m=m_1+m_0$. Se va studia variația amplitudinii vibrațiilor forțate în funcție de ω şi de coeficientul de amortizare histeretică *g*.

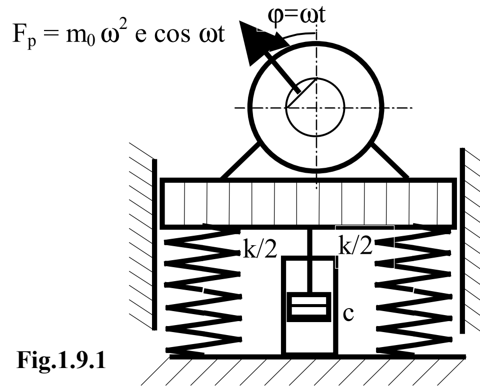


Fig.1.9.1

Forța centrifugă ce acționează asupra sistemului este:

$$F_p = m_0\,\omega^2\, e \cos \omega t \tag{1.9.1}$$

Ecuația fundamentală a dinamicii în acest caz se scrie:

$$m\ddot{x} = -kx - \frac{h}{\omega}\dot{x} + m_0\omega^2 e \cos\omega t \tag{1.9.2}$$

Dacă se fac notațiile: $\frac{k}{m} = p^2$, $\frac{m_0}{m}e = r$, ecuația diferențială (1.9.2) se scrie sub forma:

$$\ddot{x} + \frac{h}{\omega}\dot{x} + p^2 x = r\omega^2 \cos\omega t \tag{1.9.3}$$

Soluția staționară a acestei ecuații se scrie:

$$x = \frac{r\omega^2}{\sqrt{\left(p^2-\omega^2\right)^2 + \left(\frac{h}{m}\right)^2}}\cos(\omega t - \theta)\ ;\quad tg\theta = \frac{\frac{h}{m}}{p^2-\omega^2} \tag{1.9.4}$$

Amplitudinea vibrațiilor forțate este funcție de valoarea pulsației forței perturbatoare de forma:

$$A(\omega)=\frac{r\omega^2}{\sqrt{\left(p^2-\omega^2\right)^2+\left(\frac{h}{m}\right)^2}} \tag{1.9.5}$$

Variația amplitudinii şi factorului de amplificare ξ în funcție de pulsația relativă $\eta=\frac{\omega}{p}$ şi de coeficientul de amortizare histeretică $g=\frac{h}{k}$ este de forma:

$$A(\eta)=\frac{r\,\eta^2}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2+g^2}};\quad \xi=\frac{A}{r}=\frac{\eta^2}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2+g^2}} \tag{1.9.6}$$

Reprezentând grafic factorul de amplificare ξ pentru patru valori ale coeficientului de amortizare histeretică $\left(g=0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}5;\ 1\right)$ se obțin curbele de răspuns în frecvențe din figura 1.9.2.

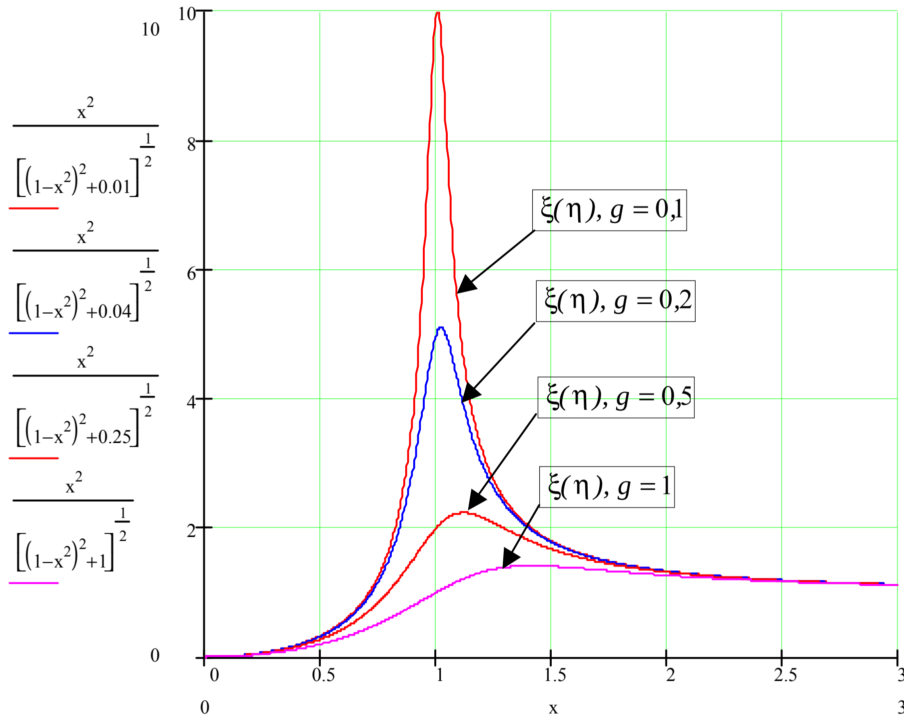


Fig. 1.9.2. Variația factorului de amplificare cu pulsația relativă pentru diferite valori ale coeficientului de amortizare histeretică (x≡η)

1.10. Vibrații forțate cu amortizare uscată

În cazul vibrațiilor forțate cu amortizare usactă energia se disipează sub formă de lucru mecanic al forțelor de frecare, care se transformă în final în altă formă de energie (căldură, deformații plastice ale microasperităților, etc). La momentul inițial corpul este scos din poziția de echilibru la distanța x_0 şi lăsat liber.

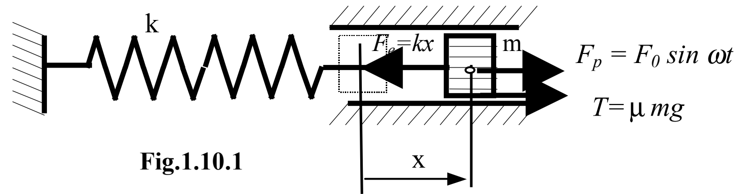


Fig.1.10.1

Pentru prima fază a mişcării $t \in \left(0, \frac{\pi}{p}\right)$ corpul se deplasează spre poziția de echilibru şi ecuația diferențială a mişcării se scrie:

$$m\ddot{x} + kx = \mu g + F_0 \sin \omega t \tag{1.10.1}$$

Se notează: $\frac{k}{m} = p^2$ – pătratul pulsației proprii. (1.10.2)

Soluția ecuației diferențiale (1.10.2) este formată din suma dintre soluția ecuației diferențiale omogene şi soluția staționară:

$$\begin{aligned} x &= A \cos pt + B \sin pt + \frac{\mu mg}{k} + \frac{mq}{k} \sin \omega t \\ \dot{x} &= -Ap \cos pt + Bp \sin pt + \frac{mq}{k} \omega \cos \omega t \end{aligned} \tag{1.10.3}$$

Introducând condițiile inițiale

$$t = 0 \Rightarrow \quad x = x_0, \quad \dot{x} = 0 \tag{1.10.4}$$

se obține:

$$\begin{cases} x_0 = A + \frac{\mu mg}{k} & \Rightarrow A = x_0 - \frac{\mu mg}{k} \\ 0 = Bp + \frac{F_0}{k} \omega & \Rightarrow B = -\frac{q}{p^2} \frac{\omega}{p} \end{cases} \tag{1.10.5}$$

Dacă se notează $a = \frac{\mu mg}{k}$ soluția pentru subintervalul: $t \in (0, \ \pi / p)$este:

$$x = (x_0 - a)\cos pt + a - \frac{q}{p^2}\frac{\omega}{p}\sin pt + \frac{mq}{k}\sin \omega t$$
$$\dot{x} = -(x_0 - a)p\sin pt - \frac{q}{p^2}\omega\cos pt + \frac{mq}{k}\omega\cos \omega t \qquad (1.10.6)$$

Ecuația (1.10.6) arată faptul că mişcarea rezultantă se obține prin însumarea următoarelor trei mişcări:

- vibrația proprie (de pulsație p) datorată condițiilor inițiale, a cărei amplitudine scade cu $2a$ după fiecare semiperioadă $\left(\frac{T}{2} = \frac{\pi}{p}\right)$;
- vibrația proprie (de pulsație p) datorată forței perturbatoare a cărei amplitudine depinde de pulsația forței perturbatoare;
- vibrația staționară având pulsația forței perturbatoare ω.

Într-o primă fază a mişcării există vibrația proprie şi vibrația întreținută. Această fază a mişcării se numeşte *regim tranzitoriu.* În a doua fază a mişcării, vibrația proprie se amortizează şi vibrația sistemului se obține prin suprapunerea a două mişcări armonice de pulsație p şi ω. Această fază se numeşte *regim permanent sau staționar* şi este caracterizată de ecuația:

$$x = \frac{q}{p^2}\left(\sin \omega t - \frac{\omega}{p}\sin pt\right)$$
$$\dot{x} = \frac{q\omega}{p^2}(\cos \omega t - \cos pt) = -\frac{2q\omega}{p^2}\sin\left(\frac{p+\omega}{2}t\right)\cdot \sin\left(\frac{p-\omega}{2}t\right) \qquad (1.10.7)$$

Se obține o mişcare având viteza modulată în amplitudine cu o funcție armonică de pulsație $(p-\omega)/2$.

Se consideră următoarele valori ale parametrilor:

$m = 0{,}1kg;\ k = 1000N/m;\ x_0 = 10mm;\ F_0 = 100N;\ \omega = 40rad/s$

Rezultă $p = 100rad/s;\ q = 1000N/kg$ obținându-se o mişcare nearmonică periodică având legea:

$$\begin{cases} x = 0{,}1(\sin 40t - 0{,}4\sin 100t) \\ \dot{x} = -2\sin(70t)\cdot \sin(30t) \end{cases} \qquad (1.10.8)$$

Reprezentările funcțiilor deplasare şi viteză pentru acest caz particular sunt date în figura 1.10.2 şi 1.10.3. Mişcarea periodică are perioada $T \cong 0{,}32s$ şi pulsația $\Omega = \frac{2\pi}{0{,}32}$ aşa cum rezultă din figurile 1.10.2 şi 1.10.3:

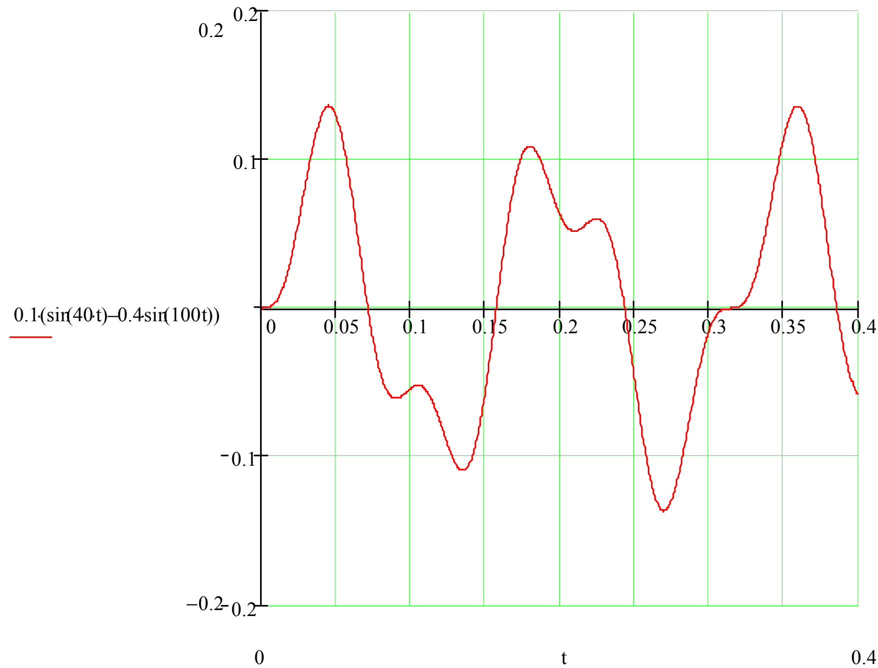


Fig. 1.10.2. Variația deplasării pentru vibrațiile forțate cu amortizare uscată

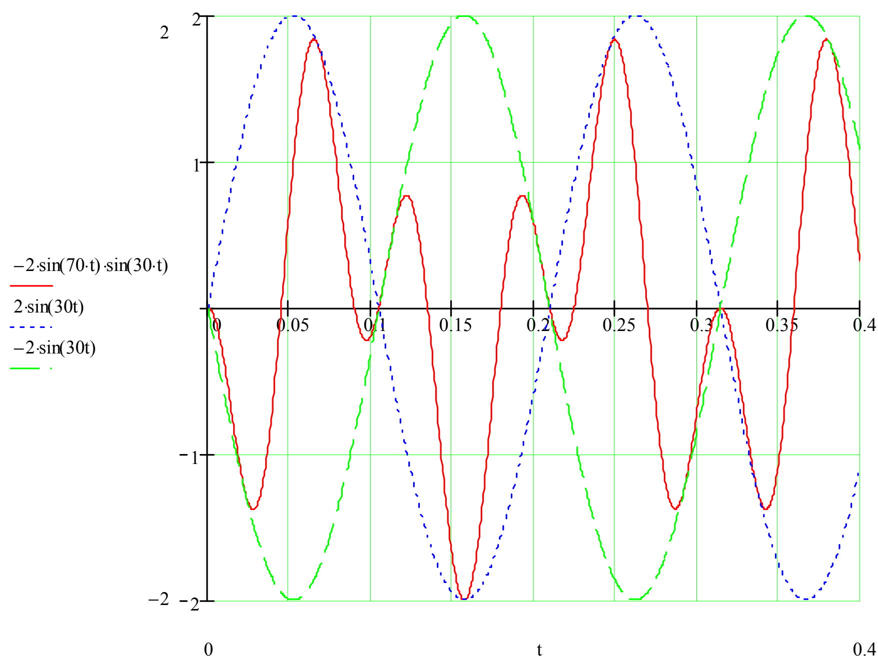


Fig. 1.10.3. Variația vitezei pentru vibrațiile forțate cu amortizare uscată

1.11. Transmisibilitatea vibrațiilor

Vibrațiile unei maşini care conține o sursă de vibrații se transmit prin fundații la celelalte maşini, echipamente sau utilaje aflate pe acelaşi amplasament. Pentru a se asigura o protecție adecvată este necesară *izolarea antivibratorie activă* (de la sursa de vibrații spre fundație) sau o *izolare antivibratorie pasivă* (de la fundație la maşinile şi aparatele ce trebuiesc izolate împotriva vibrațiilor). Factorul de transmitere sau transmisibilitatea masară mărimea acestor parametrii caracteristici păturilor izolatoare (forța transmisă şi /sau amplitudinea vibrațiilor transmise.

1.11.1. Transmisibilitatea vibrațiilor în cazul utilizării elementelor elastice pentru izolarea activă

Se consideră o sursă de vibrații forțate $F = F_0 \cos \omega t$ care acționează asupra fundației prin intermediul arcului cu forța Q (fig. 1.11.1).

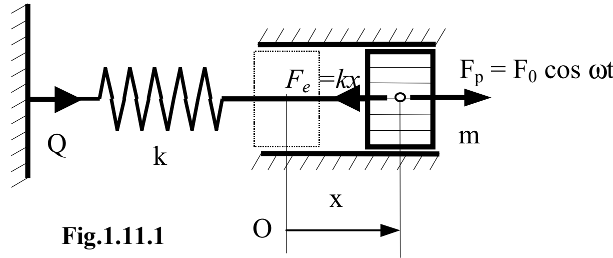


Fig.1.11.1

Expresia forței transmise $Q(\omega)$ pentru vibrații forțate în regim staționar este:

$$Q(\omega) = kx = \frac{kq}{p^2 - \omega^2} \cos(\omega t - \varphi) \tag{1.11.1}$$

Deci legea de variație a forței transmise este armonică de amplitudine:

$$Q_0 = \left| \frac{k \frac{F_0}{m}}{p^2 - \omega^2} \right| = \left| \frac{p^2}{p^2 - \omega^2} \right| \cdot F_0 \tag{1.11.2}$$

Se defineşte *factorul de transmitere T* (*transmisibilitatea*) ca raportul dintre amplitudinea forței transmise Q_0 şi amplitudinea forței perturbatoare F_0:

$$T = \frac{Q_0}{F_0} = \frac{p^2}{\left| p^2 - \omega^2 \right|} = \frac{1}{\left| 1 - \left(\frac{\omega}{p} \right)^2 \right|} = \frac{1}{\left| 1 - \eta^2 \right|} \tag{1.11.3}$$

Diagrama de variație a funcției $T(\eta)$, $\eta = \omega / p$ este prezentată în figura 1.11.2

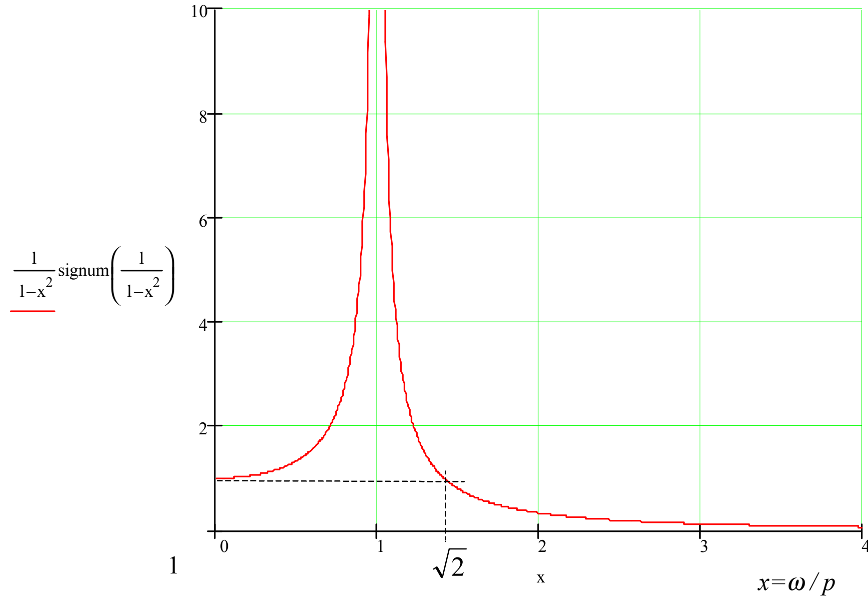


Fig. 1.11.2. Variația transmisibilității pentru izolarea activă cu element elastic

Condiția ca amplitudinea forței transmise Q_0 să fie mai mică sau cel mult egală cu amplitudinea forței perturbatoare este:

$$T \le 1 \qquad (1.11.4)$$

Din relația (1.11.3) rezultă: $p^2 \le \left|p^2 - \omega^2\right|$ (1.11.5)

Cele două cazuri sunt:

- $\omega < p \Rightarrow \quad p^2 \le p^2 - \omega^2 \Rightarrow -\omega^2 \ge 0$ imposibil;
- $\omega > p \Rightarrow p^2 \le \omega^2 - p^2 \Rightarrow \omega^2 \ge 2p^2 \Rightarrow \omega \ge p\sqrt{2}$ (1.11.6)

Dacă se impune un anumit factor de transmitere T se poate determina pulsația forței perturbatoare sau raportul $\eta = \omega / p$:

$$T = \frac{1}{\left|1-\eta^2\right|} \le T_0 \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} \eta \le \sqrt{1 - 1/T_0} \\ \eta \ge \sqrt{1 + 1/T_0} \end{cases} \qquad (1.11.7)$$

De exemplu pentru: $T_0 = 0{,}5$ *si* $T_1 = 2{,}5$ se obțin rezultatele:

$$T_0 = 0{,}5 \Rightarrow \begin{cases} \eta \le \sqrt{1-1/0{,}5} \ \ \textit{imposibil} \\ \eta \ge \sqrt{1+1/0{,}5} \Rightarrow \eta \ge 1{,}73 \end{cases}$$
$$T_1 = 2{,}5 \Rightarrow \begin{cases} \eta \le \sqrt{1-1/2{,}5} \Rightarrow \eta \le 0{,}774 \\ \eta \ge \sqrt{1+1/2{,}5} \Rightarrow \eta \ge 1{,}183 \end{cases} \qquad (1.11.8)$$

1.11.2. Transmisibilitatea vibrațiilor în cazul izolării pasive şi utilizării elementelor elastice.

Se consideră că baza (fundația) are o mişcare armonică pe direcție verticală. În acest caz transmisibilitatea se defineşte ca raportul amplitudinilor celor două mişcări: a corpului supus acțiunii mişcării bazei (A_0) şi a bazei (u_0). Folosind diferite elemente elastice şi de amortizare se obține o izolare antivibratorie pasivă.

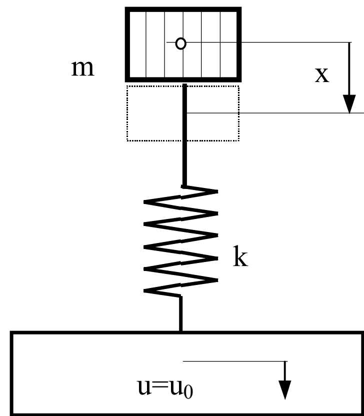


Fig.1.11.3

Se consideră vibrațiile fundației (bazei) care se transmit asupra corpului de masă m prin intermediul unui arc având constanta elastică k (fig. 1.11.3). Ecuația fundamentală a dinamicii în acest caz se scrie:

$$m\ddot{x} + k(x - u) = 0$$
$$m\ddot{x} + kx = ku_0 \cos \omega t \qquad (1.11.10)$$

Soluția staționară a acestei ecuații este de forma:

$$x = A_0 \cos \omega t \qquad (1.11.11)$$

care înlocuită în relația (1.11.12) rezultă amplitudinea:

$$A_0 = u_0 \frac{p^2}{p^2 - \omega^2} \qquad (1.11.13)$$

Se defineşte *factorul de transmitere T* ca raportul dintre amplitudinea mişcării corpului şi amplitudinea mişcării bazei:

$$T = \frac{A_0}{u_0} = \frac{p^2}{p^2 - \omega^2} = \frac{1}{1 - \eta^2}; \quad \eta = \frac{\omega}{p} \qquad (1.11.14)$$

Se observă că *factorul de transmitere T* are aceeaşi expresie ca şi în cazul izolării antivibratorii active, dar în acest caz exprimă raportul dintre amplitudinea vibrațiilor corpului şi amplitudinii mişcării bazei.

1.12. Izolarea antivibratorie activă

Prin *izolare antivibratorie activă* se înțelege izolarea care se face de la sursa de vibrații spre fundație pentru diferite variante de pături izolatoare folosite.

1.12.1. Izolarea antivibratorie activă în cazul utilizării modelului vâsco-elastic Voigt-Kelvin

În cazul vibrațiilor cu amortizare vâscoasă forța transmisă fundației conform figurii 1.12.1 este :

$$Q = kx + c\dot{x} \tag{1.12.1}$$

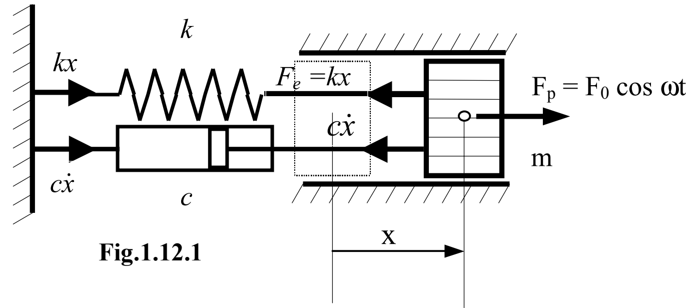


Fig.1.12.1

Deplasarea x şi viteza $\dot{x}$ pentru cazul $\alpha < p$ se scriu:

$$\begin{aligned} x &= \frac{q}{\sqrt{(p^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2}} cos(\omega t - \theta) \\ \dot{x} &= -\frac{q\omega}{\sqrt{(p^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2}} sin(\omega t - \theta) \end{aligned} \tag{1.12.2}$$

şi relația (1.12.1) se scrie:

$$Q = \frac{q}{\sqrt{(p^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2}} \left[k\, cos(\omega t - \theta) - c\omega\, sin(\omega t - \theta)\right] \tag{1.12.3}$$

Amplitudinea forței transmise la fundație este:

$$Q_0 = q\frac{\sqrt{k^2+c^2\omega^2}}{\sqrt{(p^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2}} = \frac{F_0}{m}\frac{\sqrt{k^2+c^2\omega^2}}{\sqrt{(p^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2}} \tag{1.12.4}$$

sau
$$Q_0 = \frac{\sqrt{p^2+4n^2\omega^2}}{\sqrt{(p^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2}} F_0 \tag{1.12.5}$$

Factorul de transmitere se scrie în acest caz:

$$T = \frac{Q_0}{F_0} = \frac{\sqrt{p^2+4n^2\omega^2}}{\sqrt{(p^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2}} \tag{1.12.6}$$

sau: $T=\sqrt{\dfrac{1+4\zeta^2\eta^2}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\zeta^2\eta^2}}$; *unde :* $\eta=\dfrac{\omega}{p}$; $\quad\zeta=\dfrac{n}{p}=\dfrac{c}{c_{cr}}$ (1.12.7)

Se observă că dacă $\eta=1\Rightarrow T=\dfrac{\sqrt{1+4\zeta^2}}{2\zeta}$, factorul de transmitere are valori finite. Reprezentând grafic funcția $T=T(\eta)$ pentru patru valori ale factorului de amortizare: *ζ=0,05; ζ=0,1; ζ=0,2; ζ=0,4* (fig. 1.12.2).

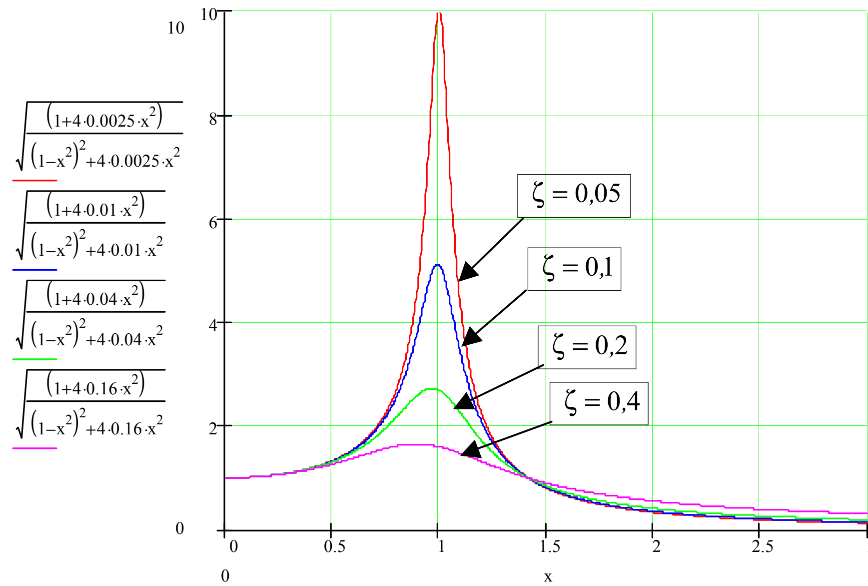


Fig.1.12.2. Variația factorului de transmitere cu pulsația relativă ηpentru diferite valori ale factorului de amortiyare ζ (η≡x)

Din figura 1.12.2 se observă că toate curbele trec printr-un punct fix de coordonate $\left(\eta=\sqrt{2}\,,\ T=1\right)$. Într-adevăr, înlocuind $\eta=\sqrt{2}$ în relația (1.12.7) rezultă $T=\dfrac{\sqrt{1+8\zeta^2}}{\sqrt{1+8\zeta^2}}=1$, deci este independent de factorul de amortizare.

Valoarea maximă a factorului de transmitere se obține prin anularea derivatei expresiei (1.12.7):

$$\left(T^2\right)'=\left(\frac{1+4\zeta^2\eta^2}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\zeta^2\eta^2}\right)'=-\frac{4\eta\left(2\zeta^2\eta^4+\eta^2-1\right)}{\left[\left(1-\eta^2\right)^2+4\zeta^2\eta^2\right]^2}=0 \qquad (1.12.8)$$

Rezultă în afară de valoarea η=*0* (care nu interesează) soluția reală:

$$\eta_m = \sqrt{\frac{\sqrt{1+8\zeta^2}-1}{4\zeta^2}} \tag{1.12.9}$$

Înlocuind valoarea dată de (1.12.9) în expresia factorului de transmitere se obține valoarea maximă:

$$T_m = \frac{4\zeta^2}{\sqrt{2\left(\sqrt{1+8\zeta^2}+4\zeta^2\left(2\zeta^2-1\right)-1\right)}} \tag{1.12.10}$$

Folosind relațiile (1.12.9) și (1.12.10) în două cazuri particulare se obțin următoarele valori care sunt în concordanță cu valorile maxime din figura 1.12.2:

- pentru: $\zeta=0{,}05 \Rightarrow \quad x_m = 0.977 \;\; si \;\; T_m = 10.062$ (1.12.11)
- pentru: $\zeta=0{,}4 \Rightarrow \quad x_m = 0.892 \;\; si \;\; T_m = 2.34$

Variația factorului de transmitere maxim cu coeficientul de amortizare ζ este dată în figura 1.12.3.

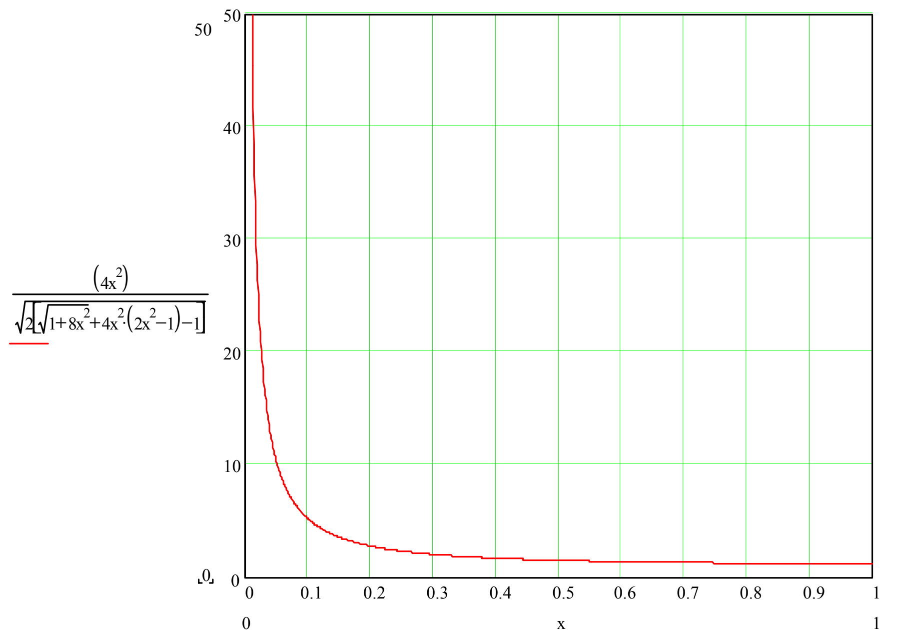


Fig.1.12.3. Variația factorului de tramsmitere maxim T_m cu coeficientul de amortizare ζ

Din analiza diagramelor din figura 1.12.2 și 1.12.3 se pot trage următoarele concluzii:

- izolarea vibrațiilor este cu atât mai eficientă la creşterea pulsația forței perturbatoare ω cu cât scade factorul de amortizare ζ;
- un factor de amortizare mai mare este necesar pentru obținerea unui timp redus de amortizare a vibrațiilor proprii deoarece în regimul tranzitoriu pulsația

forței perturbatoare (ω) crește de la zero trecând prin valoarea de rezonanță (p) până la atingerea valorii nominale;

- utilizarea izolatorilor liniari este recomandată la vibrațiile cu pulsații perturbatoare mari. Pentru vibrațiile de frecvență joasă se recomandă izolatori cu valoarea de rezonanță (p) scăzută (k mic) care nu asigură stabilitatea sistemului.

1.12.2. Izolarea antivibratorie activă în cazul utilizării modelului histeretic Voigt-Kelvin

În cazul vibrațiilor cu amortizare histeretică forța transmisă fundației conform figurii 1.12.4 este :

$$Q = kx + c\dot{x} \qquad (1.12.12)$$

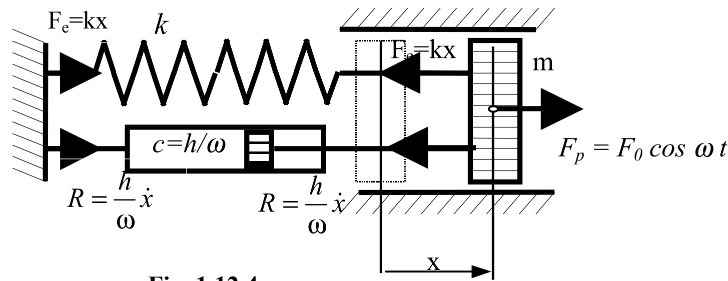


Fig. 1.12.4

Legea vibrațiilor staționare în acest caz se scrie:

$$x = A \cdot cos(\omega t - \theta)$$
$$\dot{x} = -\omega A \cdot sin(\omega t - \theta) \qquad (1.12.13)$$
$$unde: A = \frac{q}{\sqrt{\left(p^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{h}{m}\right)^2}}$$

și forța Q transmisă fundației (1.12.12) se scrie deci sub forma:

$$Q = A\left[k\,cos(\omega t - \theta) - c\omega sin(\omega t - \theta)\right] \qquad (1.12.14)$$

Amplitudinea forței transmise la fundație este:

$$Q_0 = q\frac{\sqrt{k^2 + h^2}}{\sqrt{\left(p^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{h}{m}\right)^2}} = \frac{F_0}{m}\frac{\sqrt{k^2 + h^2}}{\sqrt{\left(p^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{h}{m}\right)^2}} \qquad (1.12.15)$$

Factorul de transmitere se scrie în acest caz:

$$\eta = \frac{Q_0}{F_0} = \frac{\sqrt{p^4 + \left(\frac{h}{m}\right)^2}}{\sqrt{\left(p^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{h}{m}\right)^2}} \tag{1.12.16}$$

Utilizând coeficientul de amortizare histeretică $\frac{h}{k} = g$ şi notând $\eta = \frac{\omega}{p}$, pulsaţia relativă expresia factorului de transmitere se scrie în acest caz:

$$T(\eta) = \sqrt{\frac{1 + g^2}{\left(1 - \eta^2\right)^2 + g^2}} \tag{1.12.17}$$

Reprezentând grafic funcţia factorul de transmitere pentru patru valori ale coeficientului de amortizare histeretică $(g = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}5;\ 1)$ se obţin curbele de răspuns în frecvenţe din figura 1.12.5.

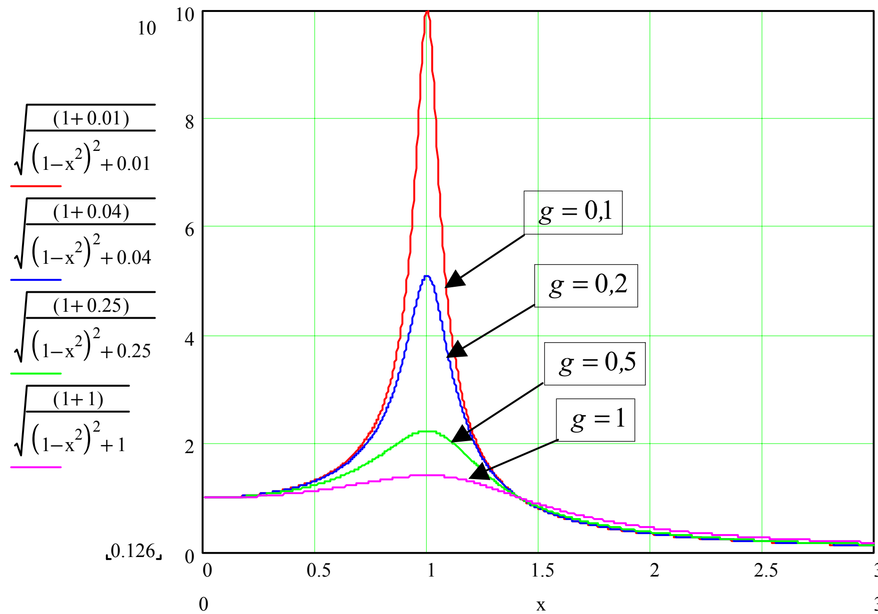


Fig.1.12.5. Variaţia factorului de transmitere T pentru diferite valori ale coeficientului de amortizare g

Din figura 1.12.5 se observă ca şi în cazul precedent că toate curbele trec printr-un punct fix de coordonate $(\eta = \sqrt{2},\ T = 1)$. Într-adevăr înlocuind $\eta = \sqrt{2}$ în relaţia (1.12.17) rezultă $T = 1$ care este independent de factorul de amortizare.

Valoarea maximă a factorului de transmitere se obține prin anularea derivatei expresiei (1.12.17):

$$\left(T^2\right)' = \left(\frac{1+g^2}{\left(1-\eta^2\right)^2+g^2}\right)' = \frac{4\eta\left(1-\eta^2\right)\left(1+g^2\right)}{\left[\left(1-\eta^2\right)^2+g^2\right]^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta_m = 1 \qquad (1.12.18)$$

Se obține valoarea sa maximă:

$$T_m = \sqrt{1+\frac{1}{g^2}} \qquad (1.12.19)$$

Reprezentând grafic factorul de transmitere maxim funcție de coeficientul de amortizare histeretică se obțin curbele de răspuns în frecvențe din figura 1.12.6.

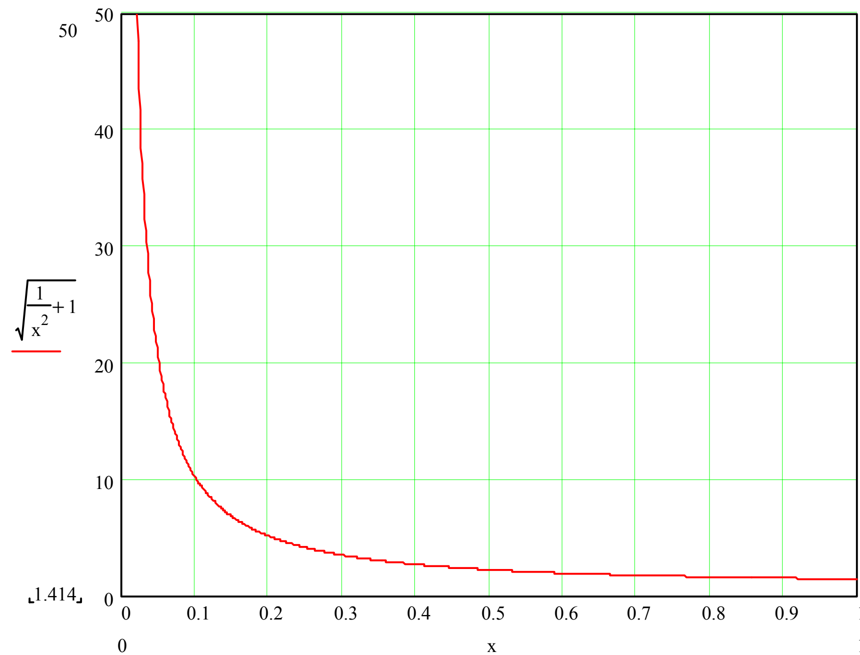


Fig.1.12.6. Variația factorului de transmitere maxim funcție de coeficientul de amortizare histeretică g

Din analiza diagramelor din figurile 1.12.5 şi 1.12.6 se pot trage aceleaşi concluzii ca şi în cazul precedent.

1.12.3. Izolarea antivibratorie activă în cazul utilizării modelului vâsco-elastic Hooke-Maxwell

Se consideră un sistem format dintr-un corp de masă *m* (fig. 1.12.7) legat de fundație cu un arc având constanta elastică *k* şi un amortizor hidraulic având coeficientul de amortizare *c* legat în serie cu un element elastic având constanta

elastică k_1 ($k_1=Nk$, unde N se numeşte factor de cuplare). Forţa perturbatoare variază după legea armonică:

$$F = F_0 \cos \omega t \qquad (1.12.20)$$

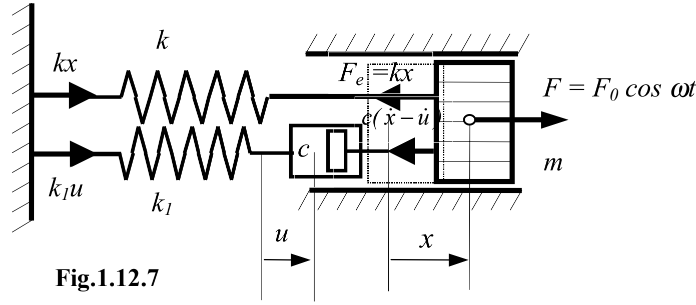


Fig.1.12.7

Ecuaţia fundamentală a dinamicii în acest caz se scrie:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{u}) + kx = F_0 \cos \omega t \qquad (1.12.21)$$

Ţinând seama că forţa din elementul amortizor este egală cu forţa elastică din arcul de constantă elastică k_1:

$$c(\dot{x} - \dot{u}) = Nku \qquad (1.12.22)$$

înlocuind în relaţia (1.12.28)rezultă:

$$m\ddot{x} + kx + Nku = F_0 \cos \omega t \qquad (1.12.23)$$

În complex ecuaţiile (1.12.22) şi (1.12.23) se scriu:

$$c(\dot{z} - \dot{u}) = Nku \qquad (1.12.24)$$

$$m\ddot{\tilde{x}} + k\tilde{x} + Nk\tilde{u} = \tilde{F} \qquad (1.12.25)$$

Înlocuind expresiile complexe ale soluţiilor şi variabilei

$$\tilde{x} = A_0 e^{i(\omega t - \varphi)}; \quad \tilde{u} = u_0 e^{i(\omega t - \theta)}; \quad \tilde{F} = F_0 e^{i\omega t} \qquad (1.12.27)$$

în aceste ecuaţii rezultă:

$$u_0 e^{-i\theta} = \frac{ic\omega A_0 e^{-i\varphi}}{Nk + ic\omega} \qquad (1.12.28)$$

$$\left(k - m\omega^2\right)A_0 e^{-i\varphi} + Nku_0 e^{-i\theta} = F_0 \qquad (1.12.29)$$

Înlocuind expresia (1.12.28) în (1.12.29) rezultă:

$$\left(k - m\omega^2\right)A_0 e^{-i\varphi} + Nk\frac{ic\omega A_0 e^{-i\varphi}}{Nk + ic\omega} = F_0 \qquad (1.12.30)$$

şi notând: $\frac{m}{k} = \frac{1}{p^2}$; $\frac{\omega}{p} = \eta$; $\frac{\alpha}{p} = \zeta$; $\frac{c\omega}{k} = \frac{c}{m}\frac{m\omega}{k} = 2\frac{\alpha}{p}\frac{\omega}{p} = 2\eta\zeta$ (1.12.31)

şi împărţind relaţia (1.12.30) la k se obţine:

$$\left[\left(1 - \eta^2\right) + \frac{2i\eta\zeta}{1 + \frac{2i\eta\zeta}{N}}\right]A_0 e^{-i\varphi} = \frac{F_0}{k} \qquad (1.12.32)$$

rezultă amplitudinea complexă a mişcării:

$$A = A_0 e^{-i\varphi} = \frac{F_0}{k} \frac{\left(1 + \dfrac{2i\eta\zeta}{N}\right)}{\left(1-\eta^2\right) + \dfrac{2i\eta\zeta}{N}\left(N + 1 - \eta^2\right)} \qquad (1.12.33)$$

Amplitudinea reală a mişcării este modulul amplitudinii complexe:

$$A_0 = \frac{F_0}{k}\sqrt{\frac{1 + \left(\dfrac{2\eta\zeta}{N}\right)^2}{\left(1-\eta^2\right)^2 + \left(\dfrac{2\eta\zeta}{N}\right)^2 (N + 1 - \eta)^2}} \qquad (1.12.34)$$

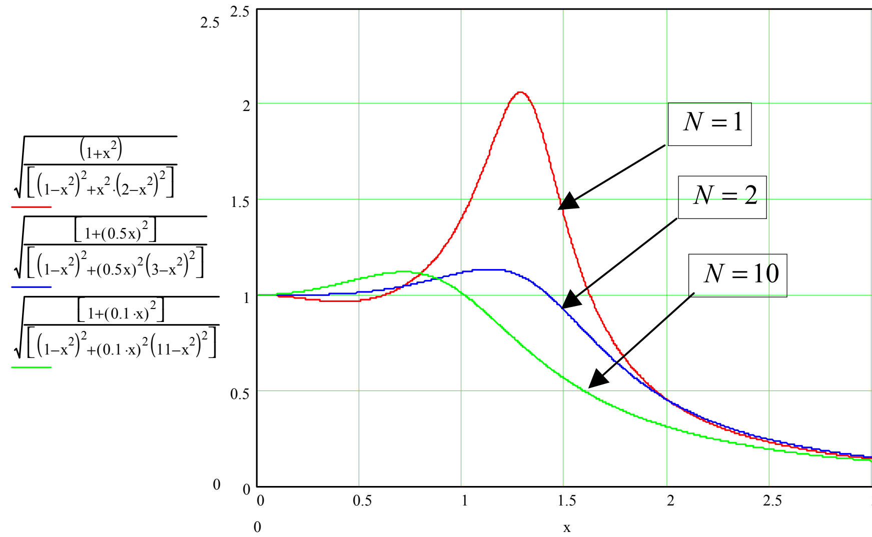


Fig.1.12.8 Variaţia amplitudinii vibraţiilor pentru trei valori ale factorului de cuplare: *N=1, N=2 şi N=10* şi pentru o valoare a factorului de amortizare ζ=0,5.

În figura 1.12.10 este dată variaţia amplitudinii vibraţiilor pentru trei valori ale factorului de cuplare: *N=1, N=2 şi N=10* şi pentru o valoare a factorului de amortizare ζ=0,5.

Forţa transmisă la fundaţie conform figurii 1.12.7 este: $Q = kx + k_1 u$

sau în complex:
$$\widetilde{Q} = k\widetilde{x} + k_1\widetilde{u} = kA_0 e^{i(\omega t - \varphi)} + Nku_0 e^{i(\omega t - \theta)}$$
$$\widetilde{Q} = \left(kA_0 e^{-i\varphi} + Nku_0 e^{-i\varphi}\right)e^{i\omega t} \qquad (1.12.35)$$

Ţinând seama de relaţia (1.12.34) se obţine:

$$\widetilde{Q} = A_0\left(k + Nk\frac{ic\omega}{Nk + ic\omega}\right)e^{i(\omega t - \varphi)} = kA_0 \frac{Nk + ic\omega(N+1)}{Nk + ic\omega} e^{i(\omega t - \varphi)} \qquad (1.12.36)$$

Ţinând seama de notaţiile (1.12.37) se obţine:

$$\widetilde{Q} = kA_0 \frac{1 + 2i\zeta\eta \dfrac{N+1}{N}}{1 + \dfrac{2i\zeta\eta}{N}} e^{i(\omega t - \varphi)} \tag{1.12.37}$$

Amplitudinea forței transmise are expresia:

$$Q_0 = |Q| = kA_0 \sqrt{\frac{1 + \left(2\eta\zeta \dfrac{N+1}{N}\right)^2}{1 + \left(\dfrac{2\eta\zeta}{N}\right)^2}} \tag{1.12.38}$$

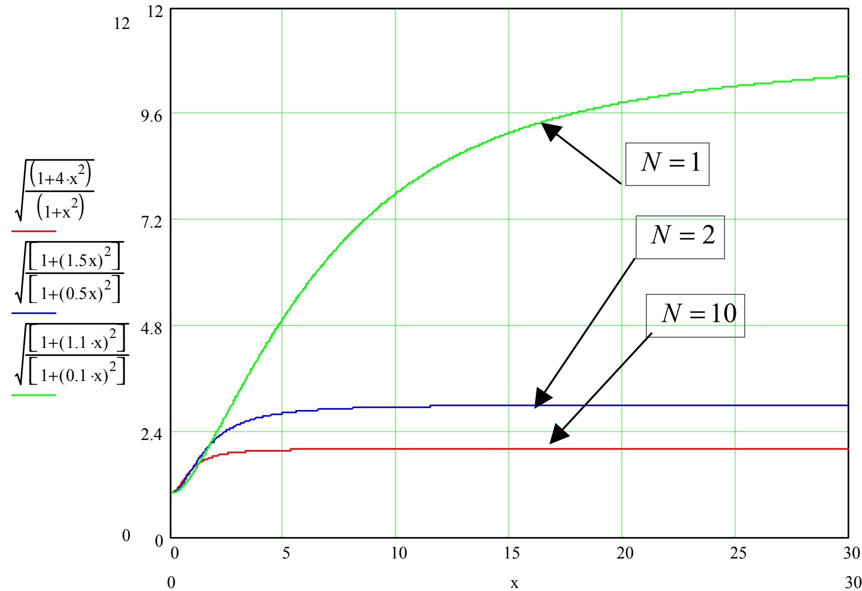


Fig.1.12.9 Variația amplitudinii forței transmise pentru trei valori ale factorului de cuplare: *N=1, N=2 și N=10* și pentru o valoare a factorului de amortizare ζ=0,5.

În figura 1.12.9 este dată variația amplitudinii forței transmise pentru trei valori ale factorului de cuplare: *N=1, N=2 și N=10* și pentru o valoare a factorului de amortizare: ζ=0,5. Se observă din aceste diagrame că amplitudinea forței transmise are valori scăzute pentru valori ale factorului de cuplare N mai mari în zona frecvențelor de rezonanță.

Factorul de transmitere se scrie în acest caz:

$$T = \frac{Q_0}{F_0} = \sqrt{\frac{1 + \left(2\eta\zeta \dfrac{N+1}{N}\right)^2}{\left(1-\eta^2\right)^2 + \left(\dfrac{2\eta\zeta}{N}\right)^2 (N+1-\eta)^2}} \tag{1.12.39}$$

În figura 1.12.10 sunt date variațiile factorului de transmitere pentru trei valori ale factorului de cuplare: *N=1, N=2 şi N=10* şi pentru o valoare a factorului de amortizare ζ=0,5.

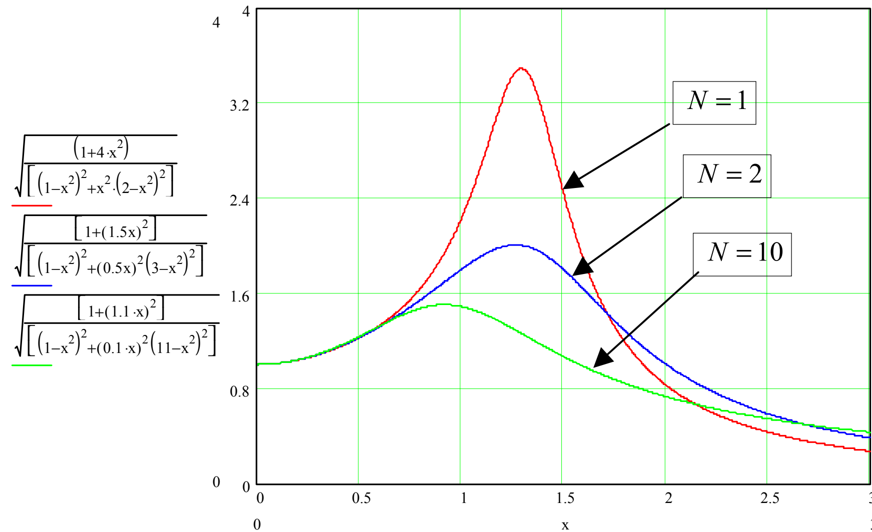


Fig.1.12.10 Variația factorului de transmitere pentru trei valori ale factorului de cuplare: *N=1, N=2 şi N=10* şi pentru o valoare a factorului de amortizare ζ=0,5.

Se observă din aceste diagrame că factorul de transmitere are valori scăzute pentru valori ale factorului de cuplare N mai mari în zona frecvențelor de rezonanță.

1.12.4. Izolarea antivibratorie activă în cazul utilizării modelului histeretic Hooke-Maxwell

Se consideră un sistem format dintr-un corp de masă m (fig. 1.12.11) legat de fundație cu un arc având constanta elastică k şi un amortizor hidraulic având coeficientul de amortizare histeretic $c = h/\omega$ legat în serie cu un element elastic având constanta elastică k_1 (k_1=Nk, N - factor de cuplare). Forța perturbatoare variază după legea armonică:

$$F = F_0 \cos \omega t \tag{1.12.40}$$

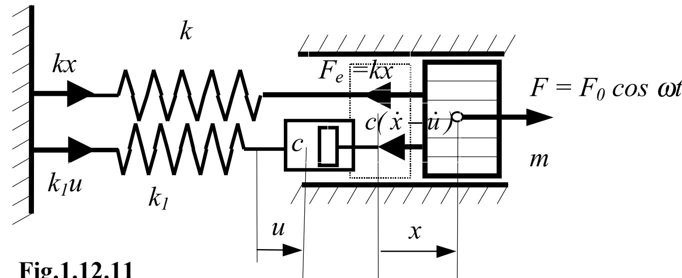


Fig.1.12.11

Ecuația fundamentală a dinamicii în acest caz se scrie:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{u}) + kx = F_0 \cos \omega t \qquad (1.12.41)$$

Ținând seama că forța din elementul amortizor este egală cu forța elastică din arcul de constantă elastică k_1:

$$c(\dot{x} - \dot{u}) = Nk \cdot u \qquad (1.12.42)$$

înlocuind (1.12.42) în relația (1.12.41)rezultă:

$$m\ddot{x} + kx + Nku = F_0 \cos \omega t \qquad (1.12.43)$$

Ecuațiile (1.12.48) şi (1.12.49) se scriu în complex:

$$c(\dot{z} - \dot{u}) = Nku \qquad (1.12.44)$$

$$m\ddot{\tilde{x}} + k\dot{\tilde{x}} + Nk\tilde{u} = \tilde{F} \qquad (1.12.45)$$

Înlocuind expresiile complexe ale soluțiilor şi variabilei

$$\tilde{x} = A_0 e^{i(\omega t - \varphi)}; \quad \tilde{u} = u_0 e^{i(\omega t - \theta)}; \quad \tilde{F} = F_0 e^{i\omega t} \qquad (1.12.46)$$

în aceste ecuații rezultă:

$$u_0 e^{-i\theta} = \frac{ihA_0 e^{-i\varphi}}{Nk + ih} \qquad (1.12.47)$$

$$(k - m\omega^2) A_0 e^{-i\varphi} + Nku_0 e^{-i\theta} = F_0 \qquad (1.12.48)$$

Înlocuind expresia (1.12.47) în (1.12.48) rezultă:

$$(k - m\omega^2) A_0 e^{-i\varphi} + Nk \frac{ihA_0 e^{-i\varphi}}{Nk + ih} = F_0 \qquad (1.12.49)$$

Împărțind relația (1.12.49) la k şi notând:

$$\frac{m}{k} = \frac{1}{p^2}; \quad \frac{\omega}{p} = \eta; \quad \frac{h}{k} = g \qquad (1.12.50)$$

se obține:

$$\left[(1 - \eta^2) + \frac{ig}{1 + \frac{ig}{N}} \right] A_0 e^{-i\varphi} = \frac{F_0}{k} \qquad (1.12.51)$$

Rezultă amplitudinea complexă a mişcării:

$$A = A_0 e^{-i\varphi} = \frac{F_0}{k} \frac{\left(1 + \frac{ig}{N}\right)}{(1 - \eta^2) + \frac{ig}{N}(N + 1 - \eta^2)} \qquad (1.12.52)$$

Amplitudinea reală a mişcării este modulul amplitudinii complexe:

$$|A| = A_0 = \frac{F_0}{k} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{g}{N}\right)^2}{(1 - \eta^2)^2 + \left(\frac{g}{N}\right)^2 (N + 1 - \eta)^2}} \qquad (1.12.53)$$

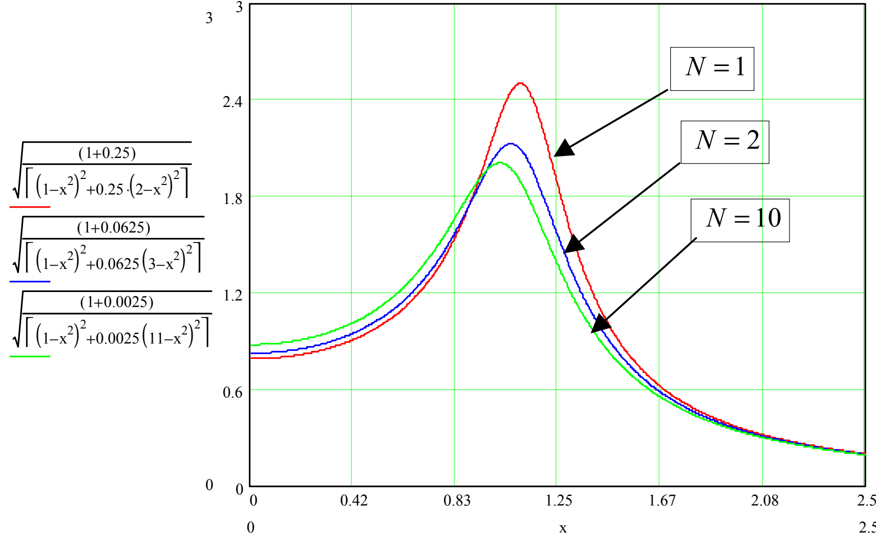


Fig.1.12.12 Variația amplitudinii vibrațiilor pentru trei valori ale factorului de cuplare: *N=1, N=2 şi N=10* şi pentru o valoare a factorului de amortizare g=0,5.

Reprezentând grafic amplitudinea mişcării pentru trei valori ale factorului de cuplare*: N=1, N=2 şi N=10* şi pentru o valoare a factorului de amortizare histeretică egală cu *g=0,5* se obțin curbele din figura 1.12.12. Se observă din aceste diagrame că factorul de transmitere are valori mai scăzute pentru valori ale factorului de cuplare N mai mari în zona frecvențelor de rezonanță.

Forța transmisă la fundație este:

$$Q = kx + k_1 u \qquad (1.12.54)$$

sau în complex:

$$\tilde{Q} = k\tilde{x} + k_1\tilde{u} = kA_0 e^{i(\omega t-\varphi)} + Nku_0 e^{i(\omega t-\theta)}$$
$$\tilde{Q} = \left(kA_0 e^{-i\varphi} + Nku_0 e^{-i\varphi}\right)e^{i\omega t} \qquad (1.12.55)$$

Ținând seama de relația (1.12.47) se obține:

$$\tilde{Q} = A_0\left(k + Nk\frac{ic\omega}{Nk + ic\omega}\right)e^{i(\omega t-\varphi)}$$
$$\tilde{Q} = kA_0\frac{Nk + ic\omega(N+1)}{Nk + ic\omega}e^{i(\omega t-\varphi)} \qquad (1.12.56)$$

Ținând seama de notațiile (1.12.56) se obține:

$$\tilde{Q} = kA_0\frac{1 + ig\frac{N+1}{N}}{1 + \frac{ig}{N}}e^{i(\omega t-\varphi)} \qquad (1.12.63)$$

Amplitudinea forței transmise este:

$$Q_0 = |Q| = kA_0 \sqrt{\frac{1+\left(g\frac{N+1}{N}\right)^2}{1+\left(\frac{g}{N}\right)^2}} \qquad (1.12.64)$$

Se observă că aceasta nu depinde de pulsația forței perturbatoare ci numai de factorul de amortizare *g* şi de factorul de cuplare *N*

Factorul de transmitere se scrie în acest caz:

$$T = \frac{Q_0}{F_0} = \sqrt{\frac{1+\left(g\frac{N+1}{N}\right)^2}{\left(1-\eta^2\right)^2+\left(\frac{g}{N}\right)^2\left(N+1-\eta\right)^2}} \qquad (1.12.65)$$

Reprezentând grafic factorul de transmitere pentru trei valori ale factorului de cuplare*: N=1, N=2 şi N=10* şi pentru o valoare a factorului de amortizare egală cu *g=0,5* se obțin curbele din figura 1.12.13. Se observă din aceste diagrame că factorul de transmitere are valori mai scăzute pentru valori ale factorului de cuplare N mai mari în zona frecvențelor de rezonanță.

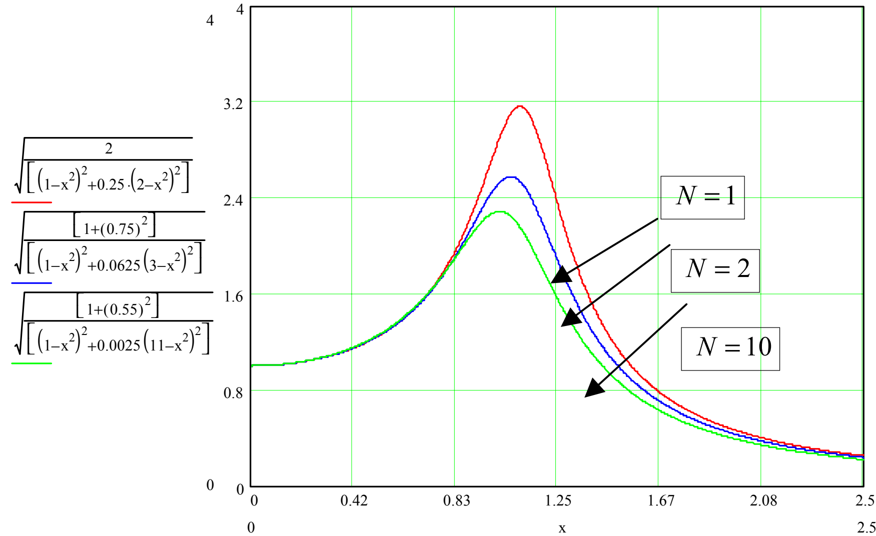


Fig.1.12.13. Variația factorului de transmitere pentru trei valori ale factorului de cuplare: *N=1, N=2 şi N=10* şi pentru o valoare a factorului de amortizare ζ=0,5.

1.13. Izolarea antivibratorie pasivă

Prin *izolare antivibratorie pasivă* se înțelege izolarea care se face de la fundație ca sursa de vibrații spre aparate fără surse proprii de vibrație pentru diferite variante de pături izolatoare folosite.

1.13.1 Izolarea antivibratorie pasivă în cazul utilizării modelului vâsco-elastic Voigt-Kelvin

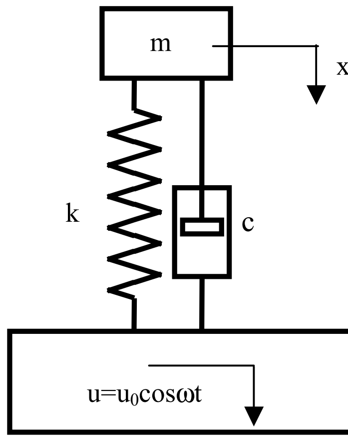


Fig. 1.13.1

Se consideră sistemul format dintr-un corp de masă *m* legat de fundație cu un arc având constanta elastică *k* şi un amortizor hidraulic având coeficientul de amortizare *c* (fig. 1.13.1).

Mişcarea bazei se produce pe direcție verticală după legea :

$$u = u_0 \cos \omega t \tag{1.13.1}$$

Ecuația fundamentală a dinamicii în acest caz se scrie:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{u}) + k(x - u) = 0$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = u_0(k \cos \omega t - c\omega \sin \omega t)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = u_0\sqrt{k^2 + c^2\omega^2}\cos(\omega t - \theta) \tag{1.13.2}$$

Soluția staționară a acestei ecuații este de forma:

$$x = A_0 \cos(\omega t - \varphi) \tag{1.13.3}$$

Ecuația (1.13.2) se scrie în complex:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = u_0\sqrt{k^2 + c^2\omega^2}\, e^{i(\omega t - \theta)} \tag{1.13.4}$$

Soluția complexă a ecuației (1.13.4) se scrie:

$$z = Ae^{i(\omega t - \varphi)}; \quad \dot{z} = i\omega \cdot Ae^{i(\omega t - \varphi)}; \quad \ddot{z} = -\omega^2 \cdot Ae^{i(\omega t - \varphi)} \tag{1.13.5}$$

Înlocuind în (1.13.4) se obține amplitudinea complexă a mişcării:

$$A\left(k - m\omega^2 + ic\omega\right)e^{-i\varphi} = u_0\sqrt{k^2 + c^2\omega^2}\, e^{-i\theta}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{u_0\sqrt{k^2 + c^2\omega^2}}{\left(k - m\omega^2 + ic\omega\right)} e^{i(\varphi - \theta)} \tag{1.13.6}$$

Amplitudinea reală a mişcării este:

$$A_0 = |A| = \frac{u_0\sqrt{k^2 + c^2\omega^2}}{\sqrt{\left(k - m\omega^2\right)^2 + c^2\omega^2}} = \frac{u_0\sqrt{p^4 + 4n^2\omega^2}}{\sqrt{\left(p^2 - \omega^2\right)^2 + 4n^2\omega^2}} \tag{1.13.7}$$

Notând: $\frac{\omega}{p}=\eta$, $\frac{n}{p}=\frac{c}{c_{cr}}=\zeta$, factorul de transmitere în acest caz are aceeaşi expresie (1.13.6) ca în cazul izolării antivibratorii active, dar exprimă raportul amplitudinilor celor două mişcări:

$$T=\frac{A_0}{u_0}=\frac{\sqrt{p^2+4n^2\omega^2}}{\sqrt{\left(p^2-\omega^2\right)^2+4n^2\omega^2}}=\sqrt{\frac{1+4\zeta^2\eta^2}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\zeta^2\eta^2}} \qquad (1.13.8)$$

1.13.2. Izolarea antivibratorie pasivă în cazul utilizării modelului histeretic Voigt-Kelvin

În cazul vibraţiilor cu amortizare histeretică forţa transmisă fundaţiei conform figurii 1.12.4 este :

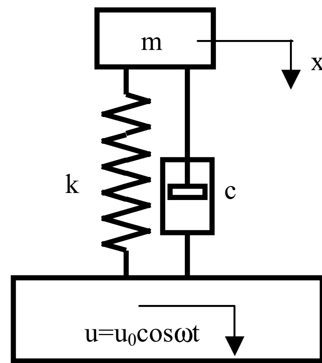


Fig. 1.13.1

$$Q=kx+c\dot{x} \qquad (1.12.12)$$

Legea vibraţiilor staţionare în acest caz se scrie:

$$x=A\cdot cos(\omega t-\theta)$$
$$\dot{x}=-\omega A\cdot sin(\omega t-\theta) \qquad (1.12.13)$$

$$unde: A=\frac{q}{\sqrt{\left(p^2-\omega^2\right)^2+\left(\frac{h}{m}\right)^2}}$$

şi forţa Q transmisă fundaţiei (1.12.12) se scrie deci sub forma:

$$Q=A\left[k\,cos(\omega t-\theta)-c\omega sin(\omega t-\theta)\right] \qquad (1.12.14)$$

Amplitudinea forţei transmise la fundaţie este:

$$Q_0=q\frac{\sqrt{k^2+h^2}}{\sqrt{\left(p^2-\omega^2\right)^2+\left(\frac{h}{m}\right)^2}}=\frac{F_0}{m}\frac{\sqrt{k^2+h^2}}{\sqrt{\left(p^2-\omega^2\right)^2+\left(\frac{h}{m}\right)^2}} \qquad (1.12.15)$$

Factorul de transmitere se scrie în acest caz:

$$T=\frac{Q_0}{F_0}=\frac{\sqrt{p^4+\left(\frac{h}{m}\right)^2}}{\sqrt{\left(p^2-\omega^2\right)^2+\left(\frac{h}{m}\right)^2}} \qquad (1.12.16)$$

Utilizând coeficientul de amortizare histeretică $\frac{h}{k}=g$ şi notând $\eta=\frac{\omega}{p}$, pulsaţia relativă expresia factorului de transmitere se scrie în acest caz:

$$T(\eta)=\sqrt{\frac{1+g^2}{\left(1-\eta^2\right)^2+g^2}} \qquad (1.12.17)$$

Reprezentând grafic funcția factorul de transmitere T pentru patru valori ale coeficientului de amortizare histeretică $(g=0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}5;\ 1)$ se obțin curbele de răspuns în frecvențe din figura 1.12.5.

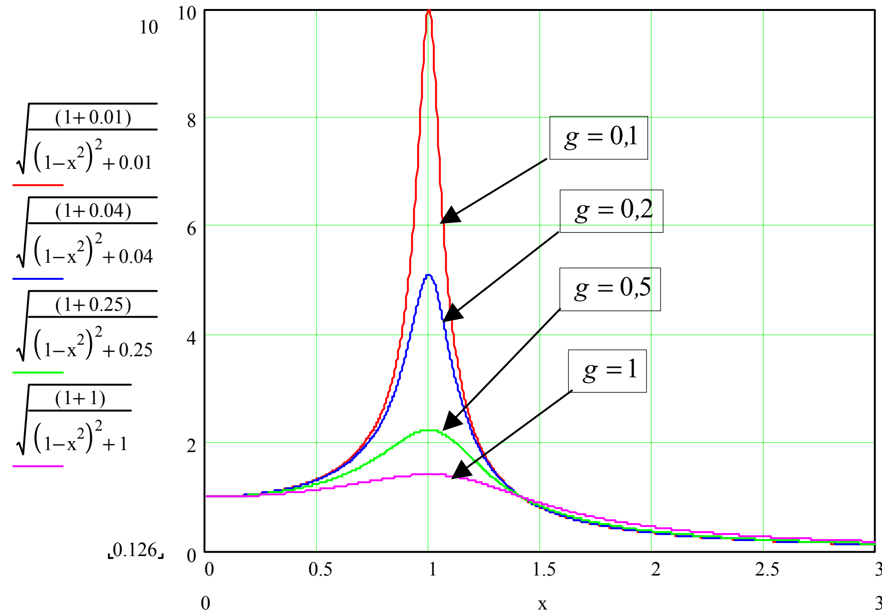


Fig.1.12.5. Variația factorului de transmitere T cu pulația relativă η pentru diferite valori ale coeficientului de amortizare histeretică g

Din figura 1.12.5 se observă ca și în cazul precedent că toate curbele trec print-un punct fix de coordonate $\left(\eta=\sqrt{2}\,,\ T=1\right)$. Într-adevăr înlocuind $\eta=\sqrt{2}$ în relația (1.12.17) rezultă $T=1$ care este independent de factorul de amortizare.

Valoarea maximă a factorului de transmitere se obține prin anularea derivatei expresiei (1.12.17):

$$\left(T^2\right)'=\left(\frac{1+g^2}{\left(1-\eta^2\right)^2+g^2}\right)'=\frac{4\eta\left(1-\eta^2\right)\left(1+g^2\right)}{\left[\left(1-\eta^2\right)^2+g^2\right]^2}=0 \quad\Rightarrow\quad \eta_m=1 \qquad (1.12.18)$$

Se obține valoarea transmisibilității maxime:

$$T_m=\sqrt{1+\frac{1}{g^2}} \qquad (1.12.19)$$

Reprezentând grafic factorul de transmitere maxim funcţie de coeficientul de amortizare histeretică se obţin curbele de răspuns în frecvenţe din figura 1.12.6.

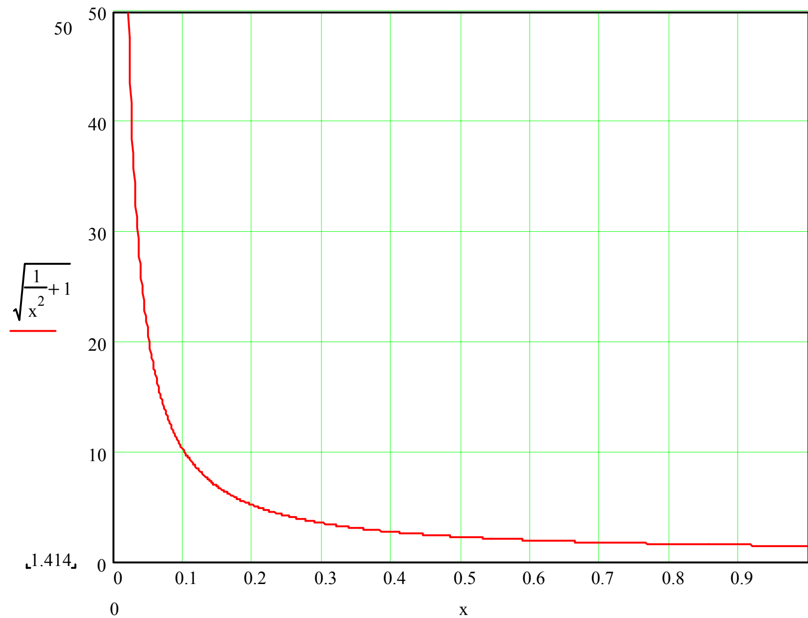


Fig.1.12.6. Variaţia factorului de transmitere maxim funcţie de coeficientul de amortizare histeretică g

Din analiza diagramelor din figurile 1.12.5 şi 1.12.6 se pot trage aceleaşi concluzii ca şi în cazul precedent.

1.13.3. Izolarea antivibratorie pasivă în cazul utilizării modelului vâsco-elastic Hooke-Maxwell

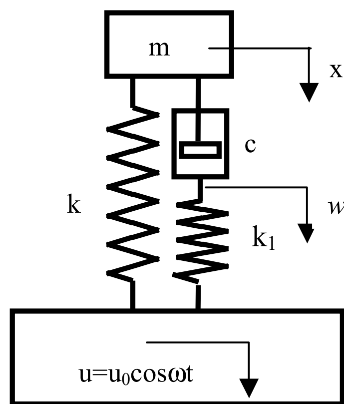


Fig. 1.13.2

Se consideră un sistem format dintr-un corp de masă *m* (fig. 1.13.18) legat de fundaţie cu un arc având constanta elastică *k* şi un amortizor hidraulic având coeficientul de amortizare *c* în serie cu un arc având constanta elastică $k_1=Nk$, *N*- factor de cuplare) . Mişcarea fundaţiei este pe direcţie verticală după legea :

$$u = u_0 \cos \omega t \qquad (1.13.9)$$

Ecuaţia fundamentală a dinamicii în acest caz se scrie:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{w}) + k(x - u) = 0 \qquad (1.13.10)$$

Ținând seama că forța din elementul amortizor este egală cu forța elastică din arcul k_1:

$$c(\dot{x}-\dot{w})=Nk(w-u)\Rightarrow\ m\ddot{x}+kx+Nkw=(N+1)ku \qquad (1.13.11)$$

sau în complex: $m\ddot{z}+kz+Nk\widetilde{w}=(N+1)k\widetilde{u}$ (1.13.12)

Înlocuind expresiile complexe ale variabilelor:

$$z=A_0e^{i(\omega t-\varphi)};\quad \widetilde{w}=w_0e^{i(\omega t-\theta)};\quad \widetilde{u}=u_0e^{i\omega t} \qquad (1.13.13)$$

din prima ecuație rezultă:

$$w_0e^{-i\theta}=\frac{Nku_0+ic\omega A_0e^{-i\varphi}}{Nk+ic\omega} \qquad (1.13.14)$$

din a doua ecuație rezultă:

$$\left(k-m\omega^2\right)A_0e^{-i\varphi}+Nkw_0e^{-i\theta}=(N+1)ku_0 \qquad (1.13.15)$$

Înlocuind expresia (1.13.14) în (1.13.15) rezultă:

$$\left(k-m\omega^2\right)A_0e^{-i\varphi}+Nk\frac{Nku_0+ic\omega A_0e^{-i\varphi}}{Nk+ic\omega}=(N+1)ku_0 \qquad (1.13.16)$$

împărțind relația (1.13.16) la k și notând:

$$\frac{m}{k}=\frac{1}{p^2};\quad \frac{\omega}{p}=\eta;\quad \frac{\alpha}{p}=\zeta;\quad \frac{c\omega}{k}=\frac{c}{m}\frac{m\omega}{k}=2\frac{\alpha}{p}\frac{\omega}{p}=2\eta\zeta \qquad (1.13.17)$$

se obține:

$$\left[\left(1-\eta^2\right)+\frac{2i\eta\zeta}{1+\dfrac{2i\eta\zeta}{N}}\right]A_0e^{-i\varphi}=\frac{1+\dfrac{2i\eta\zeta}{N}(N+1)}{1+\dfrac{2i\eta\zeta}{N}}u_0 \qquad (1.13.18)$$

sau:

$$\left[\left(1-\eta^2\right)\left(1+\frac{2i\eta\zeta}{N}\right)+2i\eta\zeta\right]A_0e^{-i\varphi}=\left(1+\frac{2i\eta\zeta}{N}(N+1)\right)u_0 \qquad (1.13.19)$$

Amplitudinea mişcării este:

$$A_0=u_0\sqrt{\frac{1+\left(2\eta\zeta\dfrac{N+1}{N}\right)^2}{\left(1-\eta^2\right)^2+\left(\dfrac{2\eta\zeta}{N}\right)^2(N+1-\eta)^2}} \qquad (1.13.20)$$

În figura 1.13.3 sunt date variațiile amplitudinii pentru patru moduri de amortizare: $\zeta=0.1$; $\zeta=0.2$; $\zeta=0.4$ şi $\zeta=0.8$ (N=1)

Factorul de transmitere se scrie în acest caz:

$$T=\frac{A_0}{u_0}=\sqrt{\frac{1+\left(2\eta\zeta\dfrac{N+1}{N}\right)^2}{\left(1-\eta^2\right)^2+\left(\dfrac{2\eta\zeta}{N}\right)^2(N+1-\eta)^2}} \qquad (1.13.21)$$

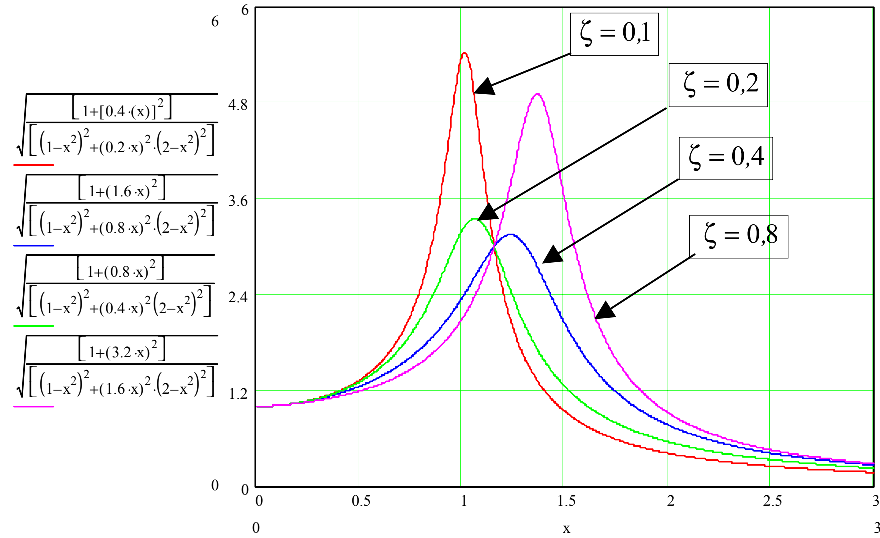


Fig.1.13.3 Variația amplitudinii vibrațiilor pentru patru valori ale factorului de amortizare ζ=0,1; 0,2; 0,4 şi ζ=0,8 şi pentru o valoare factorului de cuplare *N=1*.

În figura 1.13.4 sunt date variațiile factorului de transmitere (a amplitudinii mişcării) pentru trei valori ale factorului de cuplare: *N=1; N=5 şi N=10 (ζ=0.5).*

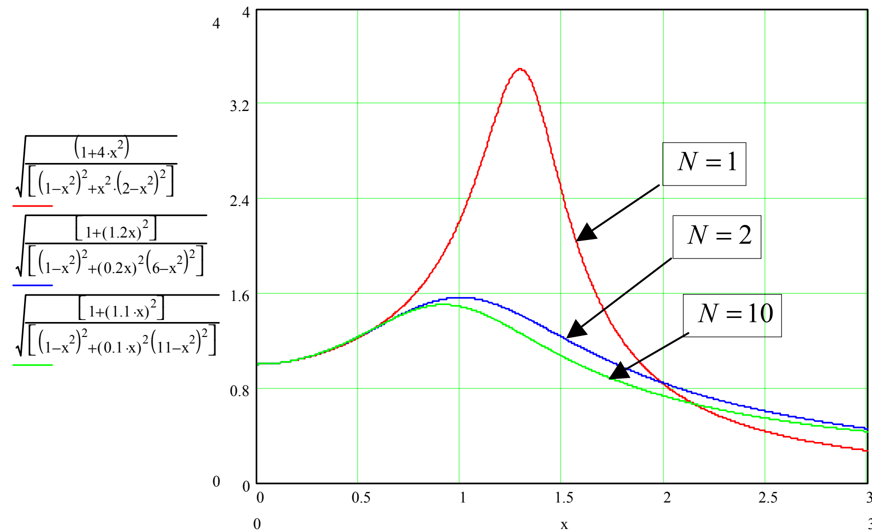


Fig.1.13.4 Variația amplitudinii vibrațiilor pentru trei valori ale factorului de cuplare *N=1; N= 5 şi N=10* şi pentru o valoare factorului de amortizare *ζ=0,5*

1.13.4. Izolarea antivibratorie pasivă în cazul utilizării modelului histeretic Hooke-Maxwell

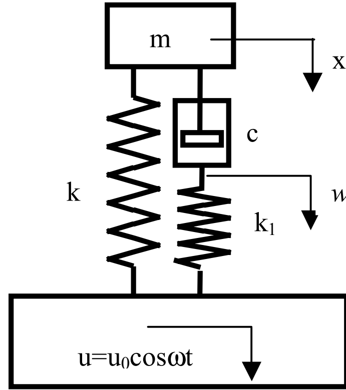


Fig. 1.13.5

Se consideră un sistem format dintr-un corp de masă *m* (fig. 1.13.5) legat de fundaţie cu un arc având constanta elastică *k* şi un amortizor hidraulic având coeficientul de amortizare histeretic $c = h/\omega$ legat în serie cu un element elastic având constanta elastică k_1 (k_1=*Nk, N* - factor de cuplare). Mişcarea fundaţiei este pe direcţie verticală după legea :

$$u = u_0 \cos \omega t \qquad (1.13.22)$$

Ecuaţia fundamentală a dinamicii în acest caz se scrie:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{w}) + k(x - u) = 0 \qquad (1.13.23)$$

Ţinând seama că forţa din elementul amortizor este egală cu forţa elastică din arcul având constanta elastică k_1=*Nk:*

$$c(\dot{x} - \dot{w}) = Nk(w - u) \qquad (1.13.24)$$

înlocuind în ecuaţia (1.13.23) rezultă:

$$m\ddot{x} + kx + Nkw = (N+1)ku \qquad (1.13.25)$$

sau în complex:

$$m\ddot{z} + kz + Nk\tilde{w} = (N+1)k\tilde{u} \qquad (1.13.26)$$

Înlocuind expresiile complexe ale variabilelor:

$$z = A_0 e^{i(\omega t - \varphi)}; \quad \tilde{w} = w_0 e^{i(\omega t - \theta)}; \quad \tilde{u} = u_0 e^{i\omega t} \qquad (1.13.27)$$

în ecuaţia (1.13.93) rezultă:

$$w_0 e^{-i\theta} = \frac{Nku_0 + ihA_0 e^{-i\varphi}}{Nk + ih} \qquad (1.13.28)$$

iar în a doua ecuaţie rezultă:

$$\left(k - m\omega^2\right)A_0 e^{-i\varphi} + Nkw_0 e^{-i\theta} = (N+1)ku_0 \qquad (1.13.29)$$

Înlocuind expresia (1.13.28) în (1.13.29) rezultă:

$$\left(k - m\omega^2\right)A_0 e^{-i\varphi} + Nk\frac{Nku_0 + ihA_0 e^{-i\varphi}}{Nk + ih} = (N+1)ku_0 \qquad (1.13.30)$$

împărţind relaţia (1.13.30) la *k* şi notând:

$$\frac{m}{k} = \frac{1}{p^2}; \quad \frac{\omega}{p} = \eta; \quad \frac{h}{k} = g \qquad (1.13.31)$$

se obţine:

$$\left[\left(1 - \eta^2\right) + \frac{ig}{1 + \frac{ig}{N}}\right]A_0 e^{-i\varphi} = \frac{1 + ig\frac{N+1}{N}}{1 + \frac{ig}{N}}u_0 \qquad (1.13.32)$$

sau: $$\left[\left(1-\eta^2\right)\left(1+\frac{ig}{N}\right)+ig\right]A_0 e^{-i\varphi}=\left(1+ig\frac{N+1}{N}\right)u_0 \qquad (1.13.33)$$

Amplitudinea mişcării este:

$$A_0=u_0\sqrt{\frac{1+\left(g\frac{N+1}{N}\right)^2}{\left(1-\eta^2\right)^2+\left(\frac{g}{N}\right)^2(N+1-\eta)^2}} \qquad (1.13.34)$$

Factorul de transmitere se scrie în acest caz:

$$T=\frac{A_0}{u_0}=\sqrt{\frac{1+\left(g\frac{N+1}{N}\right)^2}{\left(1-\eta^2\right)^2+\left(\frac{g}{N}\right)^2(N+1-\eta)^2}} \qquad (1.13.35)$$

Factorul de transmitere în acest caz are aceeaşi expresie ca în cazul izolării antivibratorii active (1.12.65) şi exprimă raportul amplitudinilor celor două mişcări.

1.14.Relații energetice pentru studiul vibrațiilor

1.14.1. Cazul vibrațiilor libere neamortizate

Ecuația diferențială a vibrațiilor libere ale unui sistem conservativ cu un grad de libertate conform (1.2.2) se scrie:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad (1.14.1)$$

Ținând seama că:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\dot{x} \qquad (1.14.2)$$

şi introducând în (1.14.1) se obține:

$$m \cdot \dot{x} \cdot d\dot{x} + k \cdot x \cdot dx = 0 \qquad (1.14.3)$$

Integrând ecuația diferențială (1.14.3) se obține:

$$\int_{v_0}^{v} m\dot{x}\, d\dot{x} = -\int_{x_0}^{x} kx\, dx \qquad (1.14.4)$$

sau: $$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -\frac{kx^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2} \qquad (1.14.5)$$

s-a obținut astfel expresia teoremei conservării energiei într-un sistem nedisipativ:

$$E_1 - E_0 = -V \qquad (1.14.6)$$

unde: $E_1 = \frac{mv^2}{2}$ este energia cinetică a corpului la momentul t

$E_0 = \frac{mv_0^2}{2}$ – energia cinetică a corpului la momentul inițial ($t=0$)

$V = -\frac{kx^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2}$ – energia potențială acumulată în elementul elastic la momentul *t:* dacă se consideră că la momentul inițial :

$x(0) = 0;\ \dot{x}(0) = v_0$ se obține: $V = -\frac{kx^2}{2}$ (1.14.7)

Dacă se înlocuiesc expresiile deplasării x şi ale vitezei $\dot{x}$ în relația (1.14.6):

$$x = \frac{v_0}{p} \sin pt; \quad v = \dot{x} = v_0 \cos pt \qquad (1.14.8)$$

se obține:

$$\frac{mv_0^2}{2}\left(\cos^2 pt - 1\right) = -\frac{k}{2}\left(\frac{v_0}{p}\right)^2 \sin^2 pt \;\Rightarrow\; m = \frac{k}{p^2} \qquad (1.14.9)$$

Dacă se exprimă cele două forme de energie în funcție de timp şi se notează:

$$E_0 = E_{max} = \frac{mv_0^2}{2}; \quad V = V_{min} = -\frac{k}{2}\left(\frac{v_0}{p}\right)^2 \qquad (1.14.10)$$

se obține:

$$\begin{cases} E(t) = E_{max}\cos^2 pt = E_{max}\dfrac{1+\cos(2pt)}{2} \\ V(t) = V_{min}\sin^2 pt = V_{min}\dfrac{1-\cos(2pt)}{2} \end{cases} \qquad (1.14.11)$$

Deoarece $E_{max} = V_{min}$, din ultima expresie rezultă că energia cinetică scade transformându-se în energie potențială şi invers (sau cele două energii sunt în opoziție de fază) cu o frecvență $f_E = p/\pi$ de două ori mai mare decât frecvența vibrației: $f = p/2\pi$.

Integrând expresia energiei cinetice (1.14.11) pe un interval corespunzător unei perioade ($T_E = \dfrac{\pi}{p}$) şi raportând la această perioadă se obține valoarea medie:

$$E_m = \frac{1}{T_E}\int_0^{T_E}\frac{E_{max}}{2}(1-\cos 2pt)dt = \frac{p}{\pi}\frac{\pi}{2p}E_{max} = \frac{E_{max}}{2} \qquad (1.14.12)$$

Variația deplasării, energiei cinetice şi potențiale $10\cdot x(t),\ E(t)\ si\ V(t)$ pentru următoarele valori particulare ale parametrilor este dată în figura 1.14.1:

$$v_0 = 2\ m/s;\ m = 5\ kg;\ k = 500\ N/m\ \Rightarrow p = 10\ rad/s;\ E_{max} = 20\ Nm \qquad (1.14.13)$$

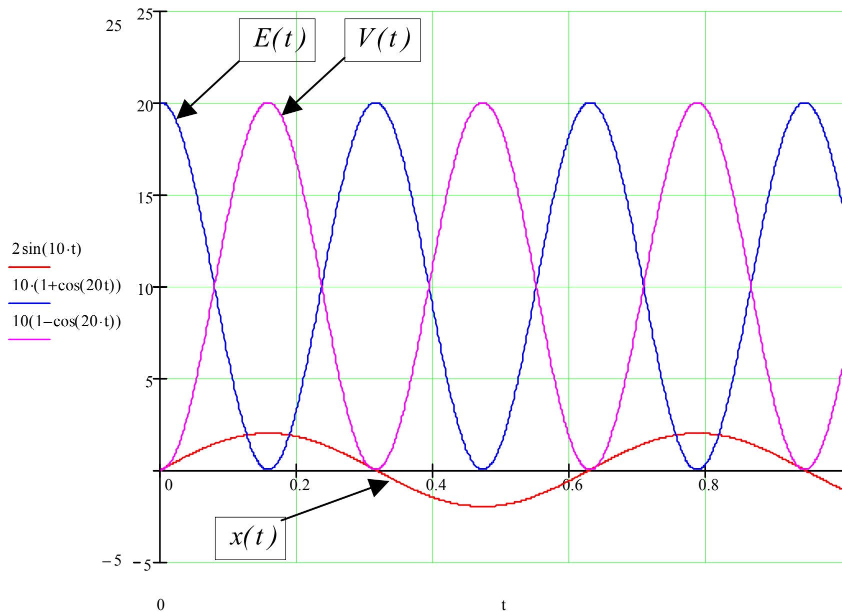


Fig. 1.14.1. Variația deplasării, energiei cinetice şi potențiale funcție de timp

1.14.2. Cazul vibrațiilor libere cu amortizare vâscoasă

Se consideră cazul în care rădăcinile ecuației caracteristice sunt complexe. Soluția este de forma:

$$x = e^{-nt}\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + nx_0}{\beta}\right)^2}\, cos(p_1 t - \varphi_0); \qquad tg\varphi_0 = \frac{v_0 + nx_0}{p_1 x_0} \qquad (1.14.14)$$

Se consideră condițiile inițiale (1.14.7): $x(0) = x_0;\ \dot{x}(0) = v_0$ astfel încât soluția (1.14.14) se scrie:

$$x = e^{-nt}\frac{v_0}{p_1} cos\left(p_1 t - \frac{\pi}{2}\right) = e^{-nt}\frac{v_0}{p_1} sin\, p_1 t \qquad (1.14.15)$$

Expresia vitezei este:

$$\dot{x} = e^{-nt}\frac{v_0}{p_1}\left(-n\, sin\, p_1 t + p_1\, cos\, p_1 t\right) \qquad sau$$

$$\dot{x} = e^{-nt}\frac{v_0}{p_1}\sqrt{n^2 + p_1^2}\, cos(p_1 t + \theta), \qquad tg\theta = \frac{n}{p_1} \qquad (1.14.16)$$

La momentul de timp corespunzătoare lui:

$$p_1 t + \theta = 2k\pi \ \Rightarrow\ t_{2k} = \frac{1}{p_1}(2k\pi - \theta) \qquad (1.14.17)$$

valorile vitezei şi ale energiei cinetice sunt maxime:

$$v_{2k} = e^{-nt_{2k}}\frac{v_0}{p_1}\sqrt{n^2 + p_1^2} \qquad \Rightarrow\ E_{2k} = mv_0^2\frac{n^2 + \beta^2}{2p_1^2} e^{-2nt_{2k}} \qquad (1.14.18)$$

Micşorarea energiei cinetice într-un ciclu cuprins între $(t_{2k},\ t_{2k+2})$ este:

$$\Delta E_{2k} = E_{2k+2} - E_{2k} = mv_0^2\frac{n^2 + p_1^2}{2p_1^2}\left(e^{-2nt_{2k+2}} - e^{-2nt_{2k}}\right) \qquad (1.14.19)$$

Ținând seama de definiția decrementului logaritmic: $\delta = 2\pi\frac{n}{p_1}$ se obține:

$$\Delta E_{2k} = mv_0^2\frac{n^2 + \beta^2}{2p_1^2} e^{-2\delta\left(k - \frac{\theta}{2\pi}\right)}\left(1 - e^{-2\delta}\right) \qquad (1.14.20)$$

Variația energiei cinetice maxime E_{2k} la momentul t_{2k} pentru următoarele valori particulare ale parametrilor este dată în figura 1. 14.2:

$n = 1/20;\ p_1 = 1;\ m = 0{,}5kg;\ v_0 = 2m/sec$

Se defineşte *capacitatea de amortizare* pierderea relativă de energie datorită amortizării ca raport dintre variația energiei pentru un ciclu şi energia cinetică maximă corespunzătoare începutului ciclului:

$$\psi = \frac{\Delta E_{2k}}{E_{2k}}\cdot 100\ \% \qquad (1.14.21)$$

Înlocuind expresiile celor două energii (1.14.20) şi (1.14.18) *capacitatea de amortizare*: $\psi = 100\left(1 - e^{-2\delta}\right)$; (1.14.21')

unde $\delta = \dfrac{2\pi\alpha}{\beta} = 2\pi \dfrac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$ este decrementul logaritmic.

Pentru acest tip de amortizare ea este constantă pentru fiecare ciclu, depinzând de factorul de amortizare ζ.

Variația *capacității de amortizare p*entru următoarele valorile particulare (1.14.13) ale parametrilor este dată în figura 1.14.3

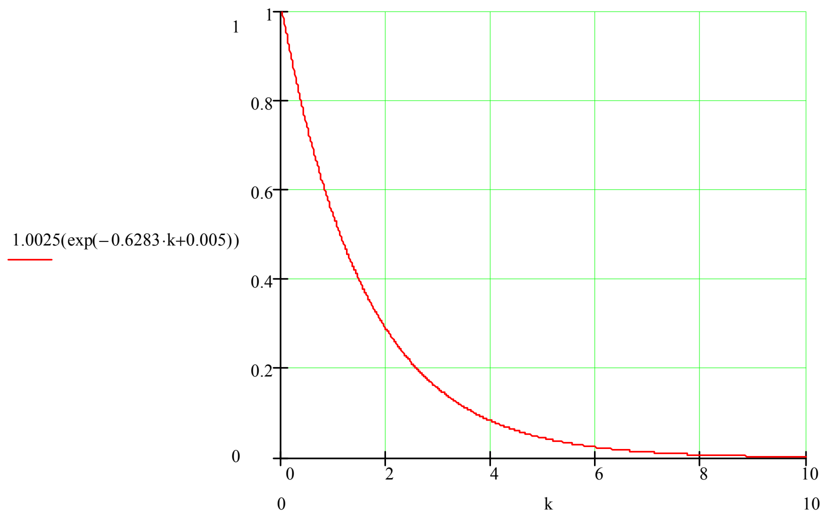


Fig. 1.14.2. Variația energiei cinetice maxime E_{2k}

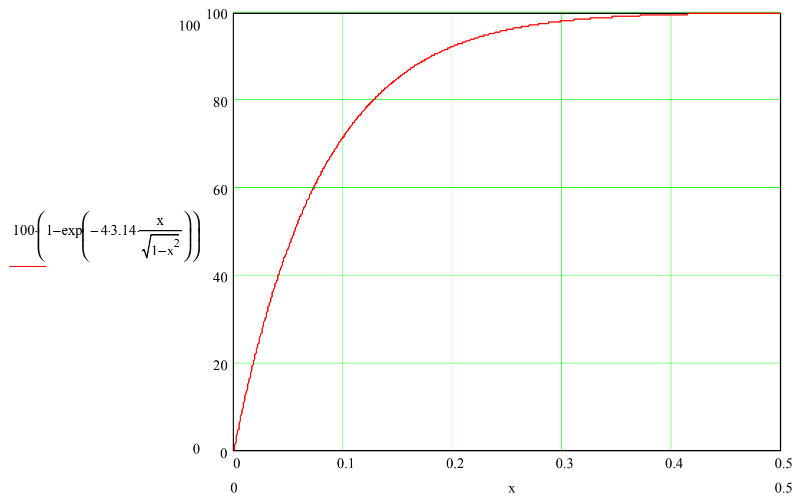


Fig. 1.14.3 Variația capacității de amortizare ψ cu factorul de amortizare ζ

1.14.3. Cazul vibrațiilor libere cu amortizare uscată

Ținând seama de relațiile (1.4.17) în semiperioada $t \in \left((k-1)\frac{\pi}{p}, k\frac{\pi}{p}\right)$ soluția se scrie:

$$\begin{cases} x = (x_0 - 2ka + a)\cos pt - (-1)^k a \\ \dot{x} = -p(x_0 - 2ka + a)\sin pt \end{cases} \quad \text{unde} \quad a = \frac{\mu mg}{k} \qquad (1.14.22)$$

Pentru $k=1$ şi $k=2$ se obțin soluțiile (1.4.6) şi (1.4.13):

$$\begin{cases} x = (x_0 - a)\cos pt + a \\ \dot{x} = -p(x_0 - a)\sin pt \end{cases} \quad \text{respectiv:} \qquad (1.14.23)$$

$$\begin{cases} x = (x_0 - 3a)\cos pt - a \\ \dot{x} = -p(x_0 - 3a)\sin pt \end{cases} \qquad (1.14.23')$$

Considerând schimbarea de variabilă: $t = (k-1)\pi / p, \ k \in R$ soluția (1.14.22) se scrie analitic sub forma:

$$\begin{cases} x = (x_0 - 2int(k)a + a)\cos(k-1)\pi - (-1)^k a \\ \dot{x} = -p(x_0 - 2int(k)a + a)\sin(k-1)\pi \end{cases} \qquad (1.14.24)$$

Pentru valorile parametrilor date de (1.4.19) soluția analitică (1.14.24) se scrie astfel:

$$\begin{cases} x = (11 - 2\cdot ceil(k-1))\cos(k-1)\pi - (-1)^{ceil(k-1)} & (mm) \\ \dot{x} = -0.1\,(11 - 2\cdot ceil(k-1))\sin(k-1)\pi & (m/s) \end{cases} \qquad (1.14.25)$$

unde $ceil(k) = [k]+1 \quad si \quad ceil(k-1) = [k]$ (1.14.26)

Reprezentările grafice ale deplasării şi vitezei pentru acest caz particular sunt date în figura 1.14.4 (deplasarea se măsoară în *mm* iar viteza în *dm/s*)

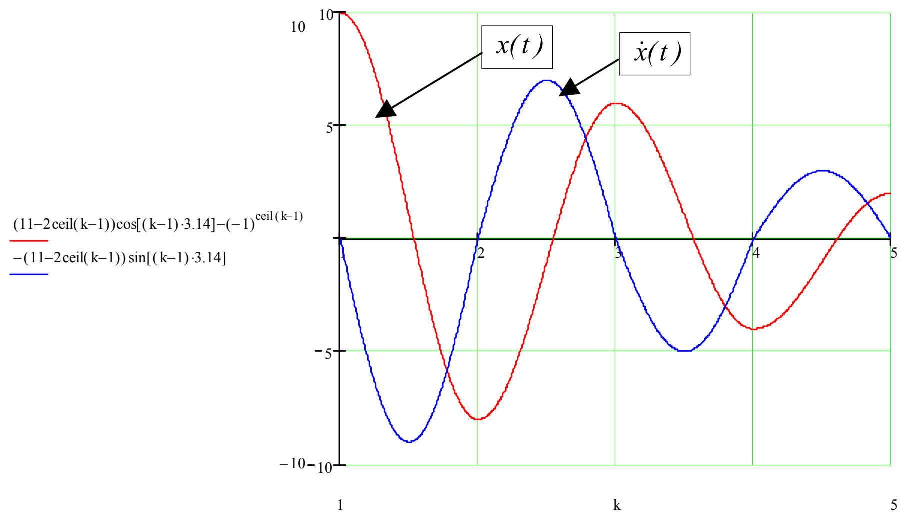


Fig. 1.14.4 Variația deplasării şi vitezei funcție de timp

Ținând seama de (1.14.24), energia cinetică a oscilatorului cu amortizare uscată şi energia potențială a arcului, au expresiile:

$$\begin{cases} E = \dfrac{m\dot{x}^2}{2} = \dfrac{mp^2}{2}\left[(x_0 - 2\,int(k)\,a + a)sin(k-1)\pi\right]^2 \\ V = \dfrac{kx^2}{2} = \dfrac{mp^2}{2}\left[(x_0 - 2\,int(k)\,a + a)cos(k-1)\pi - (-1)^{int(k)}a\right]^2 \end{cases} \tag{1.14.27}$$

Pentru valori ale parametrilor date de (1.4.19 variațiile în timp ale energiei cinetice şi potențiale date de relațiile (1.14.27) s-au reprezentat în fig. 1.14.5:

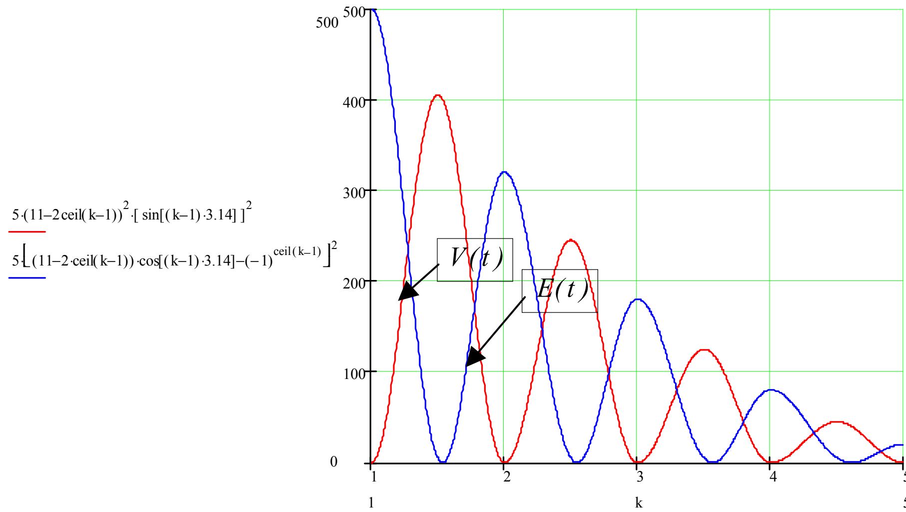


Fig. 1.14.5. Variațiile în timp ale energiei cinetice şi potențiale

Se observă din cele două diagrame că energia potențială scade transformându-se în energie cinetică şi invers cu o frecvență de două ori mai mare decât frecvența vibrației ($f = p/\pi$), însă această transformare se face cu disipare de energie datorită forței de frecare. Astfel:

- după prima semiperioadă $\left(t = \dfrac{T_E}{2} = \dfrac{\pi}{2p}\right)$ (fig. 11.1.5) energia totală este:

$$E_{tot} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{mp^2}{2}\left[(x_0 - a)^2 + a^2\right] \tag{1.14.28}$$

şi variația față de energia totală la momentul inițial $\left(V = 0{,}5\,mp^2 x_0^2\right)$ este :

$$\Delta E_{tot} = \frac{mp^2}{2}\left[x_0^2 - (x_0 - a)^2 - a^2\right] = mp^2 a(x_0 - a) \tag{1.14.29}$$

Lucrul mecanic al forței de frecare pentru acelaşi interval este integrala:

$$L = \int R dx = \int_0^T R\dot{x}dt = -\int_0^{\pi/2p} \mu mgp(x_0 - a)\sin pt\ dt = ak(x_0 - a) \tag{1.14.30}$$

- după prima perioadă $\left(T_E = \dfrac{\pi}{p}\right)$ (fig. 11.1.5) energia cinetică este nulă iar energia totală este egală cu energia potențială:

$$V = \frac{k(x_0 - 2a)^2}{2} \tag{1.14.31}$$

scăzând față de energia totală la momentul inițial $\left(V = \dfrac{mp^2 x_0^2}{2}\right)$ cu :

$$\Delta V = \frac{k}{2}\left[x_0^2 - (x_0 - 2a)^2\right] = 2mp^2 a(x_0 - a) \tag{1.14.32}$$

Lucrul mecanic al forței de frecare pentru același interval este integrala:

$$L = \int R dx = \int_0^T R\dot{x} dt = \int_0^{\frac{\pi}{p}} \mu mgp(x_0 - a) \sin pt\, dt = 2ak(x_0 - a) \tag{1.14.33}$$

Se observă că variația energiei totale este egală cu lucrul mecanic al forțelor de frecare, sistemul este disipativ .

1.14.4. Cazul vibrațiilor forțate cu amortizare vâscoasă

Soluția vibrațiilor staționare conform (1.6.14)

$$x = A\cos(\omega t - \theta)$$

$$A = \frac{q}{\sqrt{\left(p^2 - \omega^2\right)^2 + 4n^2\omega^2}}; \quad tg\theta = \frac{2n\omega}{p^2 - \omega^2} \tag{1.14.34}$$

Dacă se înlocuiesc în relația (1.14.34):

$$F_0 = qm; \quad A_0 = \frac{F_0}{k} = \frac{q}{p^2}; \quad \eta = \frac{\omega}{p}; \quad \zeta = \frac{n}{p} = \frac{c}{c_{cr}} \ . \tag{1.14.35}$$

se obține:

$$A = \frac{A_0}{\sqrt{\left(1 - \eta^2\right)^2 + 4\zeta^2\eta^2}}; \quad tg\theta = \frac{2\zeta\eta}{1 - \eta^2}$$

$$\sin\theta = \frac{2\zeta\eta}{\sqrt{\left(1 - \eta^2\right)^2 + 4\zeta^2\eta^2}} \tag{1.14.36}$$

Energia introdusă în sistem într-o perioadă este egală cu lucrul mecanic al forței perturbatoare în același interval de timp:

$$L_F = \int F dx = \int_0^T F\dot{x} dt = -\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F_0 \cos\omega t \cdot A\omega \sin(\omega t - \theta) dt \tag{1.14.37}$$

$$L_F = \pi F_0 A \sin\theta$$

Înlocuind expresia amplitudinii (1.14.34) şi expresia lui sinθ (1.14.36) se obţine:

$$L_F = \frac{2\pi\zeta\eta}{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4\zeta^2\eta^2} A_0 F_0 \qquad (1.14.38)$$

Energia disipată în sistem în aceeaşi perioadă T este egală cu lucrul mecanic al forţei vâscoase în acelaşi interval de timp:

$$L_R = \int R dx = \int_0^T R\dot{x}dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} A^2 c\omega^2 \sin^2(\omega t - \theta)dt \qquad (1.14.39)$$

$$L_R = \pi c\omega A^2$$

Se observă că expresia energiei disipate în sistem într-o perioadă depinde de pătratul amplitudinii *(A)*, de pulsaţia forţei perturbatoare şi *(ω)* şi de amortizare *(c)*. Dacă se înlocuieşte expresia lui A (1.14.34) în relaţia (1.14.36) se obţine:

$$L_R = \pi c\omega A^2 = \frac{\pi c\omega q^2}{\left(p^2-\omega^2\right)^2 + 4n^2\omega^2}$$

$$L_R = \frac{2\pi\zeta\eta}{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4\zeta^2\eta^2} A_0 F_0 \qquad (1.14.40)$$

Cele două expresii (1.14.38) şi (1.14.40) sunt egale ceea ce confirmă teorema conservării energiei totale a sistemului.

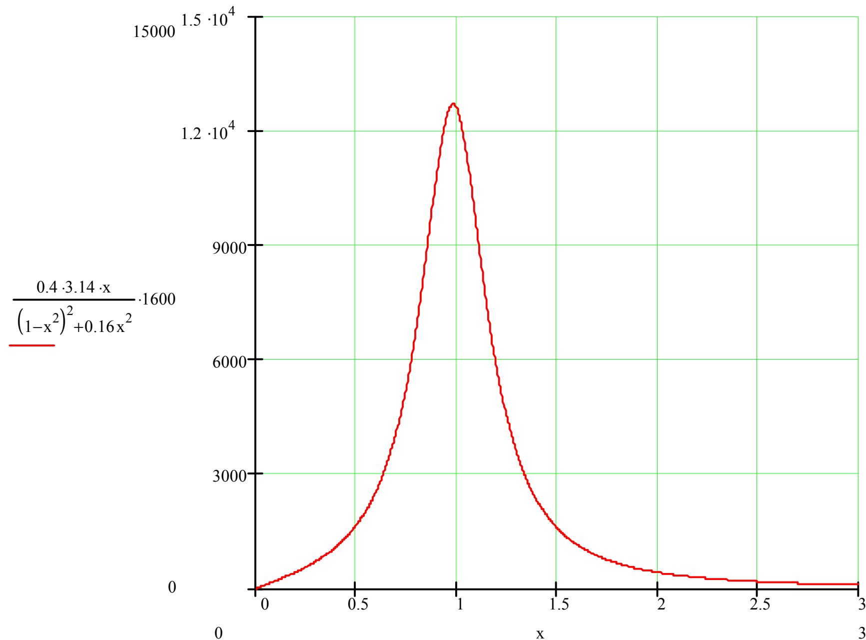


Fig.1.14.5. Variaţia energiei disipate în sistem într-o perioada cu pulsaţia relativă η

Reprezentând grafic energia disipată în sistem într-o perioadă în funcție de raportul pulsațiilor η pentru valorile particulare ale parametrilor

$F_0 = 1600;\ \ q = 1600;\ \ p = 40;\ \ n = 8\ \ \Rightarrow A_0 = 1;\ \ \zeta = 0.2$

se obține curba de disipare a energiei din figura 1.14.5.

Valoarea maximă a energiei disipate se obține pentru o valoare a pulsației sensibil mai mare decât cea corespunzătoare amplitudinii la rezonanță:

$$\left(\frac{L_R}{2\pi\zeta A_0 F_0}\right)' = \left(\frac{\eta}{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4\zeta^2\eta^2}\right)' = \frac{-3\eta^4 + 2\eta^2(1-\zeta^2) + 1}{\left(\left(1-\eta^2\right)^2 + 4\zeta^2\eta^2\right)^2} = 0 \tag{1.14.41}$$

$$\Rightarrow \eta_{mR} = \sqrt{\frac{1-2\zeta^2 + \sqrt{\left(1-2\zeta^2\right)^2 + 3}}{3}} \Rightarrow \eta_{mR} \cong \sqrt{1-\zeta^2}$$

Înlocuind în expresia energiei disipate se obține o expresie în funcție de A_r:

$$L_{Rm} = \frac{2\pi A_0 F_0\sqrt{1-\zeta^2}}{\left(4\zeta^2 - 3\zeta^4\right)} \approx \pi\frac{F_0}{A_0}\left(A_0\xi_r\right)^2$$
$$L_{Rm} \cong \pi\frac{F_0}{A_0}\left(A_r\right)^2 \tag{1.14.41'}$$

unde $A_r = \xi_m A_0 = \dfrac{A_0}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$ este amplitudinea vibrațiilor la rezonanță.

Folosind diagrama de variație prezentate mai sus se poate determina experimental valoarea factorului de amortizare ζ respective a coeficientului de amortizare c prin metoda punctelor de semiputere.

Pentru $A_{1,2} = A_r/\sqrt{2}$ se obține $L_R = L_{Rm}/2$ sau energia disipată la o amplitudine a vibrațiilor egală cu $A_{1,2}$ este jumătate din cea maximă.

Reprezentând grafic amplitudinea vibrațiilor amortizate în funcție de pulsația ω pentru valorile parametrilor $F_0 = 1600;\ \ q = 1600;\ \ p = 40;\ \ \nu = 8$ se obține curba de răspuns în frecvențe din figura 1.14.6. Linia corespunzătoare amplitudinii $A_{1,2} = A_r/\sqrt{2}$ intersectează graficul funcției A(ω) în două puncte şi corespunzător se obțin două pulsații e ω_2 şi ω_2 aşa cum se observă şi din figură. Cele două puncte de intersecție se numesc puncte de semiputere.

Cele două valori ale pulsației ω_2 şi ω_2 se pot calcula cu ajutorul ecuației:

$$\frac{A_0}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4\zeta^2\eta^2}} = \frac{A_0}{2\sqrt{2}\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \tag{1.14.42}$$
$$\eta^4 - 2\eta^2\left(1-2\zeta^2\right) - 8\zeta^2\left(1-\zeta^2\right) + 1 = 0$$

Rădăcinile acestei ecuații sunt:

$$\eta_1 = \frac{\omega_1}{p} \quad si \quad \eta_2 = \frac{\omega_2}{p} \tag{1.14.43}$$

Diferența celor două rădăcini este:

$$\eta_2 - \eta_1 = \frac{\Delta\omega}{p} = \sqrt{2\left(1 - 2\zeta^2 - \sqrt{1 - 8\zeta^2 + 8\zeta^4}\right)} \approx 2\zeta$$
$$\Rightarrow \quad \zeta = \frac{\Delta\omega}{2p} \tag{1.14.44}$$

Deci cu ajutorul punctelor de semiputere se poate determina de pe diagrama $A(\omega)$ factorul de amortizare $\zeta = \frac{c}{c_{cr}}$. O altă posibilitate de determinare a factorului de amortizare cu ajutorul diagramei $\xi(\omega)$ este măsurând valoarea factorului de amplificare maxim:

$$\xi_m = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \approx \frac{1}{2\zeta} \qquad \Rightarrow \zeta = \frac{1}{2\xi_m} \tag{1.14.45}$$

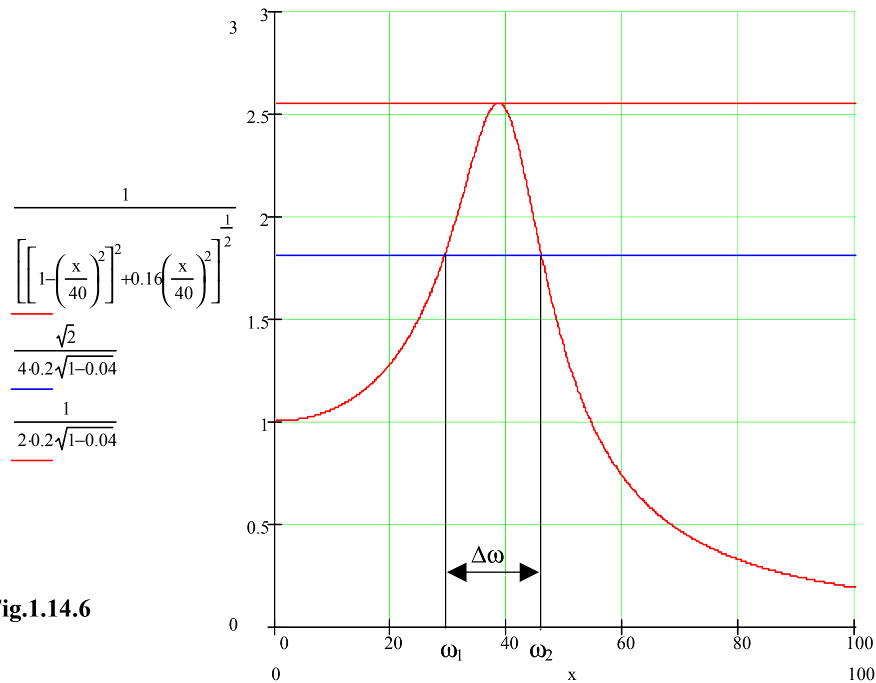


Fig.1.14.6

1.14.5. Puterea medie, instantanee, activă şi reactivă cazul vibrațiilor forțate cu amortizare vâscoasă

Puterea medie dezvoltată de sursa de vibrații este raportul dintre energia introdusă în sistem într-un ciclu (1.14.35) şi perioada T:

$$N_m = \frac{L_F}{T} = \frac{\pi F_0 A \sin\theta}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{1}{2}\omega F_0 A \sin\theta \tag{1.14.46}$$

Ținând seama de expresia (1.14.37):

$$\sin\theta = \frac{2\text{n}\omega}{\sqrt{\left(\text{p}^2-\omega^2\right)^2+4\text{n}^2\omega^2}} = \frac{2\zeta\eta}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2+4\zeta^2\eta^2}} \tag{1.14.47}$$

şi de relația (1.14.34):

$$\text{A} = \frac{\text{F}_0}{\text{m}\sqrt{\left(\text{p}^2-\omega^2\right)^2+4\text{n}^2\omega^2}} = \frac{\text{A}_0}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2+4\zeta^2\eta^2}} \tag{1.14.48}$$

expresia puterii medii dezvoltate de sursa (1.14.46) se mai scrie:

$$\begin{aligned} N_m &= \frac{\zeta\eta}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\zeta^2\eta^2}\omega F_0 A_0 \\ N_m &= \frac{\zeta\eta^2}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\zeta^2\eta^2} p F_0 A_0 \end{aligned} \tag{1.14.49}$$

Puterea medie disipată în sistem este raportul dintre energia disipată în sistem într-un ciclu (1.14.38) şi perioada T:

$$N_R = \frac{L_R}{T} = \frac{\zeta\eta}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\zeta^2\eta^2}\omega A_0 F_0 \tag{1.14.50}$$

S-a obținut acceaşi expresie a puterii medii dezvoltate ceea ce demonstrează teorema conservării energiei.

În figura 1.14.7. se reprezintă puterea medie dezvoltate de sursa (1.14.49) pentru valorile parametrilor:

$\text{F}_0 = 1600;\ \ \text{q} = 1600;\ \ \text{p} = 40;\ \ \text{n} = 8\ \ \Rightarrow \text{A}_0 = 1;\ \ \zeta = 0.2$

Pentru valorile parametrilor: $\omega = p = 40\ (\eta = 1);\ \ \theta = \pi/2$ aşa cum rezultă din figura 1.14.7 puterea medie dezvoltată de sursă (egală cu cea disipată) are valoarea maximă:

$$N_m = \frac{\zeta\eta^2}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\zeta^2\eta^2} p F_0 A_0 = 80.000 \tag{1.14.51}$$

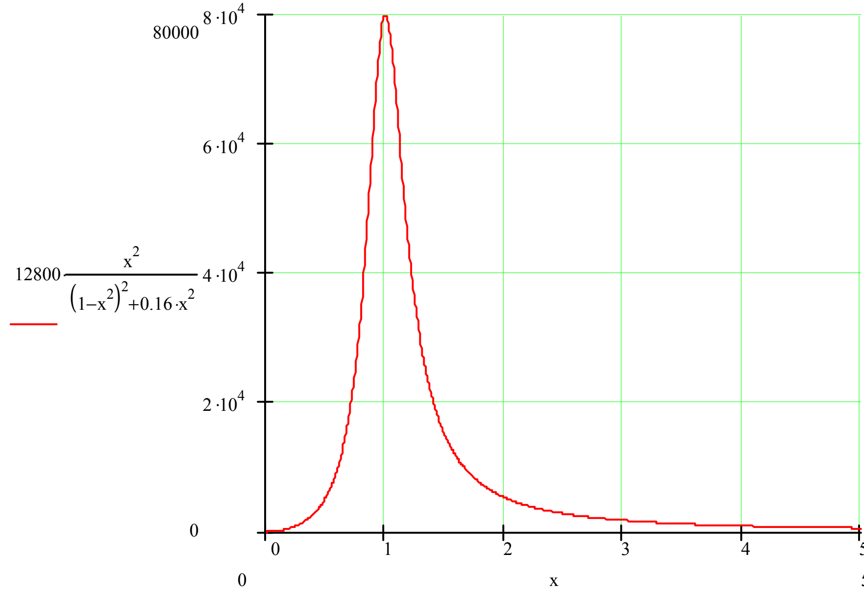


Fig.1.14.7. Variaţia puterii medii dezvoltate de sursa cu pulsaţia relativă

Puterea instantanee dezvoltată de sursă la un moment dat se scrie:

$$N = F \cdot \dot{x} = -F_0 A\omega cos\omega t\, sin(\omega t - \theta) = \frac{1}{2} F_0 A\omega sin\theta - \frac{1}{2} F_0 A\omega sin(2\omega t - \theta)$$
$$\Rightarrow N = N_m - \frac{1}{2} F_0 A\omega sin(2\omega t - \theta) \qquad (1.14.52)$$

$$N = pF_0 A_0 \left[\frac{\zeta\eta^2}{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4\zeta^2\eta^2} - \frac{1}{2}\frac{\eta}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4\zeta^2\eta^2}} sin(2\omega t - \theta) \right] \qquad (1.14.52')$$

Puterea instantanee dezvoltată de sursă este o funcţie armonică ce variază în jurul puterii medii cu o pulsaţie de două ori mai mare decât pulsaţia vibraţiilor staţionare. Valoarea maximă şi minimă a puterii instantanee dezvoltată de sursă este:

$$N_{max} = \frac{1}{2} F_0 A\omega\left(1 + sin\,\theta\right);$$
$$N_{min} = -\frac{1}{2} F_0 A\omega\left(1 - sin\,\theta\right) \qquad (1.14.53)$$

Pentru valorile parametrilor: $\omega = p = 40$ $(\eta = 1) \Rightarrow$ $\theta = \pi/2$ puterea instantanee are expresia analitică:

$$N(t) = 80000\left(1 + cos\,80t\right) \qquad (1.14.54)$$

şi variaţia pulsatorie este reprezentată în figura 1.14.8

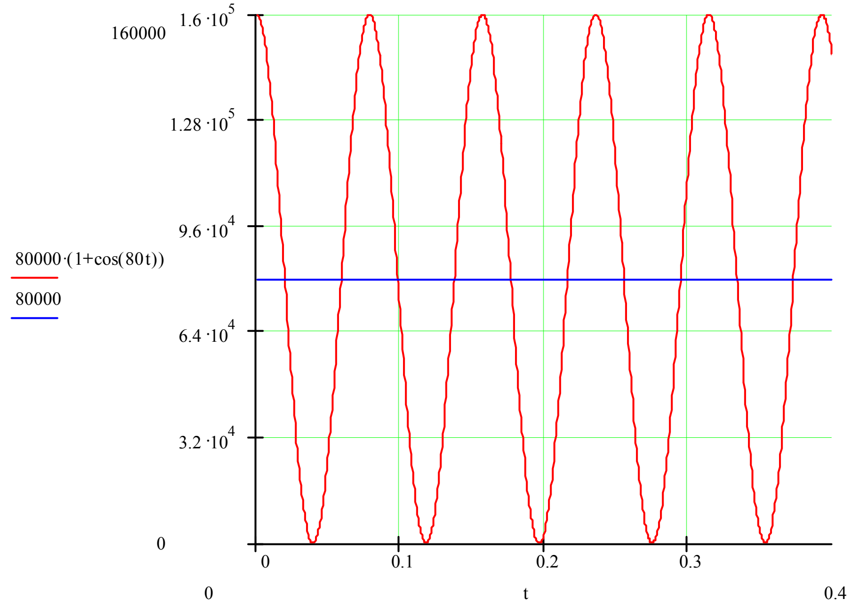


Fig.1.14.8. Variația puterii instantanee cu pulsația relativă

Expresia puterii instantanee dezvoltată de sursă la un moment dat (1.14.52) se mai scrie:

$$N = \frac{1}{2} F_0 A\omega [sin\theta - sin(2\omega t - 2\theta + \theta)] \Rightarrow$$
$$N = \frac{1}{2} F_0 A\omega sin\theta [1 - cos(2\omega t - 2\theta)] - \frac{1}{2} F_0 A\omega cos\theta [sin(2\omega t - 2\theta)] \qquad (1.14.55)$$

Primul termen al relației (1.14.55) corespunde puterii disipate de elementul amortizor:

$$N_1 = c\dot{x}^2 = c\omega^2 A^2 sin^2(\omega t - \theta) = \frac{1}{2} c\omega^2 A^2 [1 - cos(2\omega t - 2\theta)]$$
$$\Rightarrow N_1 = \frac{1}{2} F_0 A\omega sin\theta [1 - cos(2\omega t - 2\theta)] \qquad (1.14.56)$$

unde s-a ținit seama de relația: $c\omega = \frac{F_0}{A} sin\theta$ (1.14.57)

Amplitudinea acestei puteri se numește *putere instantanee activă:*

$$N_{act} = \frac{1}{2} F_0 A\omega sin\theta \qquad (1.14.58)$$

Al doilea tremen al relației (1.14.55) corespunde puterii disipate de masa m și de elementul elastic:

$$N_2 = (m\ddot{x} + kx)\dot{x} = -\omega A^2 (k - m\omega^2)\cdot cos(\omega t - \theta)\cdot sin(\omega t - \theta)$$
$$\Rightarrow N_2 = -\frac{1}{2}F_0 A\omega cos\theta\left[sin(2\omega t - 2\theta)\right] \quad (1.14.59)$$

unde s-a ținut seama de relația: $\left(k - m\omega^2\right) = \frac{F_0}{A}cos\theta$ (1.14.60)

Amplitudinea acestei puteri se numeşte *putere instantanee reactivă:*

$$N_{react} = \frac{1}{2}F_0 A\omega cos\theta \quad (1.14.61)$$

Ținînd seama de expresiile lui A, sin θ şi cos θ relațiile de mai sus se scriu:

$$N_{act} = pF_0 A_0 \frac{\zeta\eta^2}{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4\zeta^2\eta^2}$$
$$N_{react} = \frac{pF_0 A_0}{2}\frac{\eta\left(1-\eta^2\right)}{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4\zeta^2\eta^2} \quad (1.14.62)$$

În figurile 1.14.9, 1.14.10 şi 1.14.11 se prezintă *puterea instantanee activă şi reactivă* dezvoltate de sursa pentru valorile considerate mai sus ale parametrilor: $F_0 = 1600;\ q = 1600;\ p = 40;\ \zeta = 0.1;\ \zeta = 0.2\ si\ \zeta = 0.5$

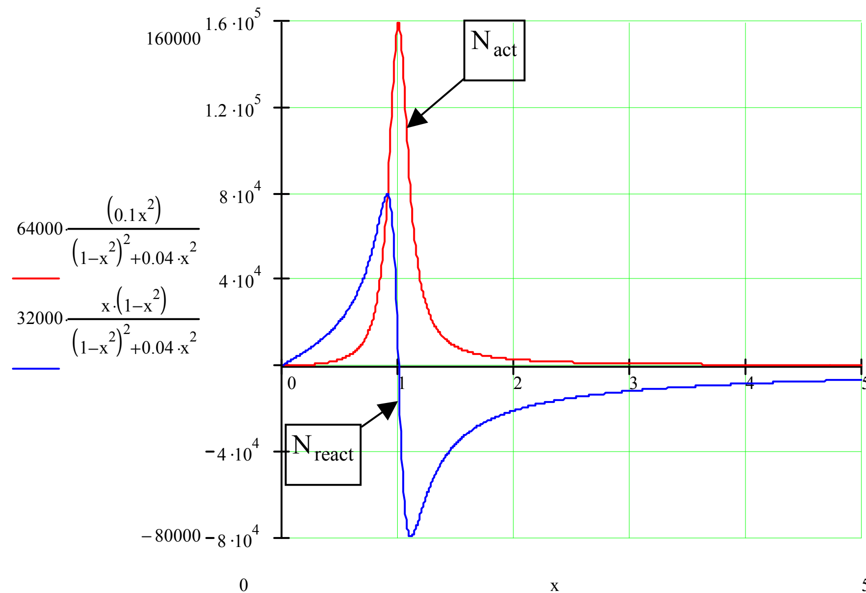


Fig.1.14.9. Variația puterii instantanee active şi reactive cu pulsația relativă pentru ζ =0,1

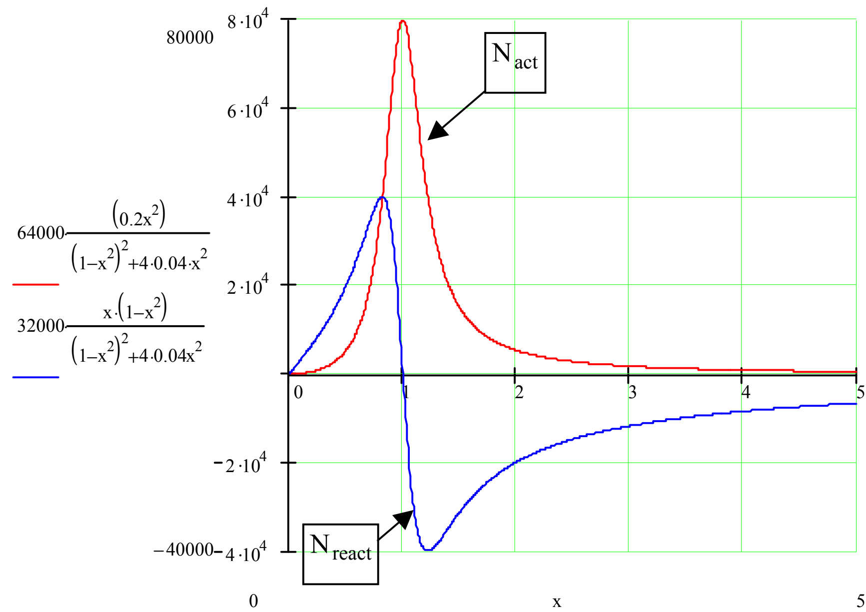


Fig.1.14.10. Variația puterii instantanee active şi reactive cu pulsația relativă pentru ζ =0,2

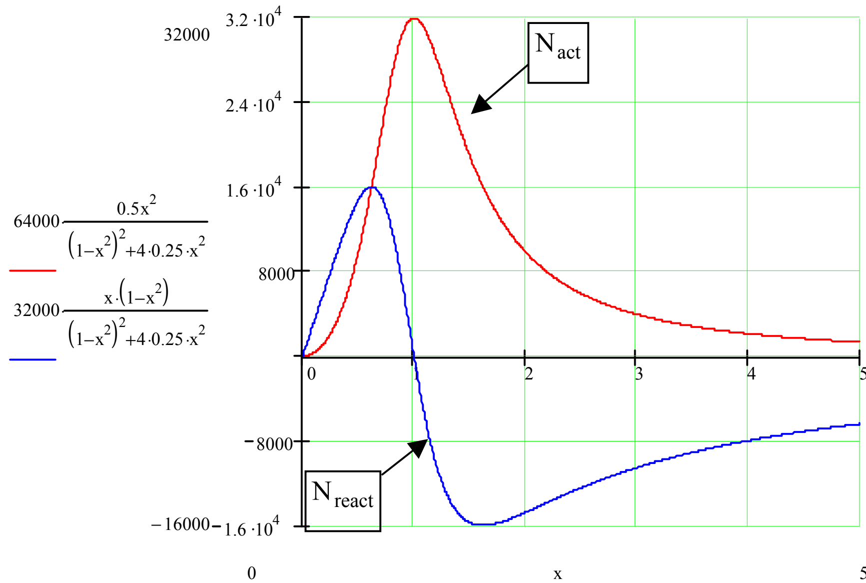


Fig.1.14.11. Variația puterii instantanee active şi reactive cu pulsația relativă pentru ζ =0,5

1.14.6. Relații energetice pentru cazul vibrațiilor forțate cu amortizare histeretică

Soluția vibrațiilor staționare cu amortizare histeretică conform (1.7.8) este:

$$x = A\,cos(\omega t - \theta)\ ;\ \ tg\theta = \frac{h}{m(p^2 - \omega^2)} \tag{1.14.44}$$

unde: amplitudinea reală a mişcării staționare este:

$$A = \frac{q}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{h}{m}\right)^2}} = \frac{A_0}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + g^2}} \tag{1.14.45}$$

unde: $h = c\omega;\quad F_0 = qm;\quad A_0 = \frac{F_0}{k} = \frac{q}{p^2};\quad \eta = \frac{\omega}{p};\quad g = \frac{h}{k}$. (1.14.46)

Energia introdusă în sistem într-o perioadă este egală cu lucrul mecanic al forței perturbatoare în acelaşi interval de timp:

$$L_F = \int F dx = \int_0^T F\dot{x}dt = -\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F_0\, cos\,\omega t \cdot A\omega sin(\omega t - \theta)dt \tag{1.14.47}$$

$$L_F = \pi F_0 A\, sin\,\theta$$

Energia disipată în sistem în aceeaşi perioadă este egală cu lucrul mecanic al forței vâscoase în acelaşi interval de timp:

$$L_R = \int R dx = \int_0^T R\dot{x}dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} A^2 c\omega^2\, sin^2(\omega t - \theta)dt \tag{1.14.48}$$

$$L_R = \pi c\omega A^2 = \pi h A^2$$

Cele două energii (introdusă şi disipată în sistem) sunt egale:

$$\pi F_0 A\, sin\,\theta = \pi h A^2 \Rightarrow sin\,\theta = \frac{h}{\sqrt{(p^2 - \omega^2) + \left(\frac{h}{m}\right)^2}} \tag{1.14.49}$$

$$\Rightarrow tg\theta = \frac{h}{m(p^2 - \omega^2)}$$

Se observă că expresia energiei disipate în sistem într-o perioadă pentru acest tip de amortizare depinde numai de pătratul amplitudinii *(A)*, deoarece h=$c\omega$= *constant*: $L_R = \pi h A^2 = \frac{\pi h A_0^2}{(1-\eta^2)^2 + g^2}$ (1.14.50)

Reprezentând grafic energia disipată în sistem într-o perioadă în funcție de raportul pulsațiilor η pentru valorile particulare ale parametrilor:

$F_0 = 1600;\ \ q = 1600;\ \ p = 40;\qquad h = 800 \Rightarrow A_0 = 1;\ \ g = 0.5$

se obține curba de disipare a energiei în frecvențe din figura 1.14.12

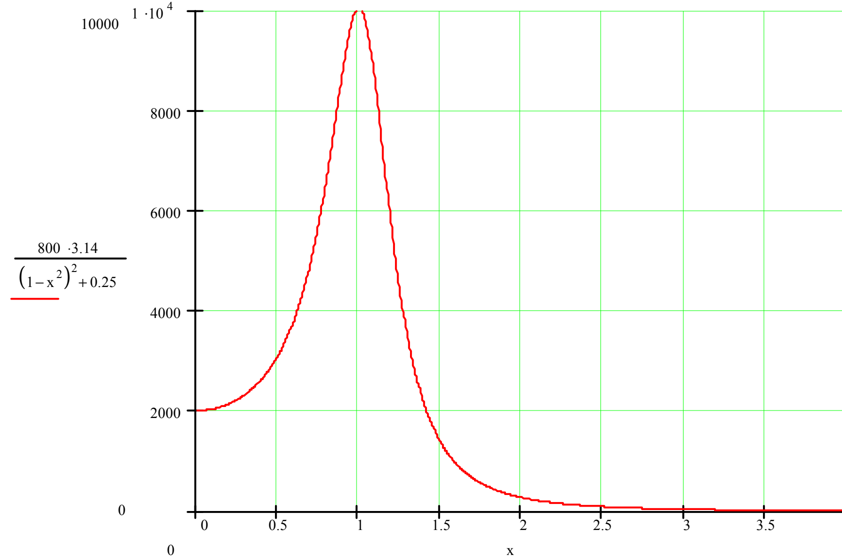


Fig.1.14.12. Variația energiei disipată în sistem într-o perioadă în funcție de pulsația relativă

Ca şi în cazul amplitudinii maxime, energia maximă disipată în sistem într-o perioadă se obține pentru valoarea pulsației forței perturbatoare $\omega = p$ indiferent de valoarea coeficientului amortizării histeretice ν. Valoarea maximă este:

$$L_{Rm} = \frac{\pi h A_0^2}{g^2} = \pi h (A_r)^2 \tag{1.14.51}$$

deoarece conform relației (1.7.14):

$$\xi_m = \frac{1}{\nu} \quad \text{şi} \quad A_r = A_0 \xi_m \quad .$$

Pentru $A_{1,2} = A_r / \sqrt{2}$ se obține $L_R = L_{Rm} / 2$ sau energia disipată la o amplitudine a vibrațiilor egală cu $A_{1,2}$ este jumătate din cea maximă.

Reprezentând grafic amplitudinea vibrațiilor amortizate în funcție de pulsația ω pentru valorile particulare de mai sus ale parametrilor se obține curba de răspuns în frecvențe din figura 1.14.13. Linia corespunzătoare amplitudinii $A_{1,2} = A_r / \sqrt{2}$ intersectează graficul funcției $A(\omega)$ în două puncte şi corespunzător se obțin două pulsații ω_2 şi ω_2 aşa cum se observă şi din figură. Cele două puncte de intersecție se numesc puncte de semiputere.

Cele două valori ale pulsației ω_2 şi ω_2 se pot calcula cu ajutorul ecuației:

$$\frac{A_0}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + g^2}} = \frac{A_0}{\sqrt{2}g} \Rightarrow$$
$$\left(1-\zeta^2\right)^2 = g^2 \Rightarrow \eta_1 = \sqrt{1-g}; \;\; \eta_2 = \sqrt{1+g} \tag{1.14.52}$$

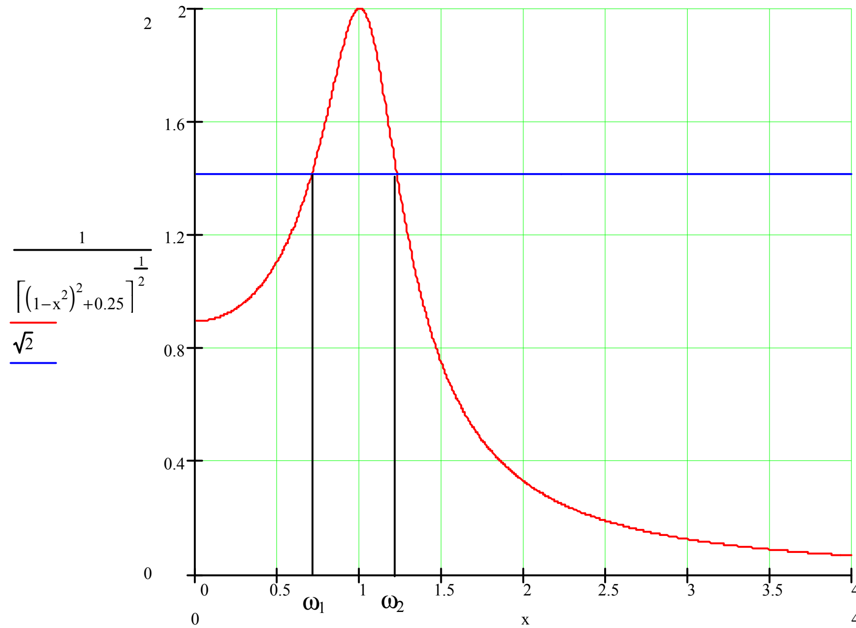


Fig.1.14.13. Metooda punctelor de semiputere pentru determinarea factorului de amortizare g

Diferența celor două rădăcini este:

$$\eta_2 - \eta_1 = \frac{\Delta\omega}{p} = \sqrt{2\left(1 - \sqrt{1 - g^2}\right)} \approx \nu \qquad \Rightarrow \quad g = \frac{\Delta\omega}{p} \qquad (1.14.53)$$

Deci cu ajutorul punctelor de semiputere se poate determina şi pe diagrama *A(ω)* factorul de amortizare histeretică *g*.

1.15. Modele reologice ale elementelor vâscoelsatice folosite în izolarea antivibratorie

Cele mai folosite elemente în izolarea antivibratorie sunt cele din cauciuc natural sau sintetic datorită proprietăților lor elastice legate de fiabilitate şi mentenabilitatea maşinilor. Capacitatea acestui material de a absorbi o cantitate importantă din energia vibrațiilor mai ales la trecerea prin zona de rezonanță face posibilă folosirea lor şi ca elemente amortizoare.

Alte avantaje ale utilizării cauciucului sunt: elementele elastice ce folosesc cauciucul sunt mai stabile decât arcurile din oțel, au o reziliență mai mare factorul de amortizare este mai mare decât la oțel, transmiterea zgomotului prin aceste elemente este mai mică datorită vitezei de propagare de circa 100 de ori mai mică decât cea prin oțel, modulul de elasticitate este mai mic ceea ce asigură izolarea sistemelor mecanice având pulsații proprii mai mici făcând posibilă evitarea zonelor de lucru de rezonanță.

Dintre dezavantaje se pot enumera: influența negativă a factorilor de mediu şi a produselor petroliere asupra proprietăților elastice şi de amortizare, influența temperaturii fiind hotărâtoare, dat fiind faptul că aceste elemente se încălzesc foarte puternic la funcționarea în zona de rezonanță, şi nu în ultimul rând îmbătrânirea care apare după o durată de 5-20 de ani care duce la scoaterea lor din funcțiune.

Legile corpurilor elastice (Hooke) sau ale lichidelor vâscoase (Newton) arată că la aplicarea unor forțe corespunde o anumită deformație şi viteză de deformare, noua stare de echilibru realizându-se instantaneu.

Materialele de tipul cauciucului se comportă ca materiale de tip vâscoelastic pentru care legile de mai sus nu se mai respectă: există un anumit timp de „reacție" sau întârziere între momentul aplicării forței şi cel al răspunsului (deformație) care se caracterizează prin trei factori: variația în timp a deformației realizată cu o forță constantă, variația în timp a efortului necesar pentru a menține o deformație constantă (relaxarea forței) şi diferența de fază dintre efort şi deformație în cazul solicitărilor armonice.

Pentru modelarea acestor tipuri de materiale se folosesc diferite tipuri de modele reologice care au la bază cele două tipuri: Modelul Hooke al elementului elastic liniar şi modelul Newton al elementului vâscos liniar ce sunt prezentate în continuare.

În cazul materialelor vâscoelastice se poate scrie o relație diferențială generală între tensiuni şi deformații care integrată pentru diferite moduri de încărcare furnizează legea de variație a deformațiilor în timpul aplicării sarcinii şi după aceea. Această lege se scrie:

$$a_0\sigma + a_1\dot{\sigma} + a_2\ddot{\sigma} + ... = b_0\varepsilon + a_1\dot{\varepsilon} + a_2\ddot{\varepsilon} + ... \qquad (1.15.1)$$

1.15.1. Modelul elastic liniar Hooke

Pentru acest model în baza legii lui Hooke se poate scrie o relație liniară între tensiunea aplicată şi deformația rezultată (fig. 1.15.1):

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1.15.2)$$

unde: E este modulul de elasticitate al materialului

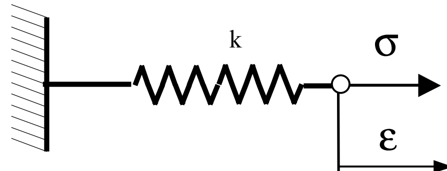


Fig. 1.15.1

1.15.2. Modelul vâscos liniar Newton

Pentru acest model în baza legii lui Newton se poate scrie o relație liniară între tensiunea aplicată şi viteza de deformație a elementului deformația rezultată (fig. 1.15.2):

$$\sigma = \lambda\dot{\varepsilon} \quad (1.15.3)$$

unde: λ este coeficientul de vâscozitate al mediului

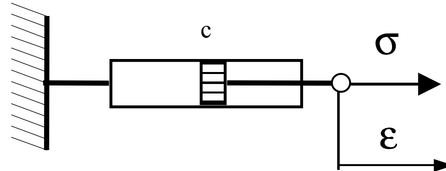


Fig. 1.15.2

1.15.3. Modelul vâscoelastic Voigt-Kelvin

Acest model este format dintr-un element elastic liniar Hooke şi un element vâscos liniar Newton legate în paralel (fig. 1.15.3).

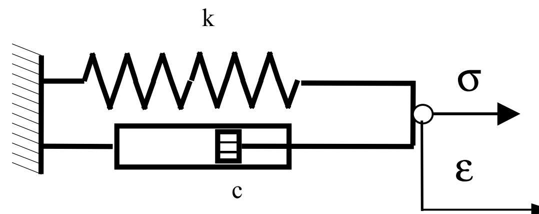


Fig. 1.15.3

Cele două elemente au aceeaşi deformație ε iar tensiunea σ este egală cu suma tensiunilor din cele două elemente, deci între tensiunea aplicată şi deformația elementului se poate scrie următoarea relație:

$$\sigma = E\varepsilon + \lambda\dot{\varepsilon} \quad (1.15.4)$$

1.15.4. Modelul vâscoelastic Maxwell

Acest model este format dintr-un element elastic liniar Hooke şi un element vâscos liniar Newton legate în serie (fig. 1.15.4).

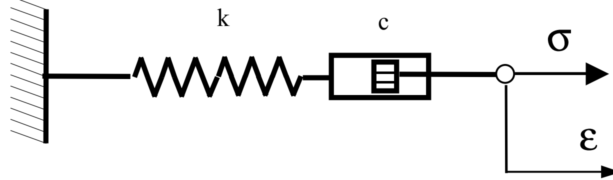


Fig. 1.15.4

Tensiunea σ în cele două elemente este aceeaşi iar deformaţia ε este egală cu suma deformaţiilor din cele două elemente:

$$\begin{aligned} &\sigma = \sigma_k = E\varepsilon_k \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}_k \\ &\sigma = \sigma_c = \lambda\dot{\varepsilon}_c \\ &\varepsilon = \varepsilon_k + \varepsilon_c \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_k + \dot{\varepsilon}_c \end{aligned} \qquad (1.15.5)$$

Înlocuind prima şi a doua relaţie în cea de a treia se poate scrie următoarea relaţie diferenţială între tensiunea aplicată şi deformaţia elementului:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\sigma} + \frac{E}{\lambda}\sigma = E\dot{\varepsilon} \qquad (1.15.6)$$

1.15.5. Modelul vâscoelastic Hooke-Maxwell

Acest model este format dintr-un element elastic liniar Hooke şi un element vâscoelastic Maxwell legate paralel (fig. 1.15.5).

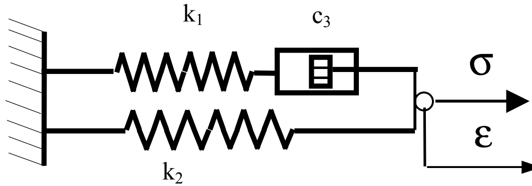


Fig. 1.15.5

Tensiunea σ în cele două elemente (k_1 şi c_3) este aceeaşi iar deformaţia ε pentru cele două elemente Maxwell este egală cu suma deformaţiilor .

Se pot scrie următoarele relaţii de echilibru şi de continuitate pentru elementul Hooke-Maxwell::

$$\begin{aligned} &\sigma = \sigma_1 + \sigma_2; \qquad \sigma_{k1} = \sigma_{c3} = \sigma_1; \qquad \sigma_{k2} = \sigma_2 \\ &\sigma_{k1} = E_1\varepsilon_{k1}; \quad \sigma_{c3} = \lambda\dot{\varepsilon}_{c3}; \quad \sigma_{k2} = E_2\varepsilon_{k2}; \\ &\varepsilon = \varepsilon_{k1} + \varepsilon_{c3} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{k1} + \dot{\varepsilon}_{c3} \\ &\varepsilon = \varepsilon_{k2} \end{aligned} \qquad (1.15.7)$$

Eliminând $\varepsilon_{k1}, \varepsilon_{c3}, \varepsilon_{k2}$ din relațiile (1.15.7) se obțin următoarele relații diferențiale echivalente :

$$E_1\varepsilon_{k1} + E_2\varepsilon = \sigma \quad \Leftrightarrow \quad E_1\dot{\varepsilon}_{k1} + E_2\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}$$

$$E_1\varepsilon_{k1} = \lambda\dot{\varepsilon}_{c3} \quad \Rightarrow \quad \lambda\dot{\varepsilon}_{c3} + E_2\varepsilon = \sigma \quad \Rightarrow \dot{\varepsilon}_{c3} = -\frac{E_2}{\lambda}\varepsilon + \frac{\sigma}{\lambda} \qquad (1.15.8)$$

$$E_1\dot{\varepsilon}_{k1} + E_2\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma} \quad \Rightarrow \quad E_1(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_{c3}) + E_2\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}$$

Înlocuind a doua relație (1.15.8) în ultima se obține relația diferențială între tensiunea şi deformația elementului pentru elementul Hooke-Maxwell:

$$E_2\varepsilon + \lambda\left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right)\dot{\varepsilon} = \sigma + \frac{\lambda}{E_1}\dot{\sigma} \qquad (1.15.9)$$

1.15.6. Modelul vâscoelastic liniar generalizat (Voigt-Kelvin- Hooke)

Acest model este format dintr-un element elastic liniar Hooke şi un element vâscos liniar Newton legate în paralel (fig. 1.15.6).

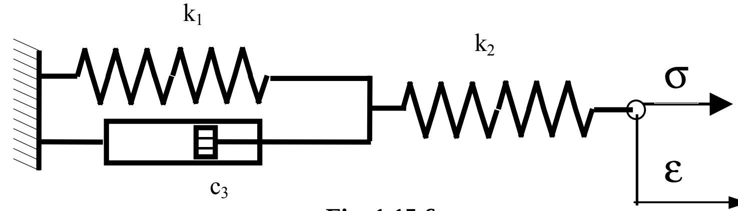


Fig. 1.15.6

Cele două elemente Voigt- Kelvin şi Hooke au aceeaşi tensiune σ iar deformația ε este egală cu suma deformațiilor celor două elemente.

Se pot scrie următoarele relații de echilibru şi de continuitate pentru elementul Voigt- Kelvin - Hooke :

$$\begin{aligned} &\sigma = \sigma_{k1} + \sigma_{c3} = \sigma_2; \\ &\sigma_{k1} = E_1\varepsilon_{k1}; \quad \sigma_{c3} = \lambda\dot{\varepsilon}_{c3}; \quad \sigma_{k2} = E_2\varepsilon_{k2}; \\ &\varepsilon_{k1} = \varepsilon_{c3} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{k1} + \dot{\varepsilon}_{c3} \\ &\varepsilon = \varepsilon_{k1} + \varepsilon_{k2} \end{aligned} \qquad (1.15.10)$$

Eliminând $\varepsilon_{k1}, \varepsilon_{c3}, \varepsilon_{k2}$ din relațiile (1.15.10) se obțin următoarele relații diferențiale echivalente :

$$\begin{aligned} &E_1\varepsilon_{k1} + \lambda\dot{\varepsilon}_{c3} = \sigma \qquad \varepsilon_{k1} + \frac{\sigma}{E_2} = \varepsilon \qquad \Rightarrow \varepsilon_{k1} = -\frac{\sigma}{E_2} + \varepsilon \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \varepsilon_{k1} = \varepsilon_{c3} \qquad \Rightarrow \dot{\varepsilon}_{c3} = \dot{\varepsilon}_{k1} = -\frac{\dot{\sigma}}{E_2} + \dot{\varepsilon} \end{aligned} \qquad (1.15.11)$$

Înlocuind a doua şi a treia relaţie (1.15.11) în ultima se obţine relaţia diferenţială între tensiunea aplicată şi deformaţia elementului pentru elementul Voigt- Kelvin – Hooke:

$$E_1\varepsilon + \lambda\dot{\varepsilon} = \sigma\left(1 + \frac{E_1}{E2}\right) + \frac{\lambda}{E_2}\dot{\sigma} \qquad (1.15.12)$$

1.15.7. Modelul vâscoelastic Voigt-Kelvin generalizat

Acest model este format din n elemente Voigt Kelvin legate în serie (fig. 1.15.7).

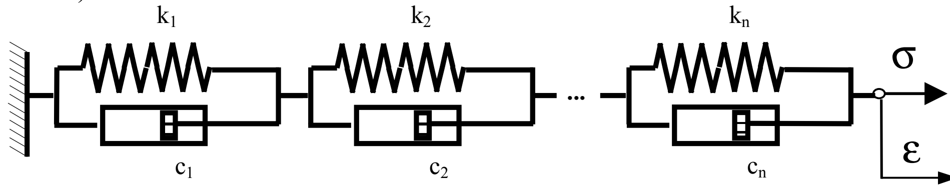


Fig. 1.15.7

Se pot scrie următoarele relaţii de echilibru şi de continuitate pentru elementele Voigt- Kelvin înseriate:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{k1} + \sigma_{c1} = \sigma; \qquad \sigma_{k1} = E_1\varepsilon_1; \;\; \sigma_{c1} = \lambda_1\dot{\varepsilon}_1\\
&\sigma_{k2} + \sigma_{c2} = \sigma; \qquad \sigma_{k2} = E_2\varepsilon_2; \;\; \sigma_{c2} = \lambda_2\dot{\varepsilon}_2\\
&\ldots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (1.15.13)\\
&\sigma_{kn} + \sigma_{cn} = \sigma; \qquad \sigma_{kn} = E_n\varepsilon_n; \;\; \sigma_{cn} = \lambda_n\dot{\varepsilon}_n\\
&\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_n
\end{aligned}$$

Eliminând $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ din relaţiile (1.15.13) se obţine următoarea ecuaţie operaţională de stare:

$$\sigma = \left(E_k + \lambda_k\frac{\partial}{\partial t}\right)\varepsilon; \qquad \varepsilon = \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k \qquad \Leftrightarrow \varepsilon = \sigma\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{E_k}}{\left(1 + \frac{\lambda_k}{E_k}\frac{\partial}{\partial t}\right)} \qquad (1.15.14)$$

Pentru n=2 se scriu următoarele relaţii de echilibru şi de continuitate:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{k1} + \sigma_{c1} = \sigma; \qquad \sigma_{k1} = E_1\varepsilon_1; \;\; \sigma_{c1} = \lambda_1\dot{\varepsilon}_1\\
&\sigma_{k2} + \sigma_{c2} = \sigma; \qquad \sigma_{k2} = E_2\varepsilon_2; \;\; \sigma_{c2} = \lambda_2\dot{\varepsilon}_2\\
&\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 \qquad\qquad (1.15.15)\\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} E_1\varepsilon_1 + \lambda_1\dot{\varepsilon}_1 = \sigma & \left|1/E_1\right. \\ E_2\varepsilon_2 + \lambda_2\dot{\varepsilon}_2 = \sigma & \left|1/E_2\right. \end{cases} \quad insu\,min\,d\\
&\Rightarrow \qquad \varepsilon + \left(\frac{\lambda_1}{E_1}\dot{\varepsilon}_1 + \frac{\lambda_2}{E_2}\dot{\varepsilon}_2\right) = \sigma\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right)
\end{aligned}$$

Punând condiția suplimentară $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$ ultima relație (1.15.15) devine:

$$\varepsilon + \frac{\dot{\varepsilon}}{2}\left(\frac{\lambda_1}{E_1} + \frac{\lambda_2}{E_2}\right) = \sigma\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right) \qquad (1.15.16)$$

1.15.8. Modelul vâscoelastic Maxwell generalizat

Acest model este format din n elemente Maxwell legate în paralel (fig. 1.15.8).

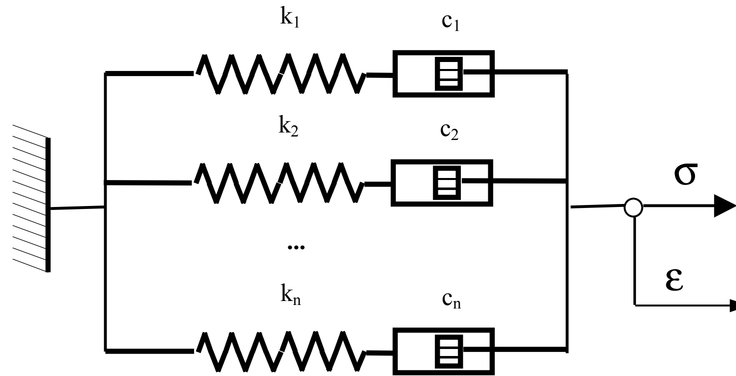


Fig. 1.15.8

Deformația ε în cele *n* elemente este aceeași iar tensiunea σ este egală cu suma tensiunilor din cele două elemente. Se pot scrie următoarele relații de echilibru şi de continuitate pentru elementele Voigt- Kelvin :

$$\begin{aligned}
&\sigma_{k1} = \sigma_{c1} = \sigma_1; \qquad \sigma_{k1} = E_1\varepsilon_1; \;\; \sigma_{c1} = \lambda_1\dot{\varepsilon}_1 \\
&\sigma_{k2} + \sigma_{c2} = \sigma_2; \qquad \sigma_{k2} = E_2\varepsilon_2; \;\; \sigma_{c2} = \lambda_2\dot{\varepsilon}_2 \\
&\ldots \\
&\sigma_{kn} + \sigma_{cn} = \sigma; \qquad \sigma_{kn} = E_n\varepsilon_n; \;\; \sigma_{cn} = \lambda_n\dot{\varepsilon}_n \\
&\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_n \qquad (1.15.17) \\
&\varepsilon_1 = \varepsilon_{1k} + \varepsilon_{1c} \\
&\varepsilon_2 = \varepsilon_{2k} + \varepsilon_{2c} \\
&\ldots \\
&\varepsilon_n = \varepsilon_{nk} + \varepsilon_{nc}
\end{aligned}$$

Eliminând $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ din relațiile (1.15.17) se obține următoarea ecuație operațională de stare:

$$\dot{\varepsilon}_k = \frac{\dot{\sigma}_k}{E_k} + \frac{\sigma_k}{\lambda_k} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\varepsilon} = \left(\frac{1}{\lambda_k} + \frac{1}{E_k}\frac{\partial}{\partial t}\right)\sigma_k$$

$$\Rightarrow \sigma = \dot{\varepsilon}\sum_{k=1}^{n} \frac{E_k}{\left(\frac{E_k}{\lambda_k} + \frac{\partial}{\partial t}\right)} \tag{1.15.18}$$

Pentru n=2 se scriu următoarele relaţii de echilibru şi de continuitate:

$$\sigma_{k1} = \sigma_{c1} = \sigma_1; \qquad \sigma_{k1} = E_1\varepsilon_1; \quad \sigma_{c1} = \lambda_1\dot{\varepsilon}_1$$

$$\sigma_{k2} + \sigma_{c2} = \sigma_2; \qquad \sigma_{k2} = E_2\varepsilon_2; \quad \sigma_{c2} = \lambda_2\dot{\varepsilon}_2$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{1k} + \varepsilon_{1c} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{1k} + \dot{\varepsilon}_{1c}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{2k} + \varepsilon_{2c} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{2k} + \dot{\varepsilon}_{2c}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_1}{E_1} + \frac{\sigma_1}{\lambda_1} \\ \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_2}{E_2} + \frac{\sigma_2}{\lambda_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E_1\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}_1 + \frac{E_1}{\lambda_1}\sigma_1 \\ E_2\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}_2 + \frac{E_2}{\lambda_2}\sigma_2 \end{cases} \tag{1.15.19}$$

Insumand $\Rightarrow \quad \dot{\varepsilon}(E_1 + E_1) = \dot{\sigma} + \left(\frac{E_1}{\lambda_1}\sigma_1 + \frac{E_2}{\lambda_2}\sigma_2\right)$

Punând condiția suplimentară $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\sigma}{2}$ relația (1.15.15) devine:

$$\dot{\varepsilon}(E_1 + E_1) = \dot{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\left(\frac{E_1}{\lambda_1} + \frac{E_2}{\lambda_2}\right) \tag{1.15.20}$$

1.16. Impedanța mecanică

În cazul unei mişcări vibratorii cu amortizare vâscoasă ce utilizează modelul Voigt-Kelvin (fig. 1.16.1) ecuația diferențială în complex se scrie:

$$\ddot{z} + \frac{c}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t}; \quad z = x + iy \tag{1.16.1}$$

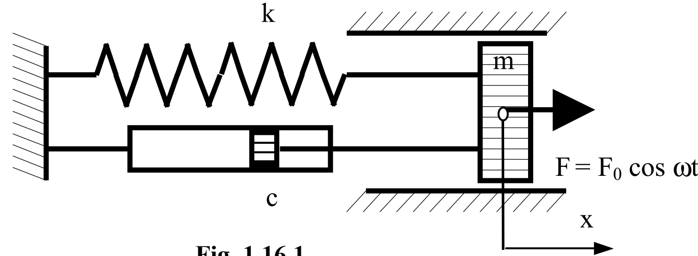


Fig. 1.16.1

Soluția staționară a ecuației (1.16.1) este:

$$z_p = ae^{i(\omega t - \varphi)} = \tilde{A}e^{i\omega t} \tag{1.16.2}$$

Derivând relația (1.16.2) şi introducând în ecuația (1.16.1) se obține:

$$-\omega^2\tilde{A}e^{i\omega t} + i\frac{c}{m}\omega\tilde{A}e^{i\omega t} + p^2\tilde{A}e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{A}\left(p^2 - \omega^2 + i\frac{c}{m}\omega\right) = \frac{F_0}{m} \tag{1.16.3}$$

Se obține astfel *amplitudinea complexă a mişcării:*

$$\tilde{A} = \frac{F_0}{m(p^2 - \omega^2) + ic\omega} = \frac{F_0}{k - m\omega^2 + ic\omega} = \frac{F_0}{K_C} \tag{1.16.4}$$

unde: $\tilde{K}_C = k - m\omega^2 + ic\omega$ (1.16.5)

este *constanta elastică complexă.*

Inversa constantei elastice complexe se numeşte *receptanță complexă:*

$$\frac{1}{\tilde{K}_C} = \frac{F_0}{k - m\omega^2 + ic\omega} \tag{1.16.6}$$

Pentru valoarea forței perturbatoare $\omega = p = \sqrt{k/m}$ constanta elastică şi receptanța complexă sunt pur imaginare:

$$\tilde{K}_C = ic\omega; \quad \frac{1}{\tilde{K}_C} = -\frac{i}{c\omega} \tag{1.16.7}$$

Viteza şi accelerația vibrației staționare complexe sunt date de:

$$\dot{z} = \tilde{A}i\omega e^{i\omega t} \tag{1.16.8}$$

$$\ddot{z} = -\tilde{A}\omega^2 e^{i\omega t} \tag{1.16.9}$$

Se notează amplitudinea complexă a vitezei şi accelerației respectiv cu:

$$\dot{\tilde{A}} = i\omega\tilde{A} \quad \text{şi} \quad \ddot{\tilde{A}} = -\omega^2\tilde{A} \tag{1.16.10}$$

Înlocuind valoarea amplitudinii complexe $\tilde{A}$ în prima relație (1.16.10) se obține amplitudinea complexă a vitezei:

$$\dot{\tilde{A}} = \frac{i\omega F_0}{k - m\omega^2 + ic\omega} = \frac{F_0}{c + i\left(m\omega - \frac{k}{m}\right)} = \frac{F_0}{\tilde{Z}_C} \tag{1.16.11}$$

unde:

$$\tilde{Z}_C = c + i\left(\omega m - \frac{k}{\omega}\right) = \frac{F_0}{\dot{\tilde{A}}} \tag{1.16.12}$$

este *impedanța mecanică* sau *rezistența complexă* şi reprezintă raportul dintre valoarea amplitudinii forței complexe şi amplitudinea vitezei complexe a corpului.

Inversa impedanței se numeşte *mobilitate complexă:*

$$\frac{1}{\tilde{Z}_C} = \frac{1}{c - i\left(\frac{k}{\omega} - \omega m\right)} \tag{1.16.13}$$

Pentru valoarea pulsației forței perturbatoare egală cu pulsația proprie $\omega = p = \sqrt{\frac{k}{m}}$ impedanța mecanică şi mobilitatea complexă sunt reale:

$$\tilde{Z}_C = c\ ; \ \frac{1}{\tilde{Z}_C} = \frac{1}{c} \tag{1.16.13}$$

Înlocuind valoarea amplitudinii complexe $\tilde{A}$ în a doua relație (1.16.10) se obține amplitudinea complexă a accelerației:

$$\ddot{\tilde{A}} = -\frac{\omega^2 F_0}{k - m\omega^2 + ic\omega} = \frac{F_0}{\left(m - \frac{k}{\omega^2}\right) - i\frac{c}{\omega}} = \frac{F_0}{\tilde{M}_C} \tag{1.16.14}$$

unde

$$\tilde{M}_C = \left(m - \frac{k}{\omega^2}\right) - i\frac{c}{\omega} = \frac{F_0}{\ddot{\tilde{A}}} \tag{1.16.15}$$

este *masa complexă* sau *masa aparentă.*

Inversa *masei complexe* impedanței se numeşte *inertanță:*

$$\frac{1}{\tilde{M}_C} = \frac{1}{\left(m - \frac{k}{\omega^2}\right) - i\frac{c}{\omega}} \tag{1.16.16}$$

Pentru rezonanță ($\omega = p = \sqrt{\frac{k}{m}}$) *masa complexă* respectiv *inertanța* sunt mărimi pur complexe:

$$\tilde{M}_C = -i\frac{c}{\omega}; \quad \frac{1}{\tilde{M}_C} = i\frac{\omega}{c} \tag{1.16.16}$$

Impedanța mecanică respectiv *moblitatea complexă* sunt mărimile cele mai utilizate în studiul vibrațiilor sistemelor mecanice.

Pentru sistemul din figura 1.16.1 se poate defini o impedanță a amortizorului: $\widetilde{Z}_C^c = c$, o impedanță a elementului elastic: $\widetilde{Z}_C^k = -i\dfrac{k}{\omega}$ şi respectiv o impedanță a corpului: $\widetilde{Z}_C^m = im\omega$ aşa cum rezultă din tabelul 1.16

Tabelul 1.16

Element	Ecuația de echilibru dinamic în complex	Viteza în complex	Impedanța
$\widetilde{F}=F_0e^{i\omega t}$; k; z	$kz = F_0e^{i\omega t}$ $k\dot{z} = i\omega F_0e^{i\omega t}$	$\dot{z} = \dfrac{i\omega}{k}F_0e^{i\omega t}$	$\widetilde{Z}_C^k = \dfrac{F_0e^{i\omega t}}{\dot{z}} = \dfrac{k}{i\omega} = -i\dfrac{k}{\omega}$
$\widetilde{F}=F_0e^{i\omega t}$; c; z	$c\dot{z} = F_0e^{i\omega t}$	$\dot{z} = \dfrac{1}{c}F_0e^{i\omega t}$	$\widetilde{Z}_C^c = \dfrac{F_0e^{i\omega t}}{\dot{z}} = c$
$\widetilde{F}=F_0e^{i\omega t}$; m; z	$m\ddot{z} = F_0e^{i\omega t}$	$\dot{z} = \dfrac{1}{i\omega m}F_0e^{i\omega t}$	$\widetilde{Z}_C^m = \dfrac{F_0e^{i\omega t}}{\dot{z}} = i\omega m$

În cazul unui sistem cu amortizare elastovâscoasă ce utilizează modelul Voigt-Kelvin prezentat în figura 1.16.1, schema impedanțelor este dată în fig.1.16.2, cele trei impedanțe fiind legate în paralel.

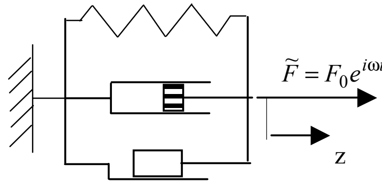


Fig. 1.16.2

În acest caz deplasările capetelor celor trei elemente sunt aceleaşi iar forța armonică este în echilibru dinamic cu cele trei forțe:

$$\begin{aligned} & z_k = z_c = z_m \quad \Leftrightarrow \quad \dot{z}_k = \dot{z}_c = \dot{z}_m \\ & F_0e^{i\omega t} = \widetilde{F}_k + \widetilde{F}_c + \widetilde{F}_m \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{Z}_C\dot{z} = \widetilde{Z}_C^k\,\dot{z}_k + \widetilde{Z}_C^c\,\dot{z}_c + \widetilde{Z}_C^m\,\dot{z}_m \end{aligned} \tag{1.16.17}$$

În cazul legării în paralel impedanța sistemului se calculează astfel:

$$\widetilde{Z}_C = \widetilde{Z}_C^c + \widetilde{Z}_C^k + \widetilde{Z}_C^m = c + i\left(\omega m - \frac{k}{\omega}\right); \quad \widetilde{F} = F_0 e^{i\omega t} \tag{1.16.18}$$

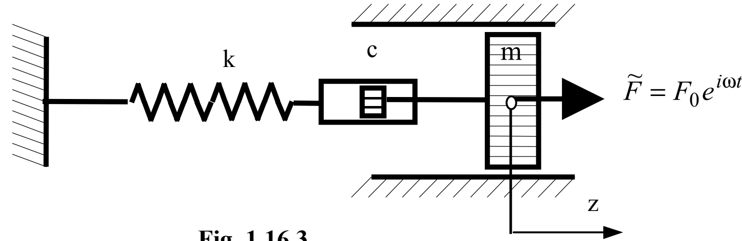


Fig. 1.16.3

Pentru sistemul cu amortizare elastovâscoasă ce utilizează modelul Maxwell prezentat în figura 1.16.3, schema impedanțelor este dată în fig.1.16.2, cele trei impedanțe fiind legate în paralel.

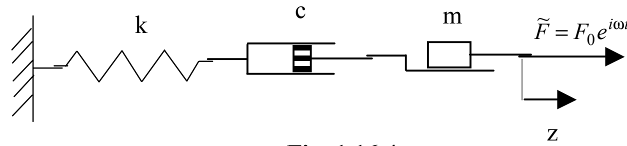


Fig. 1.16.4

În acest caz deplasarea punctului de aplicație al fortei armonice este egală cu suma deplasările capetelor celor trei elemente iar forța armonică este aceeași în cele trei elemente:

$$z = z_k + z_c + z_m \quad \Leftrightarrow \dot{z} = \dot{z}_k + \dot{z}_c + \dot{z}_m$$

$$\frac{F_0 e^{i\omega t}}{\widetilde{Z}_C} = \frac{F_0 e^{i\omega t}}{\widetilde{Z}_C^k} + \frac{F_0 e^{i\omega t}}{\widetilde{Z}_C^c} + \frac{F_0 e^{i\omega t}}{\widetilde{Z}_C^m} \tag{1.16.19}$$

În cazul legării în serie impedanța sistemului se scrie:

$$\frac{1}{\widetilde{Z}_C} = \frac{1}{\widetilde{Z}_C^k} + \frac{1}{\widetilde{Z}_C^c} + \frac{1}{\widetilde{Z}_C^m} = i\left(\frac{\omega}{k} - \frac{1}{m\omega}\right) + \frac{1}{c} \tag{1.16.20}$$

Pentru sistemul cu amortizare elastovâscoasă ce utilizează modelul prezentat în figura 1.16.5, masa și amortizorul sunt legate în paralel (au aceeași viteză), ambele fiind legate în serie cu arcul.

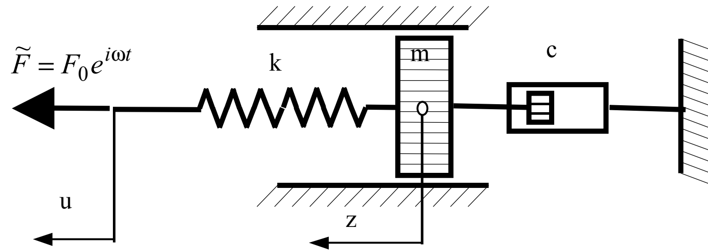


Fig. 1.16.5

Schema impedanțelor este dată în fig.1.16.6.

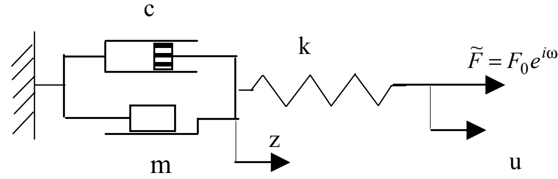


Fig. 1.16.6

Deci impedanța se calculează conform relației:

$$\frac{1}{\widetilde{Z}_C} = \frac{1}{\widetilde{Z}_C^k} + \frac{1}{\widetilde{Z}_C^c + \widetilde{Z}_C^m} = i\frac{\omega}{k} + \frac{1}{c + im\omega}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\widetilde{Z}_C} = \frac{k - m\omega^2 + i\omega c}{k(c + im\omega)} \tag{1.16.21}$$

Pentru verificare nse va calcula impedanța sistemului ca raportul dintre forța complexă $\widetilde{F}$ şi viteza complexă $\dot{u}$ a capătului din stânga al arcului:

$$\widetilde{Z}_C = \frac{\widetilde{F}}{\dot{u}} \tag{1.16.22}$$

unde: $\widetilde{F} = k(u - z)$ este forța complexă care acționează în elementul elastic

Ecuația diferențială a mişcării în complex se scrie:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} = -k(z - u) \iff k(u - z) = m\ddot{z} + c\dot{z} \tag{1.16.23}$$

unde: $\dot{u} = i\omega u$ (1.16.24)

este viteza complexă a capătului din stânga al arcului

$z = \widetilde{A}e^{i\omega t}$, $\dot{z} = \widetilde{A}z$ este deplasarea respectiv viteza în complex a corpului

Pentru a obține forța complexă se înlocuieşte în relația (1.16.23) $\ddot{z} = i\omega\dot{z}$ şi se obține:

$$\widetilde{F} = k(u - z) = \dot{z}(i\omega m + c) \tag{1.16.25}$$

Ținând seama că: $k(\dot{u} - \dot{z}) = i\omega k(u - z)$ se obține: (1.16.26)

$$k(\dot{u} - \dot{z}) = i\omega\, \dot{z}(im\omega + c) \quad \Rightarrow \quad \dot{u} = \frac{\dot{z}}{k}\left(k - m\omega^2 + ic\omega\right) \tag{1.16.27}$$

Înlocuind expresia forței complexe: $\widetilde{F} = k(u - z) = \dot{z}(im\omega + c)$ şi a vitezei complexe (1.16.27) în relația (1.16.22) se obține aceeaşi relație (1.16.21):

$$\widetilde{Z}_C = \frac{\widetilde{F}}{\dot{u}} = \frac{\dot{z}(c + im\omega)}{\frac{\dot{z}}{k}\left(k - m\omega^2 + ic\omega\right)} = \frac{k(c + im\omega)}{k - m\omega^2 + i\omega c} \tag{1.16.28}$$

Impedanța mecanică calculată astfel se mai numeşte *impedanță locală* întrucât exprimă raportul celor două mărimi (amplitudinile forței şi vitezei complexe) măsurate în acelaşi punct .

Atunci cele două mărimi (forța şi viteza) se măsoară în puncte diferite, raportul celor două mărimi se numeşte *impedanță de transfer*.

Pentru exemplul din figura (1.16.5) se determină impedanța de transfer între punctele situate la capetele arcului cu ajutorul relației:

$$\tilde{Z}_C^{tr} = \frac{\tilde{F}}{\dot{z}} = \frac{\dot{z}(c + im\omega)}{\dot{z}} = c + im\omega \qquad (1.16.29)$$

Pentru sistemul cu amortizare elastovâscoasă ce utilizează două modele Voigt-Kelvin prezentat în figura 1.16.7, format din masa m_1, arcul 1 (k_1) şi amortizorul 1 (c_1) sunt legate în paralel (au aceeaşi viteză), fiind apoi fiind legate în serie cu arcul 2 (k_2) şi amortizorul 2 (c_2) legate între ele în paralel. Schema impedanțelor este dată în fig.1.16.8. Impedanța se calculează conform relației:

$$\frac{1}{\tilde{Z}_C} = \frac{\dot{u}}{\tilde{F}} = \frac{1}{\tilde{Z}_C^{k1} + \tilde{Z}_C^{c1} + \tilde{Z}_C^{m1}} + \frac{1}{\tilde{Z}_C^{c2} + \tilde{Z}_C^{k2}}$$

$$\frac{1}{\tilde{Z}_C} = \frac{\dot{u}}{\tilde{F}} = \frac{1}{c_1 + i\left(m_1\omega - \frac{k_1}{\omega}\right)} + \frac{1}{c_2 - i\frac{k_2}{\omega}} \qquad (1.16.30)$$

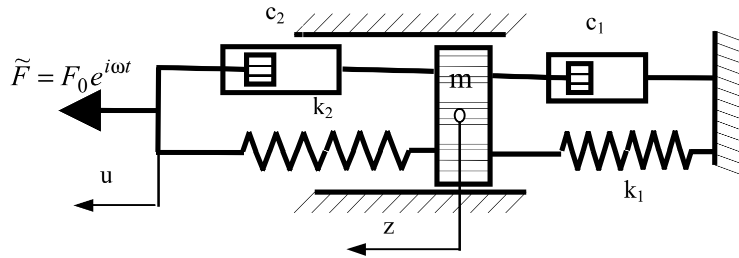


Fig. 1.16.7

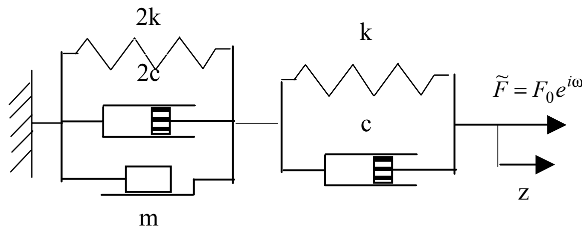


Fig. 1.16.8

Impedanța de transfer între punctele situate la capetele arcului k_2 şi amortizorului c_2 se deteremină astfel:

$$\tilde{Z}_C^{tr} = \frac{\tilde{F}}{\dot{z}} = c_2 - i\frac{k_2}{\omega} \qquad (1.16.31)$$

Pentru sistemul vâcoelsatic Hooke Maxwell format dintr-un corp de masă *m* (fig. 1.16.9) legat de fundație cu un arc având constanta elastică *k* şi un element elastovâscos Maxwell format dintr-un amortizor *c* legat în serie cu un element elastic k_1 , schema impedanțelor este dată în fig.1.16.10

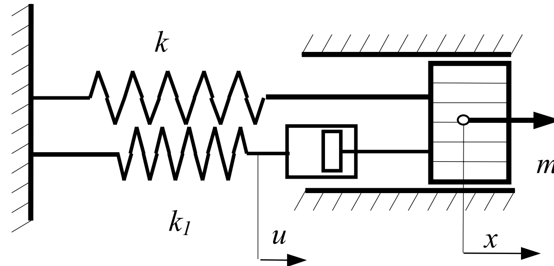


Fig.1.16.9

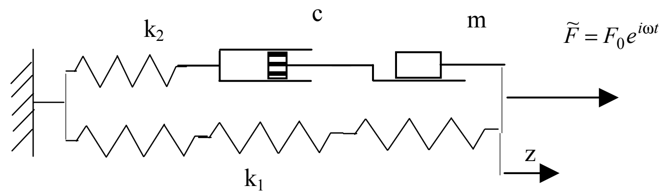


Fig. 1.16.10

Impedanța se calculează conform relației:

$$\widetilde{Z}_C = \widetilde{Z}_C^{k1} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\widetilde{Z}_C^{k2}} + \cfrac{1}{+\widetilde{Z}_C^{c}} + \cfrac{1}{+\widetilde{Z}_C^{m}}}$$

$$\widetilde{Z}_C = -i\frac{k_1}{\omega} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{c} + i\left(\cfrac{\omega}{k_2} - \cfrac{1}{m\omega}\right)} \tag{1.16.32}$$

1.17. Aplicații

1.17.1. Turația critică a arborilor drepți

Vibrațiile flexionale ale arborilor sunt rezultatul unor forțe de inerție datorate excentricităților maselor aflate în mişcare de rotație. Pentru o anumită turație a arborelui (numită turație critică) se produce fenomenul de rezonanță. În general (în afara zonei de rezonanță) amplitudinea vibrațiilor depinde de modul de rezemare, de caracteristicile geometrice ale secțiunii, de caracteristicile elastice ale materialului şi de turația arborelui.

Modelul matematic utilizat este un arbore de secțiune circulară constantă (D) pe lungimea lui rezemat la capete pe care este montat un volant de masă *m* având excentricitatea *d* față de axa arborelui. Sub acțiunea forțelor de inerție şi a forțelor elastice se obține schema de încărcare din figura 1.17.1.

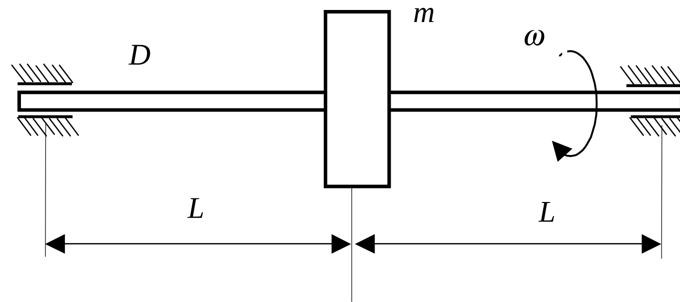


Fig. 1.17.1

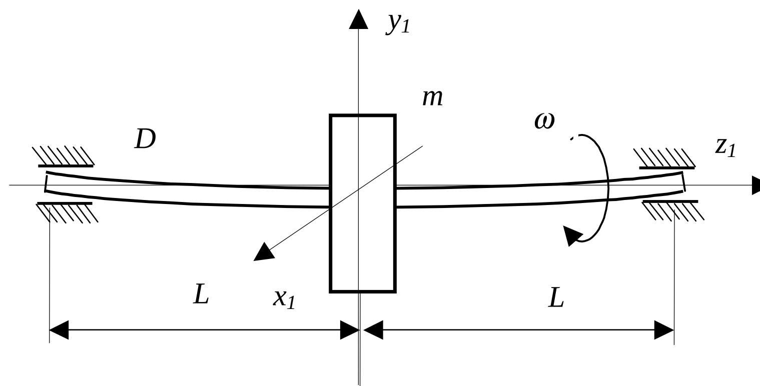


Fig. 1.17.2

Se alege sistemul de referință fix $O_1x_1y_1$ cu originea situată pe direcția axei lagărelor şi sistemul de referință mobil Oxy legat de volant având originea O pe axa volantului şi axa Ox trecând prin centrul de greutate C al volantului: $OC=d$

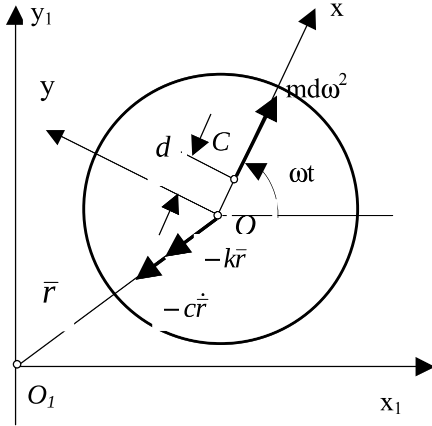


Fig. 1.17.3

Considerând că asupra volantului acționează şi forțe de amortizare vâscoase, ecuația vectorială a mişcării centrului de greutate al volantului față de sistemul de referință fix $O_1x_1y_1$ se scrie:

$$m\ddot{\bar{r}}_C = -c\dot{\bar{r}} - k\bar{r} \qquad (1.17.1)$$

unde vectorul de poziție al centrului de greutate se scrie (fig. 1.17.3):

$$\bar{r}_C = \bar{r} + \overline{OC} \qquad (1.17.2)$$

Relația vectorială (1.17.2) se scrie în proiecții pe axele sistemului fix $O_1x_1y_1$ astfel:

$$\begin{cases} x_C = x + d\cos\omega t \\ y_C = y + d\sin\omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_C = \ddot{x} - \omega^2 d\cos\omega t \\ \ddot{y}_C = \ddot{y} - \omega^2 d\sin\omega t \end{cases} \qquad (1.17.3)$$

Ținând seama de (1.17.3) ecuația vectorială (1.17.1) se scrie în proiecții pe axele sistemului Oxy astfel:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m\omega^2 d\cos\omega t \\ m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = m\omega^2 d\sin\omega t \end{cases} \qquad (1.17.4)$$

Cele două ecuații reprezintă partea reală şi imaginară a ecuației diferențiale în complex:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = m\omega^2 d\, e^{i\omega t} \qquad (1.17.5)$$

Această ecuație admite soluția staționară de forma:

$$\begin{aligned} z &= \tilde{a}\left(\cos(\omega t - \varphi) + i\sin(\omega t - \varphi)\right) = \tilde{a}e^{i(\omega t - \varphi)} \\ \dot{z} &= i\omega\tilde{a}e^{i(\omega t - \varphi)} = i\omega z \\ \ddot{z} &= -\omega^2\tilde{a}e^{i(\omega t - \varphi)} = -\omega^2 z \end{aligned} \qquad (1.17.6)$$

Înlocuind în ecuația diferențială (1.17.5) se obține:

$$\begin{aligned} &\left(-m\omega^2 + ic\omega + k\right)\tilde{a}e^{i\omega t - i\varphi} = md\omega^2 e^{i\omega t} \\ &\left(-m\omega^2 + ic\omega + k\right)\tilde{a} = md\omega^2 e^{i\varphi} \\ \Rightarrow\quad &\tilde{a} = \frac{md\omega^2 e^{i\varphi}}{k - m\omega^2 + ic\omega} \end{aligned} \qquad (1.17.7)$$

rezultă amplitudinea reală a mişcării:

$$a=|\tilde{a}|=\frac{md\omega^2}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}}=\frac{d\omega^2}{\sqrt{\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)^2+\left(\frac{c\omega}{m}\right)^2}} \qquad (1.17.8)$$

Notând: $\frac{k}{m}=p^2;\quad \frac{c\omega}{m}=2\zeta\eta;\quad \frac{\omega}{p}=\eta$ (1.17.9)

Se obține amplitudinea reală a mişcării a sub forma raportului:

$$\frac{a}{d}=\frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2\zeta\eta)^2}} \qquad (1.17.10)$$

Vibrațiile staționare după cele două direcții se scriu:

$$x=a\cdot cos(\omega t-\varphi)=\frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2\zeta\eta)^2}}d\,cos(\omega t-\varphi)$$

$$y=a\cdot sin(\omega t-\varphi)=\frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2\zeta\eta)^2}}d\,sin(\omega t-\varphi) \qquad (1.17.11)$$

unde:

$$tg\varphi=\frac{c\omega}{m(p^2-\omega^2)}=\frac{2\zeta\eta}{1-\eta^2} \qquad (1.17.12)$$

Punctul O descrie un cerc cu centrul în O_1 de rază a deoarece avem:

$$\begin{cases}x=a\,cos(\omega t-\varphi)\\ y=a\,sin(\omega t-\varphi)\end{cases}\Leftrightarrow\quad x^2+y^2=a^2 \qquad (1.17.13)$$

Conform relațiilor (1.17.3) punctul C este de coordonate:

$$\begin{cases}x_C=x+d\,cos\,\omega t=\frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2\zeta\eta)^2}}d\,cos(\omega t-\varphi)+d\,cos\,\omega t\\ y_C=y+d\,sin\,\omega t=\frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2\zeta\eta)^2}}d\,sin(\omega t-\varphi)+d\,sin\,\omega t\end{cases} \qquad (1.17.14)$$

deci distanța $R=O_1C$ se scrie:

$$R=\sqrt{x_C^2+y_C^2}=d\sqrt{\frac{\eta^4}{(1-\eta^2)^2+(2\zeta\eta)^2}+1+\frac{2\eta^2\,cos\,\varphi}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2\zeta\eta)^2}}} \qquad (1.17.15)$$

Înlocuind în relația (1.17.14) expresia:

$$cos\,\varphi=\frac{1-\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2\zeta\eta)^2}} \qquad (1.17.16)$$

se obține raza R corespunzătoare punctului C sub forma raportului:

$$\frac{R}{d}=\sqrt{\frac{1+(2\zeta\eta)^2}{(1-\eta^2)^2+(2\zeta\eta)^2}} \qquad (1.17.17)$$

Se observă că această distanță este constantă în timp, deci punctul C descrie tot timpul un cerc de rază R. Dacă se egalează cele două raze *a* şi R se obține valoarea pulsației relative η_0:

$$\eta^4 = 1 + (2\zeta\eta)^2 \Leftrightarrow \eta^4 - 4\zeta^2\eta^2 - 1 = 0 \Rightarrow \eta_0 = \sqrt{2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 + 1}} \quad (1.17.18)$$

În figura 1.17.4 s-au reprezentat funcțiile $a(\eta)/d$ şi $R(\eta)/d$ pentru un factor de amortizare $\zeta=0,1$. Pentru $\eta < \eta_0$ se obține $a < R$, $\eta = \eta_0 \Rightarrow a = R$ şi pentru $\eta > \eta_0$ se obține $a > R$.

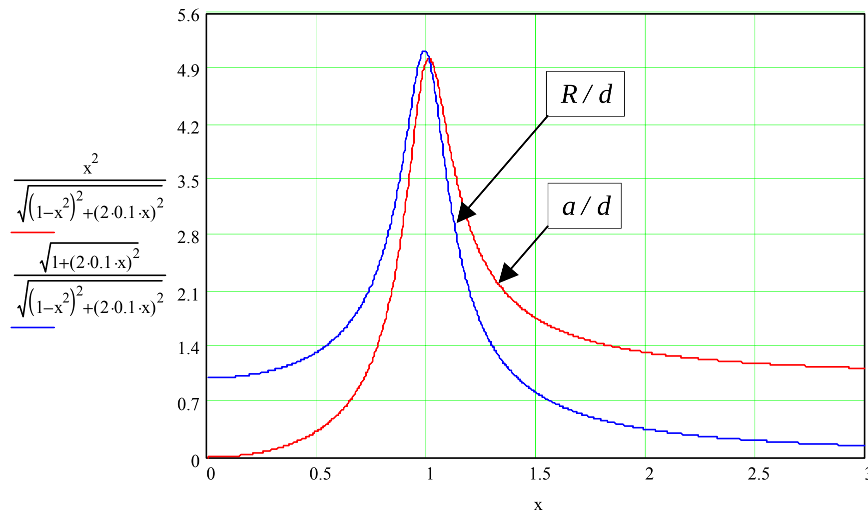


Fig. 1.17.4. Reprezentarea razelor a/d şi R/d funcție de pulsația relativă η (ζ=0,1)

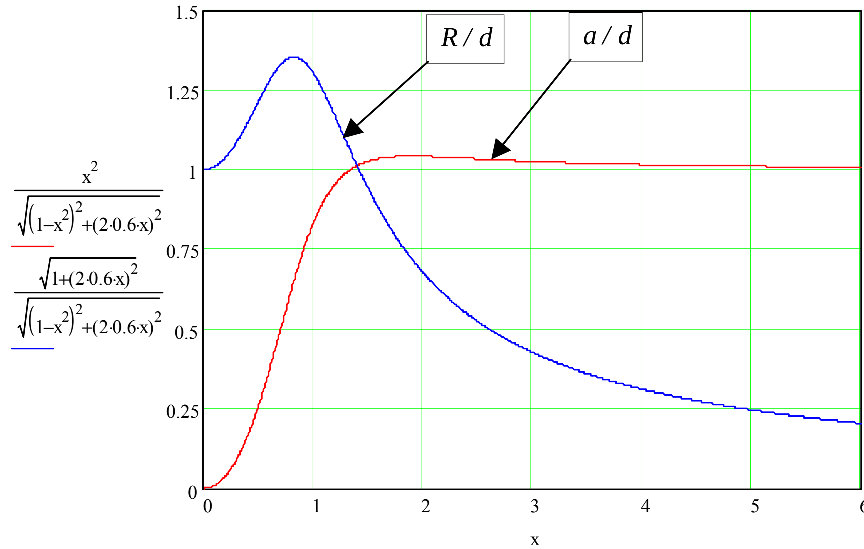


Fig. 1.17.5. Reprezentarea razelor a/d şi R/d funcție de pulsația relativă η (ζ=0,6)

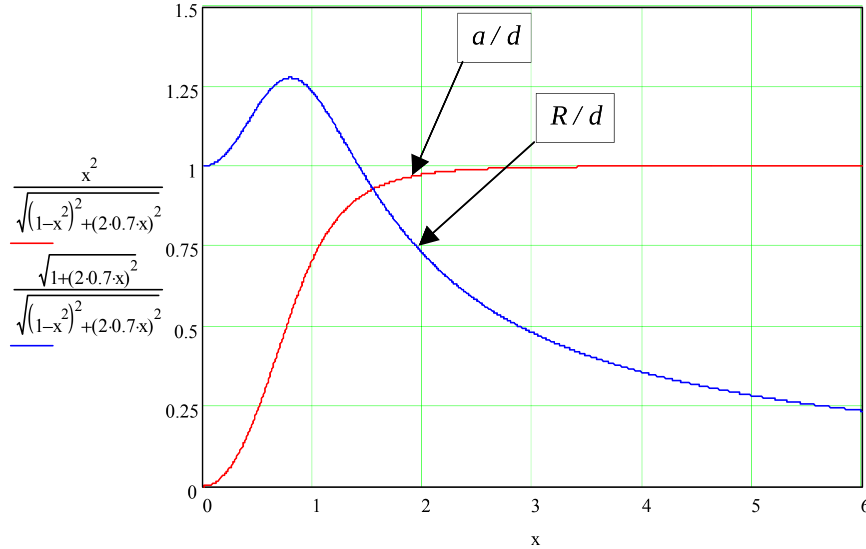


Fig. 1.17.6. Reprezentarea razelor a/d și R/d funcție de pulsația relativă η (ζ=0,7)

În figurile 1.17.5 şi 1.17.6 s-au reprezentat funcțiile $a(\eta)/d$ şi $R(\eta)/d$ pentru două valori ale factorului de amortizare: $\zeta=0.6$ şi $\zeta=0.7$

Dacă se anulează derivata expresiei (1.17.17) la pătrat se obține valoarea pulsației relative η_1 pentru care raza R este maximă:

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1+(2\zeta\eta)^2}{(1-\eta^2)^2+(2\zeta\eta)^2}\right)=\frac{-4\eta\left(4\zeta^2\eta^4+\eta^2-1\right)}{\left[(1-\eta^2)^2+(2\zeta\eta)^2\right]^2}=0$$
$$\Rightarrow \eta_1=\sqrt{\frac{\sqrt{16\zeta^2+1}-1}{8\zeta^2}} \tag{1.17.19}$$

Dacă se anulează derivata expresiei (1.17.10) la pătrat se obține valoarea pulsației relative η_2 pentru care raza a este maximă:

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta^4}{(1-\eta^2)^2+(2\zeta\eta)^2}\right)=\frac{4\eta^3\left(1-\eta^2(1-2\zeta^2)\right)}{\left[(1-\eta^2)^2+(2\zeta\eta)^2\right]^2}=0$$
$$\Rightarrow \eta_2=\frac{1}{\sqrt{1-2\zeta^2}} \tag{1.17.20}$$

În figura 1.17.7 sunt reprezentate cele trei funcții η_0 , η_1 şi η_2 date de relațiile (1.17.18), (1.17.19) şi (1.17.20) iar în figura 1.17.8 unghiul de fază φ care reprezintă tocmai unghiul dintre O_1O şi OC (fig. 1.17.2).

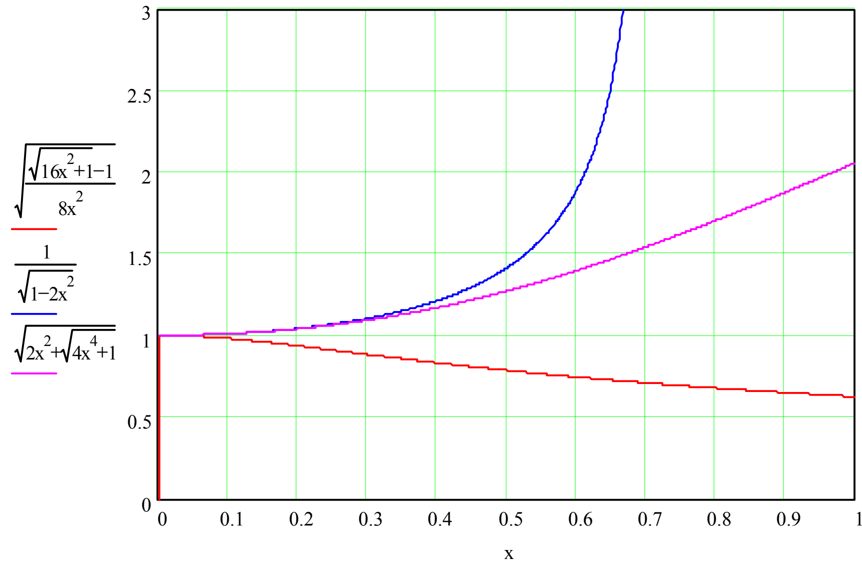


Fig. 1.17.7. Diagramele de variație ale pulsațiilor relative caracteristice η_0 , η_1 , η_2 funcție de factorul de amortizare ζ

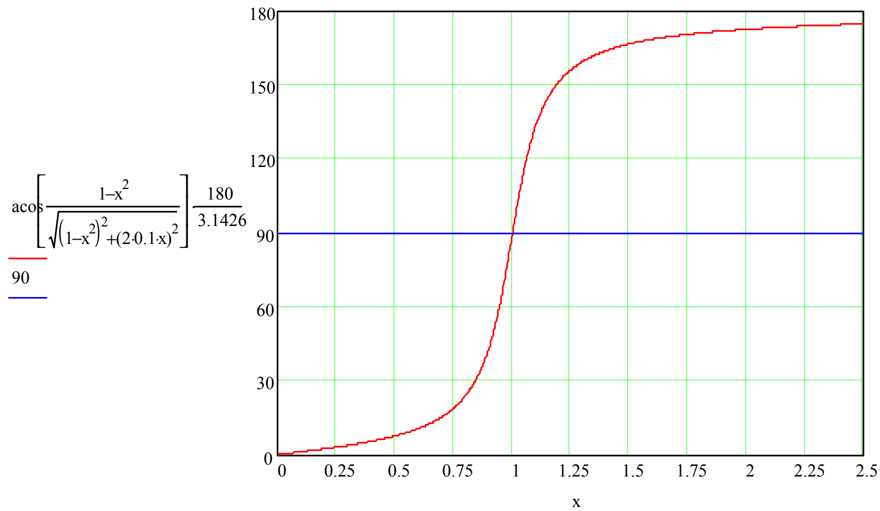


Fig. 1.17.8. Diagrama de variație a defajajului φ funcție de pulsația relativă pentru un factor de amortizare ζ=0,1

Concluzii

- Valoarea celor două raze *a*(η) şi *R*(η) reprezintă amplitudinea vibraţiilor punctului O situat pe axa arborelui respectiv a centrului de greutate al volantului; acestea depind de turaţia arborelui (prin pulsaţia relativă η) şi de factorul de amortizare ζ.
- Maximul celor două raze *a*(η) şi *R*(η) se obţine mai întâi pentru raza R la o pulsaţie relativă η_1 apoi pentru raza a la o pulsaţie relativă η_2 , pulsaţii care sunt cu atât mai apropiate cu cât factorul de amortizare este mai mic (fig. 1.17.3, 1.17.4, 1.17.5) şi (fig. 1.17.7)
- Pentru valori ale factorului de amortizare ce rezultă din condiţia de existenţă a funcţie dată de relaţia: $1-2\zeta^2>0 \Rightarrow \zeta<\frac{\sqrt{2}}{2}$, raza *a*(η) admite maxim. Pentru $\zeta>0{,}707$ are variaţia din figura 1.17.6.
- Pentru valori mici ale factorului de amortizare cele două valori ale pulsaţiei relative sunt foarte apropiate şi de asemenea valorile maxime ale celor două raze *a*(η) şi *R*(η) sunt apropiate şi ating valori foarte mari ce corespund valorii de rezonanţă (η=1) (fig. 1.17.4);
- Pentru valori mai mari ale factorului de amortizare (dar mai mici decât 0.7) valorile maxime ale razei *R*(η) şi *a*(η) scad destul de mult şi pulsaţiile relative corespunzătoare acestor valori sunt mai depărtate (fig. 1.17.5, 1.17.7);
- Pentru un regim anterezonant (η<1), unghiul de fază φ este mai mic de 90^0, pentru un regim rezonant (η=1) unghiul de fază este 90^0 iar pentru un regim postrezonant unghiul de fază φ este mai mare de 90^0 (fig. 7). Aceasta înseamnă că punctul C se află în interiorul cercului de rază a, adică se produce fenomenul de autocentrare . Acest fapt se observă si din modul de variaţie al razei R din figurile 1.17.4, 1.17.5 şi 1.17.6.

1.17.2. Amortizorul hidraulic liniar cu piston

Este format dintr-un cilindru de diametru interior *d* în interiorul căruia se deplasează un piston de înălţime *h* cu o serie de orificii cilindrice (unde *N* este numărul de orificii) având diametrul interior d_1.

Acest cilindru este umplut cu ulei având vâscozitatea cinematică η şi densitatea ρ şi etanşat faţă de exterior şi faţă de pistonul interior (fig. 1.17.9). Se determină forţa rezitentă F_R opusă de elementul hidraulic

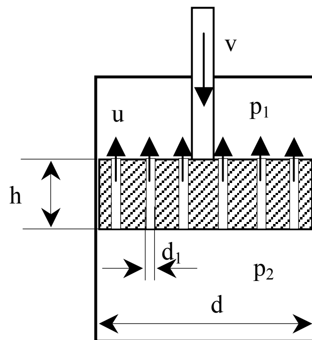


Fig. 1.17.9.

Prin deplasarea pistonului în jos cu viteza v uleiul curge prin orificiile cilindrice cu viteza medie u. Această viteză se determină din condiţia curgerii unui fluid incompresibil:

$$N \cdot u \frac{\pi d_1^2}{4} = v \frac{\pi d^2}{4} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{N}\left(\frac{d}{d_1}\right)^2 v \qquad (1.17.21)$$

Forța rezisentă opusă de elementul hidrulic este proporțională cu diferența de presiune care ia naştere între cele două camere ale pistonului şi cu aria suprafeței bazei cilindrului:

$$R = \Delta p \frac{\pi d^2}{4} \qquad (1.17.22)$$

Căderea de presiune Δp este proporțională cu lungimea orificiilor, pătratul vitezei de curgere a uleiului prin orificii şi un coeficient de pierderi f:

$$\Delta p = \rho \frac{h}{d_1}\frac{u^2}{2} f; \qquad f = \frac{64}{ud_1}\frac{\eta}{\rho}$$
$$\Rightarrow \Delta p = \frac{32h}{Nd_1^2}\eta\left(\frac{d}{d_1}\right)^2 v \qquad (1.17.23)$$

Înloculind în relația (1.17.22) rezultă forța rezistentă din amortizor:

$$F_R = \frac{8\pi}{N} h\eta\left(\frac{d}{d_1}\right)^4 v \qquad (1.17.24)$$

Coeficientul de amortizare se determină în funcție de datele problemei:

$$c = \frac{R}{v} = \frac{8\pi}{N} h\eta\left(\frac{d}{d_1}\right)^4 \qquad (1.17.25)$$

1.17.3. Amortizorul hidraulic unghiular

Amortizorul hidraulic unghiular este format dintr-un cilindru de diametru exterior *d(2r)* şi lungime L care se roteşte în interiorul unei carcase fixe cilindrice, între cele două piese fiind introdus un film de ulei de grosime constantă *e* ca în figura 1.17.10. Uleiul hidraulic etanşat față de exterior are vâscozitatea cinematică η şi densitatea ρ. Se determină cuplul rezistent opusă de elementul hidraulic la rotirea cu viteza unghiulară $\dot{\theta}$.

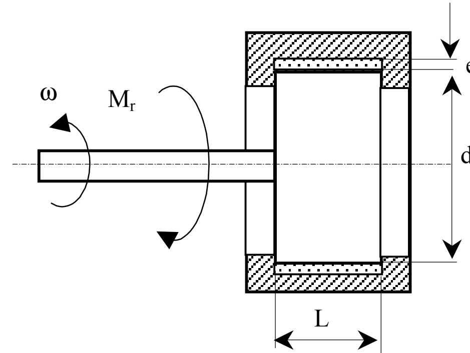


Fig. 1.17.10

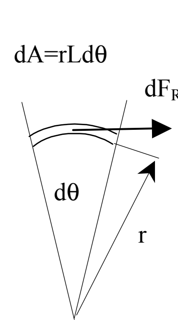


Fig. 1.17.11

Prin rotirea cilindrului cu viteza unghiulară ω în pelicula de ulei ia naştere o forţă rezistentă direct proporţională cu suprafaţa şi viteza relativă a celor două suprafeţe şi invers proporţională cu grosimea peliculei de ulei (fig. 1.17.11):

$$dF_R = -\frac{\eta dA}{e} v = -\frac{\eta r L d\theta}{e} r\dot{\theta} \qquad (1.17.26)$$

Ţinând seama de relaţia (1.17.26) cuplul rezistent care ia naştere datorită frecării vâscoase se poate scrie:

$$M_R = \int r dF_R = -\int_0^{2\pi} \frac{\eta r^3 L}{e} \dot{\theta}\, d\theta = -\frac{\eta r^3 L}{e} \dot{\theta} \int_0^{2\pi} d\theta = -\frac{2\pi\eta r^3 L}{e} \dot{\theta} \qquad (1.17.27)$$

Coeficientul de amortizare se determină imediat funcţie de datele problemei:

$$c_t = \frac{2\pi\eta r^3 L}{e} \qquad (1.17.28)$$

1.18. Probleme propuse

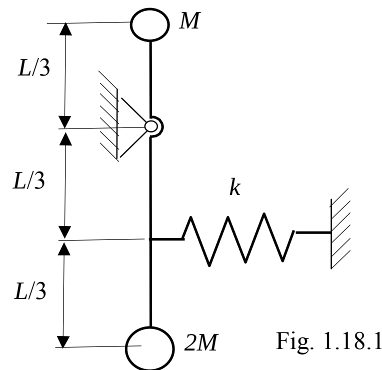


Fig. 1.18.1

1.18.1. O bară omogenă având masa *m* şi lungimea *L* are la capete sale două mase concentrate de mase *M* şi *2M* şi este legată de mediul fix printr -o articulaţie O şi un element elastic de rigiditate *k*, (fig.1.18.1). Să se determine pulsaţia, perioada şi frecvenţa vibraţiilor libere ale acestui sistem. Date: m = 1 kg; M=5 kg; L =300 mm; k =100 N/mm; g =10 ms^{-2}

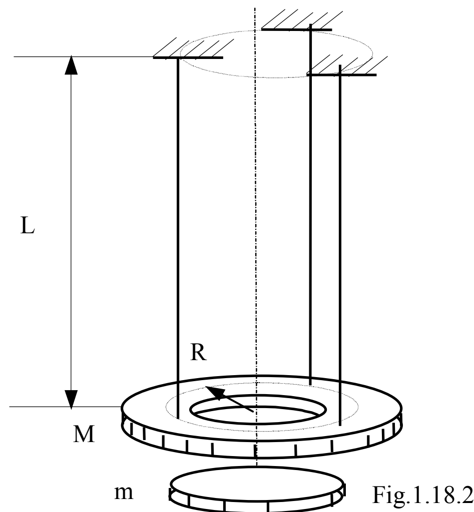


Fig.1.18.2

1.18.2. Se dă sistemul format dintr-o coroană circulară omogenă de masă *M*, suspendată cu ajutorul a trei fire flexibile, inextensibile de aceeaşi lungime *L*, în trei puncte situate pe un cerc de rază *R*, ca în fig. 1.18.2. Dacă se scoate coroana din poziţia de echilibru (prin rotirea ei în jurul axei verticale), aceasta va efectua vibraţii torsionale în jurul axei verticale cu perioada T_0. Dacă se aşează coaxial pe această coroană, un disc omogen de masă *m,* sistemul va efectua vibraţii torsionale cu perioada T_1. Se cere să se determine momentele de inerţie ale coroanei circulare şi ale discului omogen. Date numerice: M = 5 kg; m = 1 kg L=800 mm; R =250 mm; T_0=1,5 sec; T_1= 1,7 sec; g=10 ms^{-2}

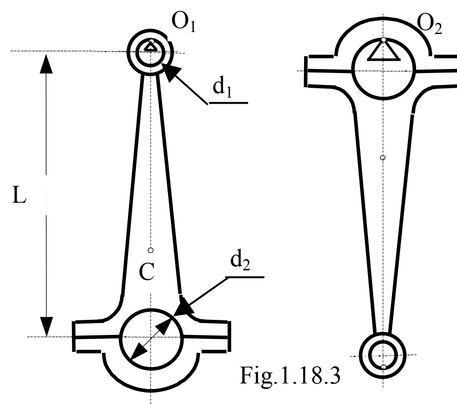


Fig.1.18.3

1.18.3. Biela unui motor cu aprindere prin scânteie are masa *m* , distanţa între cele două axe ale alezajelor *L* şi diametrele alezajelor d_1 şi d_2 (fig. 1.18.3). Să se determine cu ajutorul perioadelor oscilaţiilor faţă de punctele O_1 şi O_2 : T_1 şi respectiv T_2 , momentul de inerţie al bielei în raport cu o axă care trece prin centrul de greutate C şi care este paralelă cu axele alezajelor.

Date numerice: m = 0,5 kg; L=130 mm; d_1= 20 mm; d_2= 40 mm; T_1=0,8 sec; T_2=0,75 sec; g=10 ms^{-2}

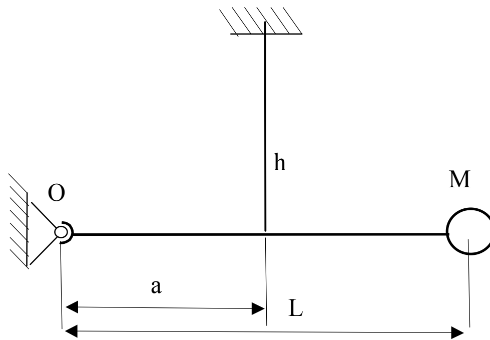


Fig. 1.18.4

1.18.4. O bară omogenă având masa *m* şi lungimea *L* are la la un capăt o masă concentrată *M* şi la celălalt capăt este legată de mediul fix printr-o articulație O. La distanța a de articulația O este suspendată cu un fir inextensibil de lungime *h*, ca în fig.1.18.4. Să se determine pulsația, perioada şi frecvența oscilațiilor libere ale acestui sistem. Date numerice:

m = 1 kg; M = 4 kg

L = 300 mm; a=100 mm

h = 400 mm; g=10 ms^{-2}

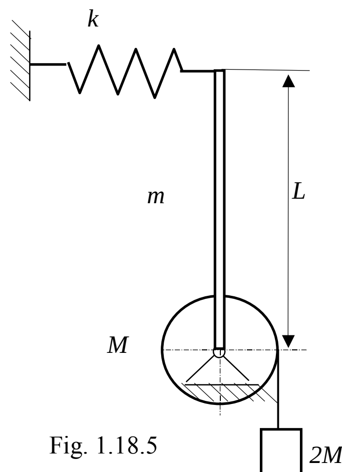


Fig. 1.18.5

1.18.5. O bară omogenă având masa *m* şi lungimea *L* este sudată la un capăt de o roată omogenă de masă *M* şi rază *R*, peste care este înfăşurat un fir la capătul căruia atârnă masa *2M;* la celălalt capăt tija este legată de mediul fix prin intermediul unui arc de rigiditate *k* (fig.1.18.5). Să se determine pulsația, perioada şi frecvența vibrațiilor libere ale acestui sistem. Date numerice:

m =1 kg; M = 5 kg; L = 300 mm; R = 50 mm; k = 100 N/mm; g = 10 ms^{-2}

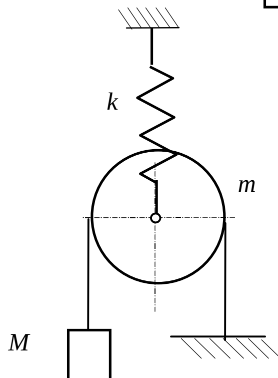


Fig. 1.18.6

1.18.6. Se dă sistemul elastic format dintr-o roată omogenă de masă *m* legată de mediul fix prin intermediul unui arc de rigiditate *k,* peste care este înfăşurat un fir la capătul căruia atârnă masa *M* , celălalt capăt al firului fiind legat de mediul fix (fig.1.18.6). Să se determine pulsația, perioada şi frecvența vibrațiilor libere ale acestui sistem. Date numerice: m=1 kg; M = *5kg;* k=100 N/mm; g=10 ms^{-2}

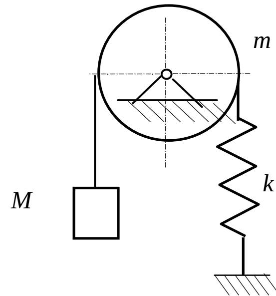


Fig. 1.18.7

1.18.7. Se dă sistemul elastic format dintr-o roată omogenă de masă *m* care este legată de mediul fix prin intermediul unei articulații, peste roată fiind înfăşurat un fir la capătul căruia atârnă masa *M* , iar celălalt capăt al firului este legat de mediul fix prin intermediul unui arc de rigiditate *k* (fig.1.18.7). Să se determine pulsația, perioada şi frecvența vibrațiilor libere ale acestui sistem. Date numerice: *m* =1;*M = 5 kg; k*=100 N/mm; g =10 ms^{-2}

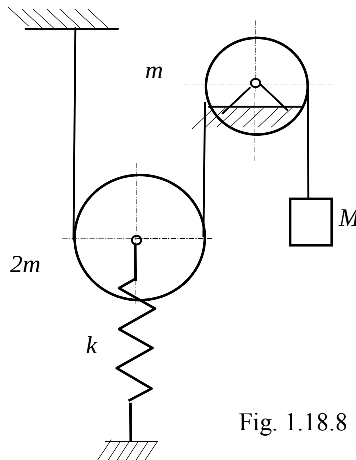


Fig. 1.18.8

1.18.8. Se dă sistemul elastic format dintr-o roată omogenă de masă *m* care este legată de mediul fix prin intermediul unei articulații peste care este înfăşurat un fir la capătul căruia atârnă masa *M* iar celălalt capăt este înfăşurat pe o a doua roată omogenă de masă *2m* şi legat de mediul fix ca în fig.1.18.8; cea de-a doua roată este legată de mediul fix prin intermediul unui arc de rigiditate *k*. Să se determine pulsația, perioada şi frecvența vibrațiilor libere ale acestui sistem. Date numerice: *m*=1 kg; *M = 5kg; k*=100 N/mm; g=10 ms^{-2}

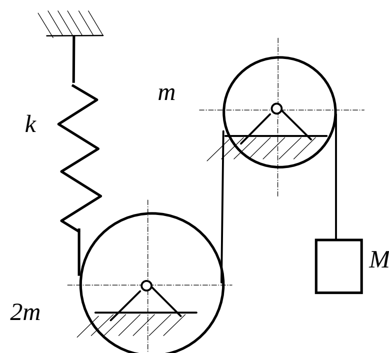


Fig. 1.18.9

1.18.9. Se dă sistemul elastic format dintr-o roată omogenă de masă *m* care este legată de mediul fix prin intermediul unei articulații; peste roată este înfăşurat un fir, la capătul căruia atârnă masa *M* iar celălalt capăt al firului este înfăşurat pe o a doua roată omogenă de masă *2m* şi legat de mediul fix prin intermediul unui arc de rigiditate *k* ; cele două roți sunt legate de mediul fix prin intermediul unor articulații, ca în fig.1.18.9. Să se determine pulsația, perioada şi frecvența vibrațiilor libere ale acestui

sistem. Date numerice: m=1 kg; M=4 kg; k=100 N/mm; g=10 ms^{-2}

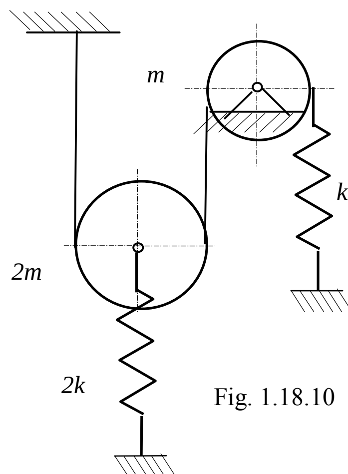


Fig. 1.18.10

1.18.10. Se dă sistemul elastic format dintr-o roată omogenă de masă m care este legată de mediul fix prin intermediul unei articulații; peste roată este înfăşurat un fir care este legat de mediul fix prin intermediul unui arc de rigiditate k , iar celălalt capăt al firului este înfăşurat pe o a doua roată omogenă de masă $2m$, care la rândul ei este legată de mediul fix prin intermediul unui arc de rigiditate $2k$, ca în fig.1.18.10. Să se determine pulsația, perioada şi frecvența vibrațiilor libere ale acestui sistem. Date numerice: m=1 kg; k=100 N/mm; g=10 ms^{-2}

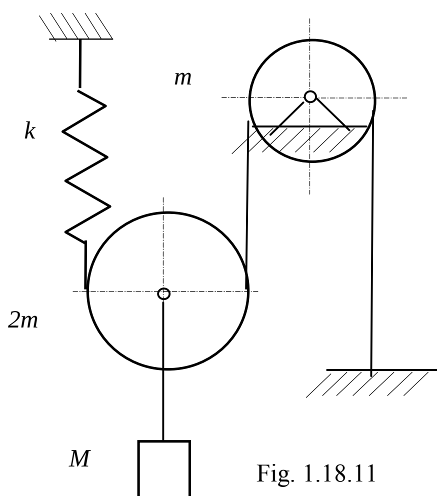


Fig. 1.18.11

1.18.11. Se dă sistemul elastic format dintr-o roată omogenă de masă m care este legată de mediul fix prin intermediul unei articulații; peste roată este înfăşurat un fir care are un capăt legat de mediul fix prin intermediul unui arc de rigiditate k , iar celălalt capăt al firului este înfăşurat pe o a doua roată omogenă de masă $2m$ pe axa şi legat de mediul fix prin intermediul unui arc de rigiditate k (vezi fig.1.18.11). De axa roții de masă $2m$ atârnă masa M. Să se determine pulsația, perioada şi frecvența vibrațiilor libere ale acestui sistem. Date numerice: m=1 kg; M=4 kg ; k=100 N/mm; g=10 ms^{-2}

1.18.12. Se dă sistemul elastic format dintr-o bară omogenă având masa m şi lungimea L care este sudată la un capăt de o roată omogenă de masă M şi rază R legată de mediul fix printr-o articulație O. Peste roată este înfăşurat un fir cu un corp de masa M. La mijlocul barei acționează o forță perturbatoare $F=F_0 \sin \omega t$ iar tija este legată de mediul fix prin intermediul unui arc de rigiditate k (fig.1.18.12). Să se determine amplitudinea vibrațiilor staționare ale acestui sistem. Date numerice: m =1 kg; M = 5 kgM; L = 300 mm; R = 50 mm; k = 100 N/mm; F_0=50N; ω=10 rad/sec; g = 10 ms^{-2}

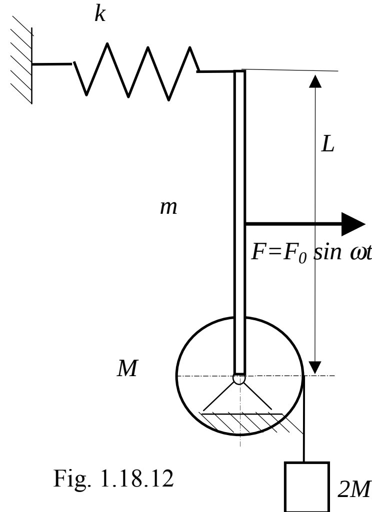


Fig. 1.18.12

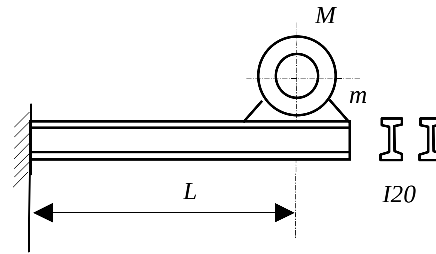


Fig. 1.13

1.18.13. Un motor electric de masă *M* având rotorul de masă *m,* este montat la capătul unei console formată din două profile *I20* , de lungime *L* (fig. 1.18.13). Cunoscând turația de regim a motorului (*n)* şi amplitudinea vibrațiilor staționare (*a)*, să se determine excentricitatea rotorului *(e)* şi frecvența de rezonanță a sistemului. Date numerice: *M*=10 kg, *m*=2,5 kg, L=500mm; *n*=3000 rot/min, I_{20}=2140cm^4; *a* = 0,5 mm

1.18.14. Pe o tijă orizontală care se roteşte în jurul unui ax vertical cu viteza unghiulară ω_0 constantă, se află două mase *m*, legate de axul vertical prin intermediul unor arcuri de rigiditate *k* (fig.1.18.14). Să se determine pulsația vibrațiilor proprii ale celor două mase în mişcarea lor relativă față de tijă (dacă se neglijează frecarea) şi să se determine viteza unghiulară maximă $\omega_{\max}$ pentru care este posibilă mişcarea vibratorie a celor două mase. Date numerice: *m*=1 kg; $\omega_0 = 1 rad/sec$; *k*=100 N/mm

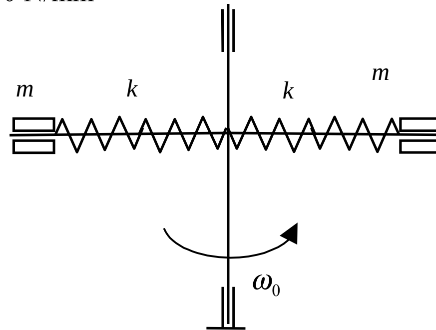


Fig. 1.18.14

1.18.15. Un motor electric de masă *M* având rotorul de masă *m*, turația de regim *n* şi excentricitatea *e* , este montat pe o traversă de lungime *L* încastrată la un capăt şi rezemată la celălalt şi are secțiunea dreptunghiulară *bxh* ca în fig. 1.18.15. Să se determine amplitudinea vibrațiilor staționare şi frecvența de rezonanță a sistemului. Date numerice: *M* =10 kg, *m* = 2,5 kg, b = 80 mm; *h* =100 mm; *L* = 500 mm; *e*= 0,2 mm; *n* =3000 rot/min,

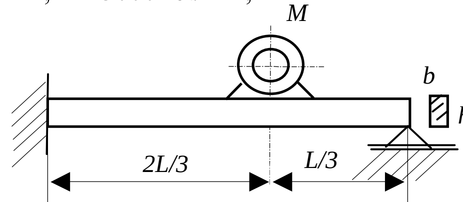


Fig. 1.18.15

1.18.16. Un motor electric de masă *M* având rotorul de masă *m* şi excentricitate *e* , este montat în consolă pe o consolă de lungime *L* încastrată la un capăt şi cu un reazem intermediar , având secțiunea dreptunghiulară *bxh* ca în fig. 1.18.16. Ştiind că turația de regim a motorului este *n* să se determine amplitudinea *a* pentru vibrațiile staționare şi frecvența de rezonanță a sistemului. Date numerice: *M*=10 kg, *m*=2,5 kg; *b* = 80 mm; *h* =100 mm; L = 500 mm; *e*= 0,2 mm; *n*=2800 rot/min.

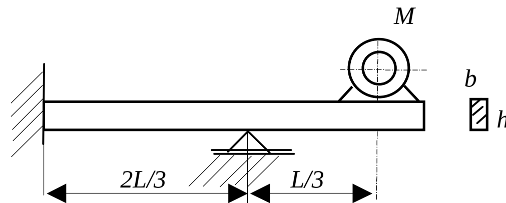


Fig. 1.18.16

CAPITOLUL II
VIBRAȚIILE SISTEMELOR CU DOUA GRADE DE LIBERTATE

2.1. Ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor libere

Modelul matematic al vibrațiilor libere este format din două mase m_1 şi m_2 legate între ele cu arcul de constantă elastică k_1 şi de mediul fix cu arcul de constantă elastică k_2 ca în figura 2.1.1.

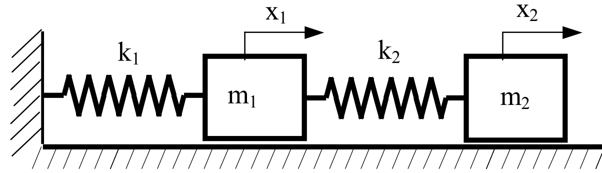


Fig. 2.1.1

Pentru deducerea ecuațiilor de mişcare se folosesc următoarele metode:

2.1.1. Teorema impulsului

Ecuațiile diferențiale se pot scrie folosind teorema impulsului (fig. 2.1.2) după ce se izolează fiecare corp şi se introduc forțele de legătură din cele două arcuri:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) \end{cases} \quad (2.1.1)$$

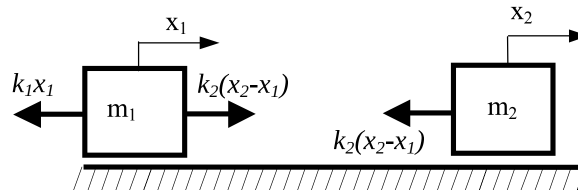


Fig. 2.1.2

Ecuațiile (2.1.1) se mai pot scrie:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = 0 \end{cases} \quad (2.1.2)$$

sau matriceal se scriu sub forma:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (2.1.3)$$

unde: $[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$ este matricea de inerție (simetrică) (2.1.4)

$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$ - matricea de rigiditate (simetrică) (2.1.5)

$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$ - vectorul deplasărilor (2.1.6)

$\{\ddot{x}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}$ - vectorul accelerațiilor (2.1.7)

Înmulțind ecuația matriceală (2.1.3) la stânga cu matricea $[M]^{-1}$ se obține:

$$\{\ddot{x}\} + [M]^{-1}[K]\{x\} = \{0\} \quad (2.1.8)$$

Se definește matricea dinamică a sistemului:

$$[D] = [M]^{-1}[K] \quad (2.1.9)$$

Pentru sistemul analizat matricea dinamică are expresia:

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_1 + k_2}{m_1} & -\frac{k_2}{m_1} \\ -\frac{k_2}{m_2} & \frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix} \quad (2.1.10)$$

Ținând seama de relația (2.1.9) ecuația matriceală (2.1.8) se mai scrie sub forma:

$$\{\ddot{x}\} + [D]\{x\} = \{0\} \quad (2.1.11)$$

În general matricea dinamică nu este o matrice simetrică având cel puțin un termen nediagonal nenul, ceea ce înseamnă că cele două ecuații nu sunt independente: spunem că cele două ecuații sunt *cuplate* iar termenii nediagonali se numesc *termeni de cuplaj*. Dacă termenii nediagonali sunt nuli atunci sistemul degenerează în două sisteme independente cu câte un grad de libertate.

2.1.2. Principiul lui d'Alembert

Ecuațiile diferențiale se mai pot scrie folosind principiul lui d'Alembert izolând fiecare corp și introducând forțele de legătură și de inerție corespunzătoare (fig. 2.1.3):

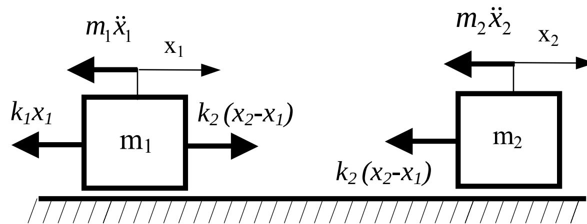


Fig. 2.1.3

Aceste ecuații sunt:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 - k_2(x_2 - x_1) = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0 \end{cases} \tag{2.1.12}$$

deci se obține acelaşi sistem de ecuații obținut prin prima metodă:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = 0 \end{cases} \tag{2.1.13}$$

2.1.3. Metoda coeficienților de influență

Se utilizează atunci când forțele de legătură rezultate din izolarea corpurilor sunt mai greu de obținut. In aceste cazuri este mai convenabil să se exprime deplasările maselor x_i în funcție de forțele de inerție Φ_j şi coeficienții de influență δ_{ij} folosind principiul suprapunerii efectelor:

$$\begin{cases} x_1 = \delta_{11}\Phi_1 + \delta_{12}\Phi_2 \\ x_2 = \delta_{21}\Phi_1 + \delta_{22}\Phi_2 \end{cases} \tag{2.1.14}$$

unde:

- $\Phi_1 = -m_1\ddot{x}_1;\quad \Phi_2 = -m_2\ddot{x}_2$ sunt cele două forțe de inerție corespunzătoare celor două corpuri de mase m_1 şi m_2;
- δ_{11}, δ_{21} sunt coeficienții de influență adică deplasările celor două corpuri corespunzătoare unei forțe unitare ce acționează asupra corpului de masă m_1 (fig.2.1.4.a). Aceste deplasări sunt:

$$\delta_{11} = \delta_{21} = \frac{1}{k_1} \tag{2.1.15}$$

- δ_{12}, δ_{22} sunt coeficienții de influență adică deplasările celor două corpuri corespunzătoare unei forțe unitare ce acționează asupra corpului de masă m_2 (fig.2.1.4.b). Aceste deplasări sunt:

$$\delta_{12} = \frac{1}{k_1};\quad \delta_{22} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \tag{2.1.16}$$

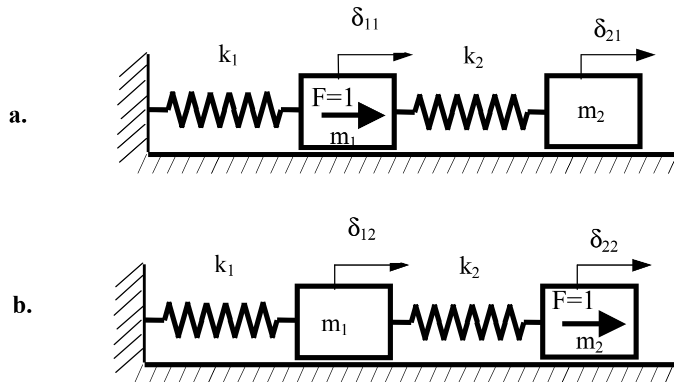


Fig. 2.1.4

Înlocuind în relațiile (2.1.14) se obține sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} \dfrac{m_1}{k_1}\ddot{x}_1 + \dfrac{m_2}{k_1}\ddot{x}_2 + x_1 = 0 \\ \dfrac{m_1}{k_1}\ddot{x}_1 + \left(\dfrac{m_2}{k_1} + \dfrac{m_2}{k_2}\right)\ddot{x}_2 + x_2 = 0 \end{cases} \tag{2.1.17}$$

Ecuațiile diferențiale (2.1.17) se scriu sub forma matriceală astfel:

$$[B]\{\ddot{x}\} + \{x\} = \{0\} \tag{2.1.18}$$

unde:

$$[B] = \begin{bmatrix} \delta_{11}m_1 & \delta_{12}m_2 \\ \delta_{21}m_1 & \delta_{22}m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \tag{2.1.19}$$

$$[B] = [\Delta][M]$$

$[\Delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}$ este matricea coeficienților de influență

Ecuația matriceală (2.1.18) se mai scrie:

$$[\Delta][M]\{\ddot{x}\} + \{x\} = \{0\} \tag{2.1.20}$$

Înmulțind ecuația matriceală (2.1.18) la stânga cu $[B]^{-1}$ se obține:

$$\{\ddot{x}\} + [B]^{-1}\{x\} = \{0\} \tag{2.1.21}$$

comparată cu (2.1.11) rezultă legătura cu matricea dinamică a sistemului:

$$[D] = [B]^{-1}$$

$$\text{sau } [B] = [D]^{-1} \tag{2.1.22}$$

Pentru exemplul considerat se poate verifica relația (2.1.22) care se mai scrie:

$$[B][D] = [I] \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{m_1}{k_1} & \dfrac{m_2}{k_1} \\ \dfrac{m_1}{k_1} & \dfrac{m_2}{k_1} + \dfrac{m_2}{k_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{k_1 + k_2}{m_1} & -\dfrac{k_2}{m_1} \\ -\dfrac{k_2}{m_2} & \dfrac{k_2}{m_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.1.23}$$

Înmulțind ecuația matriceală (2.1.20) la stânga cu $[\Delta]^{-1}$ se obține:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [\Delta]^{-1}\{x\} = \{0\} \tag{2.1.24}$$

comparată cu (2.1.3) rezultă legătura cu matricea de rigiditate:

$$[K] = [\Delta]^{-1}$$

$$\text{sau } [\Delta] = [K]^{-1} \tag{2.1.25}$$

Pentru exemplul considerat se poate verifica relația (2.1.25) care se mai scrie:

$$[K][\Delta] = [I] \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{1}{k_1} & \dfrac{1}{k_1} \\ \dfrac{1}{k_1} & \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.1.26}$$

2.1.5. Ecuațiile lui Lagrange

Ecuațiile (2.1.27) se pot obține şi cu ajutorul ecuațiilor lui Lagrange pentru un sistem conservativ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0 \qquad (2.1.28)$$

unde: $L = E_c - V$ este funcția Lagrange

$$E_c=\frac{m_1\dot{x}_1^2}{2}+\frac{m_2\dot{x}_2^2}{2} \text{ - energia cinetică a sistemului} \qquad (2.1.29)$$

$$V=\frac{k_1x_1^2}{2}+\frac{k_2(x_2-x_1)^2}{2} \text{ -} \qquad (2.1.29')$$

energia potențială a elementelor elastice

Derivatele parțiale din ecuațiile lui Lagrange sunt:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial E}{\partial \dot{x}_1}=m_1\dot{x}_1\ ; \quad \dfrac{\partial E}{\partial \dot{x}_2}=m_2\dot{x}_2\\ \dfrac{\partial V}{\partial x_1}=k_1x_1-k_2(x_2-x_1);\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial E}{\partial \dot{x}_1}\right)=m_1\ddot{x}_1;\\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial E}{\partial \dot{x}_2}\right)=m_2\ddot{x}_2\\ \dfrac{\partial V}{\partial x_2}=k_2(x_2-x_1)\end{cases} \qquad (2.1.30)$$

Înlocuind (2.1.30) în ecuațiile lui Lagrange se obțin ecuațiile (2.1.1):

$$\begin{cases}m_1\ddot{x}_1+k_1x_1-k_2(x_2-x_1)=0\\ m_2\ddot{x}_2+k_2(x_2-x_1)=0\end{cases} \qquad (2.1.31)$$

Folosind coordonatele generalizate sistemul de ecuații (2.1.31) în cazul general se scrie:

$$\begin{cases}m_{11}\ddot{q}_1+m_{12}\ddot{q}_2+k_{11}q_1+k_{12}q_2=0\\ m_{21}\ddot{q}_1+m_{22}\ddot{q}_2+k_{21}q_1+k_{22}q_2=0\end{cases} \qquad (2.1.32)$$

sau matriceal:

$$[M]\{\ddot{q}\}+[K]\{q\}=\{0\} \qquad (2.1.33)$$

unde: $\{q\}=\begin{Bmatrix}q_1\\ q_2\end{Bmatrix}$ este vectorul coordonatelor generalizate (2.1.34)

$\{\ddot{q}\}=\begin{Bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\end{Bmatrix}$ - vectorul accelerațiilor generalizate (2.1.35)

$[M]=\begin{bmatrix}m_{11} & m_{12}\\ m_{21} & m_{22}\end{bmatrix}$ - matricea de inerție (simetrică) (2.1.36)

$[K]=\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{bmatrix}$ - matricea de rigiditate (simetrică) (2.1.37)

2.2. Pulsații şi moduri proprii de vibrații

Sistemul de ecuații diferențiale (2.1.32) admite soluții armonice sincrone de forma:

$$\begin{cases} q_1 = a_1\, cos(\, pt - \varphi\,) \\ q_2 = a_2\, cos(\, pt - \varphi\,) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{q}_1 = -p^2 a_1\, cos(\, pt - \varphi\,) \\ \ddot{q}_2 = -p^2 a_2\, cos(\, pt - \varphi\,) \end{cases} \tag{2.2.1}$$

unde a_1 şi a_2 sunt amplitudinile mişcării armonice corespunzătoare celor două mase m_1 şi m_2.

Raportul deplasărilor celor două corpuri $\frac{q_1}{q_2} = \frac{a_1}{a_2}$ în anumite cazuri este independent de timp sau deformata dinamică a sistemului (raportul amplitudinilor mişcării celor două corpuri) nu se modifică în timp depinzând numai de pulsațiile proprii ale sistemului p_1 şi p_2.

Înlocuind în ecuațiile diferențiale (2.1.32) relațiile (2.2.1) se obține sistemul:

$$\begin{cases} \left[\left(-p^2 m_{11} + k_{11}\right)a_1 + \left(-p^2 m_{12} + k_{12}\right)a_2\right] cos(\, pt - \varphi\,) = 0 \\ \left[\left(-p^2 m_{21} + k_{21}\right)a_1 + \left(-p^2 m_{22} + k_{22}\right)a_2\right] cos(\, pt - \varphi\,) = 0 \end{cases} \tag{2.2.2}$$

care este echivalent cu sistemul de ecuații omogene în a_1 şi a_2:

$$\begin{cases} \left(-p^2 m_{11} + k_{11}\right)a_1 + \left(-p^2 m_{12} + k_{12}\right)a_2 = 0 \\ \left(-p^2 m_{21} + k_{21}\right)a_1 + \left(-p^2 m_{22} + k_{22}\right)a_2 = 0 \end{cases} \tag{2.2.3}$$

Sistemul de ecuații (2.2.3) admite soluții nebanale dacă determinantul său este nul, adică:

$$\begin{vmatrix} k_{11} - p^2 m_{11} & k_{12} - p^2 m_{12} \\ k_{21} - p^2 m_{21} & k_{22} - p^2 m_{22} \end{vmatrix} = 0 \tag{2.2.4}$$

care este echivalent cu ecuația de gradul 4:

$$p^4 (\, m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}\,) - p^2 (\, m_{11}k_{22} + m_{22}k_{11} - m_{21}k_{12} - m_{12}k_{21}\,) + \\ + (\, k_{11}k_{22} - k_{21}k_{12}\,) = 0 \tag{2.2.5}$$

Dacă se notează:

$$\begin{aligned} &(\, m_{11}k_{22} + m_{22}k_{11} - m_{21}k_{12} - m_{12}k_{21}\,) = B \\ &(\, m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}\,) = A \\ &(\, k_{11}k_{22} - k_{21}k_{12}\,) = C \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

atunci soluţiile pozitive ale ecuaţiei (2.2.5) se numesc *pulsaţiile proprii* ale mişcării şi se scriu:

$$p_{1,2}=\sqrt{\frac{B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}} \qquad (2.2.7)$$

Valoarea inferioară (p_1) se mai numeşte *pulsaţie fundamentală.*

Modurile proprii de vibraţie:

- dacă se notează cu a_{11} şi cu a_{21} valorile amplitudinilor a_1 şi a_2 corespunzătoare pulsaţiei proprii p_1 rezultă soluţia corespunzătoare primului mod de vibraţie:

$$\begin{cases} q_{11}=a_{11}\,cos(\,p_1t-\varphi_1\,) \\ q_{21}=a_{21}\,cos(\,p_1t-\varphi_1\,) \end{cases} \qquad (2.2.8)$$

Înlocuind p_1 în prima ecuaţie (2.2.3) se obţine amplitudinea a_{21} în funcţie de a_{11}:

$$a_{21}=-\frac{k_{11}-p_1^2m_{11}}{k_{12}-p_1^2m_{12}}a_{11} \qquad (2.2.9)$$

Se notează coeficientul de distribuţie corespunzător pulsaţiei p_1 cu:

$$\mu_{21}=\frac{a_{21}}{a_{11}}=-\frac{k_{11}-p_1^2m_{11}}{k_{12}-p_1^2m_{12}} \qquad (2.2.10)$$

Notând $a_{11}=c_1$, soluţia corespunzătoare modului I de vibraţie (2.2.8) se mai scrie:

$$\begin{cases} q_{11}=c_1\,cos(\,p_1t-\varphi_1\,) \\ q_{21}=\mu_{21}c_1\,cos(\,p_1t-\varphi_1\,) \end{cases} \qquad (2.2.11)$$

- dacă se notează cu a_{12} şi cu a_{22} valorile amplitudinilor a_1 şi a_2 corespunzătoare pulsaţiei proprii p_2 , rezultă soluţia corespunzătoare celui de al doilea mod de vibraţie:

$$\begin{cases} q_{11}=a_{12}\,cos(\,p_2t-\varphi_2\,) \\ q_{21}=a_{22}\,cos(\,p_2t-\varphi_2\,) \end{cases} \qquad (2.2.12)$$

Înlocuind p_2 în prima ecuaţie (2.2.3) se obţine amplitudinea a_{22} în funcţie de a_{12}:

$$a_{22}=-\frac{k_{11}-p_2^2m_{11}}{k_{12}-p_2^2m_{12}}a_{12} \qquad (2.2.13)$$

Se notează coeficientul de distribuţie corespunzător pulsaţiei p_2 cu:

$$\mu_{22}=\frac{a_{22}}{a_{12}}=-\frac{k_{11}-p_2^2\,m_{11}}{k_{12}-p_2^2\,m_{12}} \qquad (2.2.14)$$

Notând $a_{12}=c_2$, soluția corespunzătoare modului I de vibrație (2.2.8) se mai scrie:

$$\begin{cases} q_{11} = c_2 \, cos(\, p_2 t - \varphi_2 \,) \\ q_{21} = \mu_{22} c_2 \, cos(\, p_2 t - \varphi_2 \,) \end{cases} \tag{2.2.15}$$

Soluția generală a vibrațiilor sistemului de corpuri se obține prin însumarea soluțiilor corespunzătoare fiecărui mod propriu de vibrație.

$$\begin{cases} q_1 = q_{11} + q_{12} = c_1 \, cos(\, p_1 t - \varphi_1 \,) + c_2 \, cos(\, p_2 t - \varphi_2 \,) \\ q_2 = q_{21} + q_{22} = \mu_{21} c_1 \, cos(\, p_1 t - \varphi_1 \,) + \mu_{22} c_2 \, cos(\, p_2 t - \varphi_2 \,) \end{cases} \tag{2.2.16}$$

Constantele de integrarec_1, c_2, φ_1 și φ_1 se determină din condițiile inițiale ale mișcării:

$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} q_1 = q_1^0 \\ q_2 = q_2^0 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} \dot{q}_1 = v_1^0 \\ \dot{q}_2 = v_2^0 \end{cases} \tag{2.2.17}$$

Vitezele se obțin prin derivarea soluției generale (2.1.51):

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = -p_1 c_1 \, sin(\, p_1 t - \varphi_1 \,) - p_2 c_2 \, sin(\, p_2 t - \varphi_2 \,) \\ \dot{q}_2 = -p_1 \mu_{21} c_1 \, sin(\, p_1 t - \varphi_1 \,) - p_2 \mu_{22} c_2 \, sin(\, p_2 t - \varphi_2 \,) \end{cases} \tag{2.2.18}$$

Introducând condițiile inițiale (2.2.17) se obține un sistem de 4 ecuații cu 4 necunoscute c_1, c_2, φ_1 și φ_1:

$$\begin{cases} c_1 \, cos \varphi_1 + c_2 \, cos \varphi_2 = q_1^0 \\ \mu_{21} c_1 \, cos \varphi_1 + \mu_{22} c_2 \, cos \varphi_2 = q_2^0 \\ p_1 c_1 \, sin \varphi_1 + p_2 c_2 \, sin \varphi_2 = v_1^0 \\ p_1 \mu_{21} c_1 \, sin \varphi_1 + p_2 \mu_{22} c_2 \, sin \varphi_2 = v_2^0 \end{cases} \tag{2.2.19}$$

2.3. Ortogonalitatea modurilor proprii de vibrație

Se consideră că sistemul vibrează după cele două moduri proprii:

- Modul I: amplitudinile corespunzătoare primului mod de vibrație verifică ambele ecuații (2.2.3) unde pulsația este p_1:

$$\begin{cases}\left(-p_1^2 m_{11}+k_{11}\right)a_{11}+\left(-p_1^2 m_{12}+k_{12}\right)a_{21}=0\\ \left(-p_1^2 m_{21}+k_{21}\right)a_{11}+\left(-p_1^2 m_{22}+k_{22}\right)a_{21}=0\end{cases} \qquad (2.3.1)$$

Dacă se multiplică ecuațiile (2.3.1) cu coeficienții corespunzători celui de-al doilea mod de vibrații (a_{12} respectiv a_{22}) şi se însumează se obține:

$$\begin{aligned}&-p_1^2(m_{11}a_{11}a_{12}+m_{12}a_{21}a_{12}+m_{21}a_{11}a_{22}+m_{22}a_{21}a_{22})+\\&+\left(k_{11}a_{11}a_{12}+k_{12}a_{21}a_{12}+k_{21}a_{11}a_{22}+k_{22}a_{21}a_{22}\right)=0\end{aligned} \qquad (2.3.2)$$

- Modul al II lea: amplitudinile corespunzătoare celui de al doilea mod de vibrație verifică cele două ecuații (2.2.3) unde pulsația este p_2:

$$\begin{cases}\left(-p_2^2 m_{11}+k_{11}\right)a_{12}+\left(-p_2^2 m_{12}+k_{12}\right)a_{22}=0\\ \left(-p_2^2 m_{21}+k_{21}\right)a_{12}+\left(-p_2^2 m_{22}+k_{22}\right)a_{22}=0\end{cases} \qquad (2.3.3)$$

Dacă se multiplică ecuațiile (2.3.3) cu coeficienții corespunzători primului mod de vibrații (a_{11} respectiv a_{21}) şi se însumează se obține:

$$\begin{aligned}&-p_2^2(m_{11}a_{12}a_{11}+m_{12}a_{22}a_{11}+m_{21}a_{12}a_{21}+m_{22}a_{22}a_{21})+\\&+\left(k_{11}a_{12}a_{11}+k_{12}a_{22}a_{11}+k_{21}a_{12}a_{21}+k_{22}a_{22}a_{21}\right)=0\end{aligned} \qquad (2.3.4)$$

Ținând seama că matricele $[K]$ *si* $[M]$ sunt simetrice (adică sunt valabile relațiile: $m_{12}=m_{21}$ *si* $k_{12}=k_{21}$), scăzând cele două ecuații (2.3.2) şi (2.3.4) se obține:

$$\left(p_1^2-p_2^2\right)\left(m_{11}a_{11}a_{12}+m_{12}a_{21}a_{12}+m_{21}a_{11}a_{22}+m_{22}a_{21}a_{22}\right)=0 \qquad (2.3.5)$$

Întrucât $p_1 \neq p_2$ rezultă:

$$\left(m_{11}a_{11}a_{12}+m_{12}a_{21}a_{12}+m_{21}a_{11}a_{22}+m_{22}a_{21}a_{22}\right)=0 \qquad (2.3.6)$$

relație care se mai scrie matriceal sub forma:

$$\begin{aligned}&\{a_{11}\quad a_{21}\}\begin{bmatrix}m_{11} & m_{12}\\ m_{21} & m_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_{12}\\ a_{22}\end{Bmatrix}=0\\ sau\quad &\{a_{12}\quad a_{22}\}\begin{bmatrix}m_{11} & m_{12}\\ m_{21} & m_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_{12}\\ a_{21}\end{Bmatrix}=0\end{aligned} \qquad (2.3.7)$$

$$\{a\}_1^T[M]\{a\}_2 = 0 \quad sau \quad \{a\}_2^T[M]\{a\}_1 = 0 \qquad (2.3.7')$$

unde: $\{a\}_1 = \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{Bmatrix}$, $\{a\}_2 = \begin{Bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{Bmatrix}$ sunt vectorii amplitudinilor corespunzătoare celor două moduri proprii de vibrație.

Relația (2.3.7') exprimă prima condiție de ortogonalitate a celor două moduri proprii de vibrații.

Dacă se împarte relația (2.3.2) cu p_1^2 şi relația (2.3.4) cu p_2^2 se obține:

$$\begin{aligned} &-(m_{11}a_{11}a_{12} + m_{12}a_{21}a_{12} + m_{21}a_{11}a_{22} + m_{22}a_{21}a_{22}) + \\ &+\frac{1}{p_1^2}\left(k_{11}a_{11}a_{12} + k_{12}a_{21}a_{12} + k_{21}a_{11}a_{22} + k_{22}a_{21}a_{22}\right) = 0 \end{aligned} \qquad (2.3.8)$$

respectiv:

$$\begin{aligned} &-(m_{11}a_{12}a_{11} + m_{12}a_{22}a_{11} + m_{21}a_{12}a_{21} + m_{22}a_{22}a_{21}) + \\ &+\frac{1}{p_2^2}\left(k_{11}a_{12}a_{11} + k_{12}a_{22}a_{11} + k_{21}a_{12}a_{21} + k_{22}a_{22}a_{21}\right) = 0 \end{aligned} \qquad (2.3.9)$$

Scăzând cele două relații şi ținând seama că $m_{12} = m_{21}$ *si* $k_{12} = k_{21}$ se obține:

$$\left(\frac{1}{p_1^2} - \frac{1}{p_2^2}\right)\left(k_{11}a_{11}a_{12} + k_{12}a_{21}a_{12} + k_{21}a_{11}a_{22} + k_{22}a_{21}a_{22}\right) = 0 \qquad (2.3.10)$$

Întrucât $p_1 \neq p_2$ rezultă:

$$\left(k_{11}a_{11}a_{12} + k_{12}a_{21}a_{12} + k_{21}a_{11}a_{22} + k_{22}a_{21}a_{22}\right) = 0 \qquad (2.3.11)$$

care se scrie matriceal sub forma:

$$\begin{aligned} &\{a_{11} \quad a_{21}\}\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{Bmatrix} = 0 \\ sau \quad &\{a_{12} \quad a_{22}\}\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_{12} \\ a_{21} \end{Bmatrix} = 0 \end{aligned} \qquad (2.3.12)$$

care se scrie: $\{a\}_1^T[K]\{a\}_2 = 0 \quad sau \quad \{a\}_2^T[K]\{a\}_1 = 0$ (2.3.12')

Relația (2.3.12') exprimă a doua condiție de ortogonalitate a celor două moduri proprii de vibrații.

Dacă se multiplică ecuațiile (2.3.1) cu coeficienții corespunzători primului mod de vibrații (a_{11} respectiv a_{21}) şi se însumează se obține pulsația p_1^2 :

$$\begin{aligned}&-p_1^2(m_{11}a_{11}a_{11}+m_{12}a_{21}a_{11}+m_{21}a_{11}a_{21}+m_{22}a_{21}a_{21})+\\&+(k_{11}a_{11}a_{11}+k_{12}a_{21}a_{11}+k_{21}a_{11}a_{21}+k_{22}a_{21}a_{21})=0\end{aligned} \quad (2.3.13)$$

rezultă pulsația p_1:

$$p_1^2=\frac{m_{11}a_{11}a_{11}+m_{12}a_{21}a_{11}+m_{21}a_{11}a_{21}+m_{22}a_{21}a_{21}}{k_{11}a_{11}a_{11}+k_{12}a_{21}a_{11}+k_{21}a_{11}a_{21}+k_{22}a_{21}a_{21}}=\frac{\{a\}_1^T[M]\{a\}_1}{\{a\}_1^T[K]\{a\}_1} \quad (2.3.14)$$

$$\Leftrightarrow p_1^2=\frac{M_1}{K_1}$$

Dacă se multiplică ecuațiile (2.3.3) cu coeficienții corespunzători celui de al doilea mod de vibrații: a_{12} respectiv a_{22} şi se însumează se obține pulsația p_2^2 :

$$\begin{aligned}&-p_2^2(m_{11}a_{12}a_{12}+m_{12}a_{22}a_{12}+m_{21}a_{12}a_{22}+m_{22}a_{22}a_{22})+\\&+(k_{11}a_{12}a_{12}+k_{12}a_{22}a_{12}+k_{21}a_{12}a_{22}+k_{22}a_{22}a_{22})=0\end{aligned} \quad (2.3.15)$$

rezultă pulsația p_2:

$$p_2^2=\frac{m_{11}a_{12}a_{12}+m_{12}a_{22}a_{12}+m_{21}a_{12}a_{22}+m_{22}a_{22}a_{22}}{k_{11}a_{12}a_{12}+k_{12}a_{22}a_{12}+k_{21}a_{12}a_{22}+k_{22}a_{22}a_{22}}=\frac{\{a\}_2^T[M]\{a\}_2}{\{a\}_2^T[K]\{a\}_2} \quad (2.3.16)$$

$$\Leftrightarrow p_2^2=\frac{M_2}{K_2}$$

2.4. Coordonate principale sau modale

Se consideră sistemul de ecuații diferențiale (2.1.33):

$$[M]\{\ddot{q}\}+[K]\{q\}=0 \tag{2.4.1}$$

Dacă se face transformarea de coordonate:

$$\{q\}=[A]\{\xi\} \tag{2.4.2}$$

unde: $\{q\}=\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$, $\{\xi\}=\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix}$ sunt vectorii coordonatelor generalizate respectiv a coordonatelor principale (2.4.3)

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=[\{a\}_1 \quad \{a\}_2] \tag{2.4.4}$$

este matricea coeficienților modurilor proprii.

Înlocuind în (2.4.1) se obține:

$$[M]\cdot[A]\cdot\{\ddot{\xi}\}+[K]\cdot[A]\cdot\{\xi\}=0 \tag{2.4.5}$$

Se multiplică ecuația matriceală (2.4.5) la stânga cu $[A]^T$ și se obține:

$$[A]^T[M]\cdot[A]\cdot\{\ddot{\xi}\}+[A]^T\cdot[K]\cdot[A]\cdot\{\xi\}=0 \tag{2.4.6}$$

Ținând seama de relațiile de ortogonalitate (2.3.7') și (2.3.12') se obține:

$$[A]^T\cdot[M]\cdot[A]=\begin{bmatrix} \{a\}_1^T[M]\cdot\{a\}_1 & \{a\}_1^T[M]\cdot\{a\}_2 \\ \{a\}_2^T[M]\cdot\{a\}_1 & \{a\}_2^T[M]\cdot\{a\}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \tag{2.4.7}$$

$$[A]^T\cdot[K]\cdot[A]=\begin{bmatrix} \{a\}_1^T[K]\cdot\{a\}_1 & \{a\}_1^T[K]\cdot\{a\}_2 \\ \{a\}_2^T[K]\cdot\{a\}_1 & \{a\}_2^T[K]\cdot\{a\}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \tag{2.4.9}$$

Relația (2.4.7) se scrie:

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\xi}_1 \\ \ddot{\xi}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.4.10}$$

Ținând seama de relațiile (2.3.14) și (2.3.16) se obține:

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1+p_1^2\xi_1=0 \\ \ddot{\xi}_2+p_2^2\xi_2=0 \end{cases} \tag{2.4.11}$$

care reprezintă un sistem complet decuplat (static și dinamic) echivalent cu două sisteme independente cu câte un grad de libertate.

2.5. Probleme rezolvate

2.5.1. Pendulul dublu

Se consideră sistemul cu două grade de libertate format din 2 tije de masă *m* şi lungime *L* articulate la capătul superior, fiecare tijă având la celălalt capăt câte o piesă cilindrică de masă *M*. La distanța *a* de articulații tijele sunt legate între ele cu un arc de constantă elastică *k* ca în figura 2.5.1. Să se determine pulsațiile şi modurile proprii de vibrație.

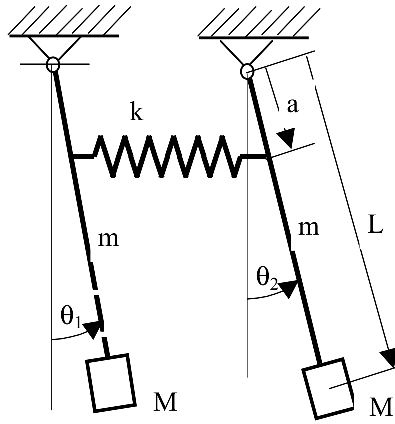


Fig. 2.5.1

Se consideră θ_1 şi θ_2 ca parametrii ai mişcării sistemului.

Valorile deplasărilor şi vitezelor unghiulare la momentul inițial ($t = 0$) sunt:

$$\theta_1 = \theta_1^0;\ \theta_1 = \theta_1^0;\ \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0 \quad (2.5.1)$$

Energia cinetică a sistemului este:

$$E_c = \frac{1}{2}\left(J + ML^2\right)\cdot\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\right) \quad (2.5.2)$$

unde $J = \dfrac{mL^2}{3}$ este momentul de inerție al barei

Energia potențială a sistemului este formată din energia elastică a arcului şi energia potențială gravitațională a sistemului de bare şi corpuri:

$$V = \frac{ka^2}{2}\left[(\theta_2 - \theta_1)^2\right] - gl\left(M + \frac{m}{2}\right)(cos\theta_1 + cos\theta_2) \quad (2.5.3)$$

Ecuațiile lui Lagrange se scriu:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}_k}\right) + \frac{\partial V}{\partial \theta_k} = 0 \ \Rightarrow \ \begin{cases} J_0\ddot{\theta}_1 + k_0\theta_1 - ka^2\theta_2 = 0 \\ J_0\ddot{\theta}_2 - ka^2\theta_1 + k_0\theta_2 = 0 \end{cases} \quad (2.5.4)$$

unde s-a notat:

$$\begin{cases} J_0 = \dfrac{mL^2}{3} + ML^2 \\ k_0 = ka^2 + gl\left(M + \dfrac{m}{2}\right) \end{cases} \quad (2.5.5)$$

Soluțiile sistemului de ecuații diferențiale (2.5.4) sunt de forma:

$$\begin{cases} \theta_1 = a_1\,cos(pt - \varphi) \\ \theta_2 = a_2\,cos(pt - \varphi) \end{cases} \quad (2.5.6)$$

Introducând în (2.5.4) se obține sistemul omogen:

$$\begin{cases} (-J_0 p^2 + k_0)a_1 - ka^2 a_2 = 0 \\ -ka^2 a_1 + (-J_0 p^2 + k_0)a_2 = 0 \end{cases} \quad (2.5.7)$$

Condiția de compatibilitate a sistemului omogen (2.5.7) se scrie:

$$\begin{vmatrix} k_0 - J_0 p^2 & -ka^2 \\ -ka^2 & k_0 - J_0 p^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.5.8)$$

$$(k_0 - J_0 p^2)^2 - (ka^2)^2 = 0 \qquad (2.5.9)$$

Rezolvând ecuația (2.5.9) rezultă cele 2 pulsații proprii:

$$p_1 = \sqrt{\frac{k_0 - ka^2}{J_0}} = \sqrt{\frac{g\left(M + \frac{m}{2}\right)}{L\left(M + \frac{m}{3}\right)}} \qquad (2.5.10)$$

$$p_2 = \sqrt{\frac{k_0 + ka^2}{J_0}} = \sqrt{\frac{gL\left(M + \frac{m}{2}\right) + 2ka^2}{L^2\left(M + \frac{m}{3}\right)}} \qquad (2.5.11)$$

Mişcările corespunzătoare modului *r* de vibrație (*r=1,2*) sunt:

$$\begin{cases} \theta_{1r} = a_{1r} \cos(p_r t - \varphi_r) \\ \theta_{2r} = a_{2r} \cos(p_r t - \varphi_r) \end{cases} \qquad (2.5.12)$$

Coeficienții de distribuție se determină din (2.5.7):

$$\mu_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{k_0 - p_1^2 J_0}{ka^2} = 1$$

$$\mu_{22} = \frac{a_{22}}{a_{12}} = \frac{k_0 - p_2^2 J_0}{ka^2} = -1 \qquad (2.5.13)$$

Soluția generală se obține prin însumarea celor două mişcări corespunzătoare celor două moduri proprii de vibrație:

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_{11} + \theta_{12} = a_{11} \cos(p_1 t - \varphi_1) + a_{12} \cos(p_2 t - \varphi_2) \\ \theta_2 = \theta_{21} + \theta_{22} = \mu_{21} a_{11} \cos(p_1 t - \varphi_1) + \mu_{22} a_{12} \cos(p_2 t - \varphi_2) \end{cases} \qquad (2.5.14)$$

sau:

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_{11} + \theta_{12} = C_1 \cos(p_1 t - \varphi_1) + C_2 \cos(p_2 t - \varphi_2) \\ \theta_2 = \theta_{21} + \theta_{22} = C_1 \cos(p_1 t - \varphi_1) - C_2 \cos(p_2 t - \varphi_2) \end{cases} \qquad (2.5.14')$$

unde s-a notat: $C_1 = a_{11}$; $C_2 = a_{12}$;

Pentru anumite condiții inițiale se obțin mişcări ale sistemului corespunzătoare celor două moduri proprii de vibrație:

- modul 1 se obține pentru:

$$t=0 \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 = \alpha; \qquad \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0 \qquad (2.5.15)$$

înlocuind în soluția generală (2.5.14) rezultă: $C_2 = \alpha$; $C_2 = 0$; $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ deci se obține:

$$\begin{cases} \theta_1 = \alpha \cos p_1 t \\ \theta_2 = \alpha \cos p_1 t \end{cases} \qquad (2.5.16)$$

- modul 2 se obține pentru:

$$t=0 \Rightarrow \theta_1 = -\theta_2 = \alpha; \qquad \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0 \tag{2.5.17}$$

înlocuind în soluția generală (2.5.14) rezultă: $C_2 = 0$; $C_2 = \alpha$; $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ deci se obține:

$$\begin{cases} \theta_1 = -\alpha \; cos\, p_2 t \\ \theta_2 = \alpha \; cos\, p_2 t \end{cases} \tag{2.5.18}$$

Reprezentarea modurilor proprii de vibrație este dată în figura 2.5.2

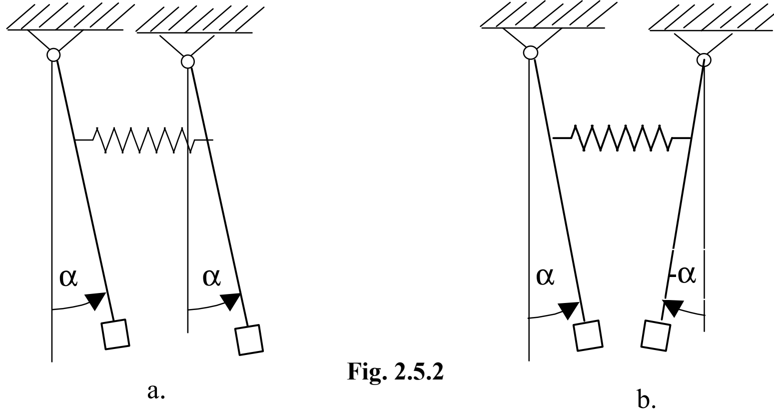


Fig. 2.5.2

Pentru următoarele condiții inițiale:

$$\theta_1 = \alpha; \;\; \theta_2 = 0 \quad \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0 \tag{2.5.19}$$

înlocuind în soluția generală (2.5.14) rezultă: $C_1 = C_2 = \alpha / 2$; $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ și se obține:

$$\begin{cases} \theta_1 = \dfrac{\alpha}{2} cos\, p_1 t + \dfrac{\alpha}{2} cos\, p_2 t = \alpha \cdot cos\left(\dfrac{p_2 - p_1}{2} t\right) \cdot cos\left(\dfrac{p_2 + p_1}{2} t\right) \\ \theta_2 = \dfrac{\alpha}{2} cos\, p_1 t - \dfrac{\alpha}{2} cos\, p_2 t = \alpha \cdot sin\left(\dfrac{p_2 - p_1}{2} t\right) \cdot sin\left(\dfrac{p_2 + p_1}{2} t\right) \end{cases} \tag{2.5.20}$$

Aceasta este o mişcare de frecvență $f_1 = (p_2 + p_1) / 4\pi$ modulată în amplitudine de o funcție armonică având frecvența $f_2 = (p_2 - p_1) / 4\pi$. Această mişcare se numeşte fenomenul bătăilor întâlnită la capitolul 1 in zona de rezonanță a oscilațiilor sistemelor cu un grad de libertate.

2.5.2. Sistem format din mase şi discuri omogene

Se consideră sistemul cu două grade de libertate format din două roți omogene de mase m_2 şi m_3 legate între ele prin intermediul unui fir flexibil şi inextensibil la capătul căruia este legat un corp de masă m_1 prin intermediul unui arc de rigiditate k_1. Celălalt capăt al firului este legat de mediul fix. Roata omogenă de masă m_2 este legată de mediul fix printr-o articulație iar roata omogenă de masă m_3 este legată prin intermediul unui arc de rigiditate k_2 (fig. 2.5.3). Să se determine pulsațiile proprii ale vibrațiilor libere şi modurile proprii de vibrație.

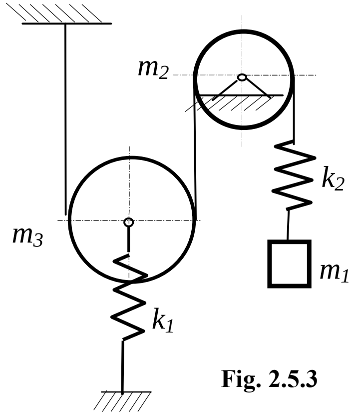


Fig. 2.5.3

Date numerice: m_1=4 kg; m_2=1 kg; m_1=2 kg k_1 = 50 kN/m k_2 = 80 kN/m

Pentru scrierea ecuațiilor de mişcare se folosesc ecuațiile lui Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0 \qquad 2.5.21)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right)+\frac{\partial V}{\partial q_k}=0\,; \qquad (2.5.22)$$

$k=1,2$

unde

q_1, q_2 sunt coordonatele generalizate ale sistemului

Pentru analiza cinematică a mişcării din figura 2.5.4 s-a notat:

$q_1, \dot{q}_1$ deplasarea respectiv viteza generalizată a corpului de masă m_1;

$q_2/R_2, \dot{q}_2/R_2$ rotirea, respectiv viteza unghiulară a corpului de masă m_2

$q_2/2, \dot{q}_2/2R_3$ deplasarea centrului de masă respectiv viteza unghiulară a roții de masă m_3.

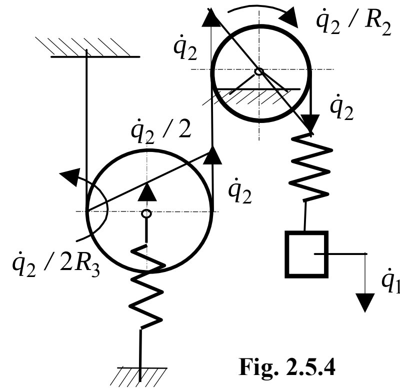


Fig. 2.5.4

Energia cinetică totală a sistemului se scrie:

$$E_c=\frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}\frac{m_2R_2^2}{2}\frac{\dot{q}_2^2}{R_2^2}+\frac{1}{2}m_3\left(\frac{\dot{q}_2}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{m_3R_3^2}{2}\left(\frac{\dot{q}_2}{2R_3}\right)^2$$

$$E_c=\frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}\left(\frac{m_2}{2}+\frac{3m_3}{8}\right)\dot{q}_2^2=\frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}m_0\dot{q}_2^2 \qquad (2.5.23)$$

unde s-a notat: $m_0=\left(\frac{m_2}{2}+\frac{3m_3}{8}\right)$ (2.5.24)

V este energia potențială a sistemului :

$$V=\frac{1}{2}k_2(q_1-q_2)^2+\frac{1}{2}k_1\left(\frac{q_2}{2}\right)^2 \qquad (2.5.25)$$

Derivatele parțiale se calculează imediat:

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_1}=m_1\dot{q}_1; \qquad \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_2}=\left(\frac{m_2}{2}+\frac{3m_3}{8}\right)\dot{q}_2=m_0\dot{q}_2$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_1}=k_2(q_1-q_2); \qquad \frac{\partial V}{\partial q_2}=-k_2(q_1-q_2)+\frac{1}{4}k_1q_2 \qquad (2.5.26)$$

Ecuațiile (2.5.22) se scriu:

$$\begin{cases} m_1\ddot{q}_1 + k_2(q_1 - q_2) = 0 \\ m_0\ddot{q}_2 - k_2(q_1 - q_2) + \frac{1}{4}k_1 q_2 = 0 \end{cases} \tag{2.5.27}$$

Soluțiile ecuațiilor diferențiale (2.5.27) sunt de forma:

$$\begin{cases} q_1 = a_1 \cos(pt - \varphi) \\ q_2 = a_2 \cos(pt - \varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{q}_1 = -p^2 a_1 \cos(pt - \varphi) \\ \ddot{q}_2 = -p^2 a_2 \cos(pt - \varphi) \end{cases} \tag{2.5.28}$$

Înlocuind în sistemul (2.5.27) se obține:

$$\begin{cases} (-p^2 m_1 + k_2)a_1 \qquad - k_2 a_2 = 0 \\ -k_2 a_1 + (-p^2 m_0 + k_2 + k_1/4)a_2 = 0 \end{cases} \tag{2.5.29}$$

Ecuația caracteristică a pulsațiilor proprii este:

$$\begin{vmatrix} -p^2 m_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -p^2 m_0 + k_2 + k_1/4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$(-p^2 m_1 + k_2)(-p^2 m_0 + k_2 + k_1/4) - k_2^2 = 0$$

$$m_1 m_0 p^4 - (m_1 k_2 + m_1 k_1/4 + m_0 k_2)p^2 + k_1 k_2/4 = 0$$

$$sau: \ p^4 - 2\left(\frac{k_2}{2m_0} + \frac{k_1}{8m_0} + \frac{k_2}{2m_1}\right)p^2 + \frac{k_1 k_2}{4m_1 m_0} = 0 \tag{2.5.30}$$

având rădăcinile:

$$p_{1,2}^2 = \frac{k_2}{2m_0} + \frac{k_1}{8m_0} + \frac{k_2}{2m_1} \mp \sqrt{\left(\frac{k_2}{2m_0} + \frac{k_1}{8m_0} + \frac{k_2}{2m_1}\right)^2 - \frac{k_1 k_2}{4m_1 m_0}} \tag{2.5.31}$$

Înlocuind valorile : $m_1 = m_2 = m;$ $m_3 = 4m;$ $m_0 = 2m;$ $k_1 = k;$ $k_2 = 2k$ în relațiile (2.5.31) se obține:

$$p_{1,2}^2 = \frac{25k}{16m} \mp \sqrt{\left(\frac{25k}{16m}\right)^2 - \frac{k^2}{4m^2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1^2 = 0{,}082\frac{k}{m} \\ p_2^2 = 3{,}043\frac{k}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = 0{,}2866\sqrt{\frac{k}{m}} \\ p_2 = 1{,}744\sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases} \tag{2.5.32}$$

Modurile proprii rezultă din prima ecuație (2.5.29) exprimând amplitudinea a_2 funcție de a_1 :

$$a_2 = \left(\frac{-p^2 m_1 + k_2}{k_2}\right)a_1 \tag{2.5.33}$$

- coeficienții de distribuție pentru primul mod de vibrație sunt:

$$\begin{cases} \mu_{11} = \dfrac{a_{11}}{a_{11}} = 1 \\ \mu_{21} = \dfrac{a_{21}}{a_{11}} = \dfrac{-p_1^2 m_1 + k_2}{k_2} = 0{,}959 \end{cases} \tag{2.5.34}$$

➢ coeficienții de distribuție pentru al doilea mod de vibrație sunt:

$$\begin{cases} \mu_{12} = \dfrac{a_{12}}{a_{12}} = 1 \\ \mu_{22} = \dfrac{a_{22}}{a_{12}} = \dfrac{-p_2^2 m_1 + k_2}{k_2} = 2{,}522 \end{cases} \tag{2.5.35}$$

2.5.3. Vibrații transversale ale barelor

Se consideră sistemul format dintr-o bară dreaptă încastrată la un capăt şi rezemată la distanța *2L* având rigiditatea la încovoiere constantă (*EI*) şi lungimea *3L* pe care se află montate două roți de mase $m_1=2m$ şi $m_2=m$ ca în figura 2.5.5. Să se determine pulsațiile şi modurile proprii de vibrație.

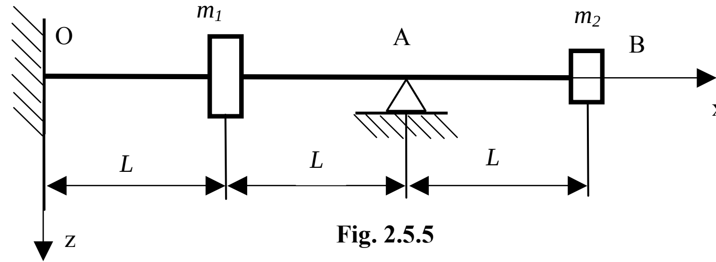


Fig. 2.5.5

Se consideră parametrii mişcării sistemului deplasările x_1 şi x_2 ale roților de mase m_1 şi m_2 pe direcția Oz. Pentru scrierea ecuațiilor de mişcare se foloseşte metoda coeficienților de influență. Se exprimă deplasările maselor în funcție de forțele de inerție Φ_j şi coeficienții de influență δ_{ij} :

$$\begin{cases} x_1 = \delta_{11}\Phi_1 + \delta_{12}\Phi_2 \\ x_2 = \delta_{21}\Phi_1 + \delta_{22}\Phi_2 \end{cases} \tag{2.5.36}$$

unde:

➢ $\Phi_1 = -m_1\ddot{x}_1$; $\Phi_2 = -m_2\ddot{x}_2$ sunt forțele de inerție corespunzătoare celor două mase.

➢ δ_{11}, δ_{21} sunt coeficienții de influență sau deplasările corespunzătoare unei forțe unitare ce acționează asupra barei în locul corpului 1 (fig.2.5.6):

➢ δ_{12}, δ_{22} sunt coeficienții de influență sau deplasările corespunzătoare unei forțe unitare ce acționează asupra corpului 2 (fig.2.5.7):

Înlocuind în relațiile (2.5.36) se obține:

$$\begin{cases} m_1\delta_{11}\ddot{x}_1 + m_2\delta_{12}\ddot{x}_2 + x_1 = 0 \\ m_1\delta_{21}\ddot{x}_1 + m_2\delta_{22}\ddot{x}_2 + x_2 = 0 \end{cases} \tag{2.5.37}$$

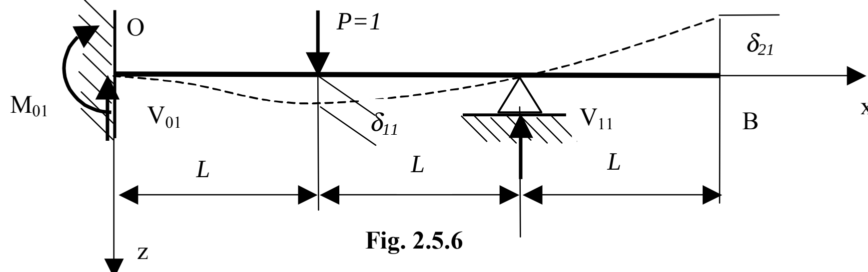


Fig. 2.5.6

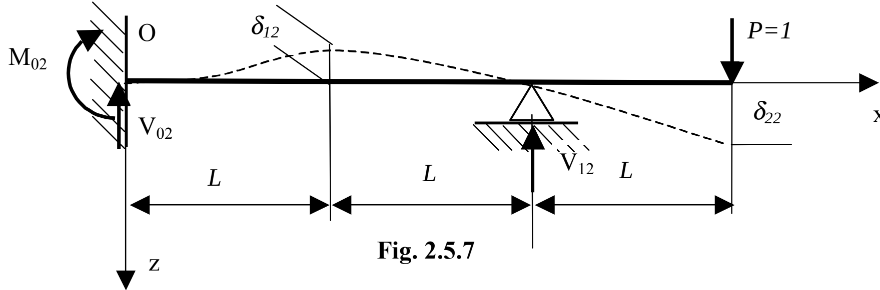


Fig. 2.5.7

Pentru a calcula deplasările δ_{11}, $\delta_{21} = \delta_{12}$, δ_{22} se determină reacțiunile pentru fiecare din cele două cazuri de încărcare. Rezultă următoarele valori:

➢ $V_{01} = \frac{11}{16}P;\ \ M_{01} = -\frac{3}{8}PL;\ \ V_{11} = \frac{5}{16}P$ (2.5.38)

➢ $V_{02} = -\frac{3}{4}P;\ \ M_{02} = \frac{1}{2}PL;\ \ V_{12} = \frac{7}{4}P$ (2.5.39)

Cu ajutorul lor se trasează diagramele de momente pentru fiecare din cele două cazuri (fig.2.5.8).

Deplasările δ_{11}, $\delta_{21} = \delta_{12}$, δ_{22} se determină cu ajutorul metodei Mohr-Maxwell

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1 m_1}{EI}dx;\quad \delta_{21} = \delta_{12} = \int \frac{m_1 m_2}{EI}dx;\quad \delta_{22} = \int \frac{m_2 m_2}{EI}dx$$

unde: m_1 este momentul din bară produs de o forță $P=1$ ce acționează în 1
m_2 este momentul din bară produs de o forță $P=1$ ce acționează în 2.

$$EI\delta_{11} = \int m_1 m_1 dx = \sum \frac{L}{6}\left(k_1h_1 + 4kh + k_2h_2\right)$$

$$EI\delta_{11} = \frac{L}{6}\left[0\cdot 0 + 4\left(\frac{5L}{32}\right)\left(\frac{5L}{32}\right) + \left(\frac{5L}{16}\right)\cdot\left(\frac{5L}{16}\right)\right] + \tag{2.5.40}$$

$$+\frac{L}{6}\left[\left(\frac{5L}{16}\right)\cdot\left(\frac{5L}{16}\right) + 4\left(-\frac{L}{32}\right)\left(-\frac{L}{32}\right) + \left(-\frac{3L}{8}\right)\left(-\frac{3L}{8}\right)\right] \Rightarrow \delta_{11} = \frac{7}{96}\frac{L^3}{EI}$$

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = \int m_1 m_2 dx = \sum \frac{L}{6}\left(k_1 h_1 + 4kh + k_2 h_2\right)$$

$$EI\delta_{12} = \frac{L}{6}\left[0\cdot(-L) + 4\left(\frac{5L}{32}\right)\left(-\frac{5L}{8}\right) + \left(\frac{5L}{16}\right)\cdot\left(-\frac{L}{4}\right)\right] + \tag{2.5.41}$$

$$+\frac{L}{6}\left[\left(\frac{5L}{16}\right)\cdot\left(-\frac{L}{4}\right) + 4\left(-\frac{L}{32}\right)\left(\frac{L}{8}\right) + \left(-\frac{3L}{8}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\right] \Rightarrow \ \delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{8}\frac{L^3}{EI}$$

$$EI\delta_{22} = \int m_2 m_2 dx = \sum \frac{L}{6}\left(k_1 h_1 + 4kh + k_2 h_2\right)$$

$$EI\delta_{22} = \frac{L}{6}\left[0\cdot 0 + 4\left(-\frac{L}{2}\right)\left(-\frac{L}{2}\right) + (-L)\cdot(-L)\right] + \tag{2.5.42}$$

$$+\frac{2L}{6}\left[(-L)\cdot(-L) + 4\left(-\frac{L}{4}\right)\left(-\frac{L}{4}\right) + \left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\right] \Rightarrow \ \delta_{22} = \frac{5}{6}\frac{L^3}{EI}$$

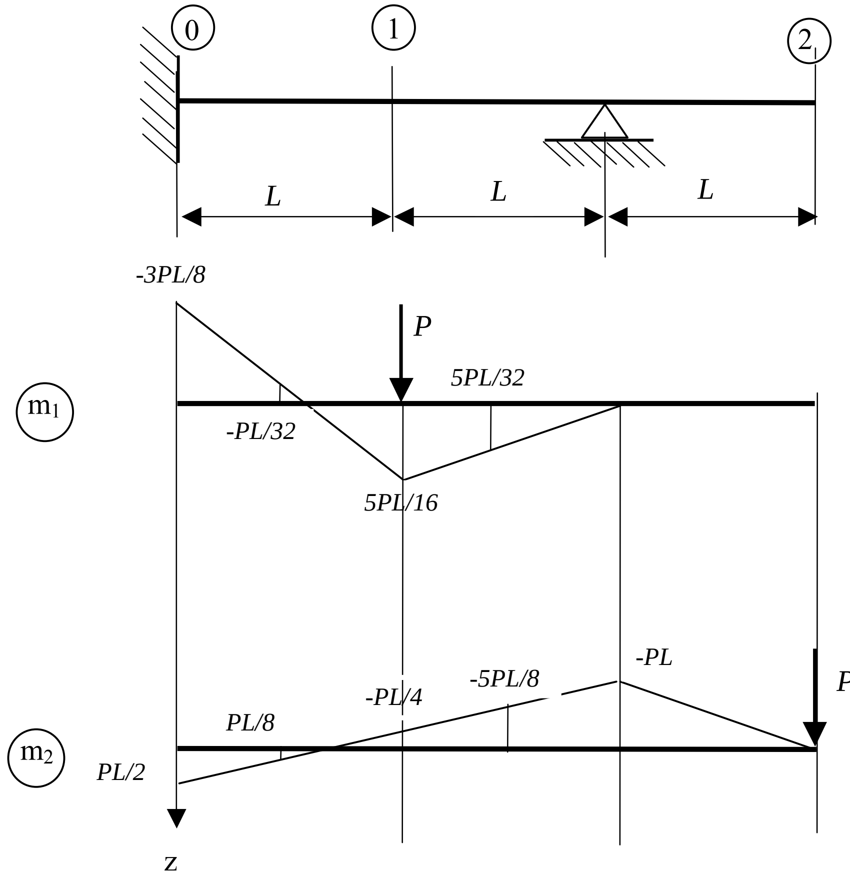


Fig. 2.5.8

Înlocuind în ecuațiile (2.5.37) valorile obținute se obține:

$$\begin{cases} \frac{7}{96}\frac{2mL^3}{EI}\ddot{x}_1 - \frac{1}{8}\frac{mL^3}{EI}\ddot{x}_2 + x_1 = 0 \\ -\frac{1}{8}\frac{2mL^3}{EI}\ddot{x}_1 + \frac{5}{6}\frac{mL^3}{EI}\ddot{x}_2 + x_2 = 0 \end{cases} \quad (2.5.43)$$

Notând $\alpha = \frac{PL^3}{EI}$ ecuațiile (2.5.43) se mai scriu:

$$\begin{cases} 7\alpha\ddot{x}_1 - 6\alpha\ddot{x}_2 + 48x_1 = 0 \\ -3\alpha\ddot{x}_1 + 10\alpha\ddot{x}_2 + 12x_2 = 0 \end{cases} \quad (2.5.43')$$

Soluțiile ecuațiilor diferențiale (2.5.43) sunt de forma:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 \cos(pt - \varphi) \\ x_2 = a_2 \cos(pt - \varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 = -p^2 a_1 \cos(pt - \varphi) \\ \ddot{x}_2 = -p^2 a_2 \cos(pt - \varphi) \end{cases} \quad (2.5.44)$$

Înlocuind în sistemul (2.5.27) se obține:

$$\begin{cases} \left(-7\alpha p^2 + 48\right)a_1 \quad + 6\alpha p^2 a_2 = 0 \\ 3\alpha p^2 a_1 + \left(-10\alpha p^2 + 12\right)a_2 = 0 \end{cases} \quad (2.5.45)$$

Ecuația caracteristică a pulsațiilor proprii este:

$$\begin{vmatrix} -7\alpha p^2 + 48 & 6\alpha p^2 \\ 3\alpha p^2 & -10\alpha p^2 + 12 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 13\alpha^2 p^4 - 141\alpha p^2 + 144 = 0 \quad (2.5.46)$$

Rădăcinile pozitive ale acestei ecuații sunt pulsațiile proprii:

$$p_1 = \frac{1{,}068}{\sqrt{\alpha}} = 1{,}068\sqrt{\frac{EI}{mL^3}}$$

$$p_2 = \frac{3{,}115}{\sqrt{\alpha}} = 3{,}115\sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \quad (2.5.47)$$

Modurile proprii se determină cu ajutorul primei (sau a doua) din ecuațiile sistemului omogen (2.5.45):

$$a_2 = \frac{7\alpha p^2 - 48}{6\alpha p^2} a_1 \quad (2.5.48)$$

- Modul 1 de vibrație (fig. 2.5.9.a):

$$\mu_{11} = 1; \qquad \mu_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{7\alpha p_1^2 - 48}{6\alpha p_1^2} = -5{,}845 \quad (2.5.49)$$

- Modul 2 de vibrație (fig. 2.5.9.b):

$$\mu_{12} = 1; \quad \mu_{22} = \frac{a_{22}}{a_{12}} = \frac{7\alpha p_2^2 - 48}{6\alpha p_2^2} = 0{,}342 \quad (2.5.50)$$

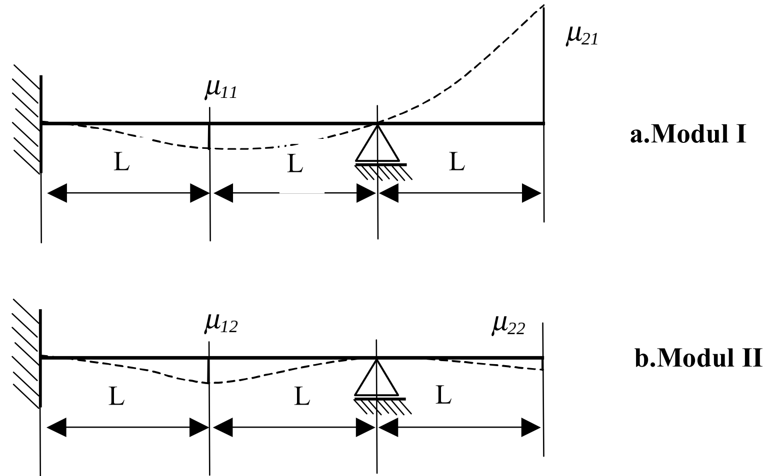


Fig. 2.5.9

2.5.4. Vibrații torsionale ale arborilor

Se consideră cazul geneal al unui arbore format din trei tronsoane de lungime L_i şi diametre d_i şi rigidități la răsucire constante pe care se află doi volanți (roți dințate sau discuri) având momentele de inerție J_i fixat la ambele capete ca în figura 2.5.10. Se neglijează masa arborelui. Să se determine pulsațiile proprii şi modurile proprii de vibrație pentru cazul general.

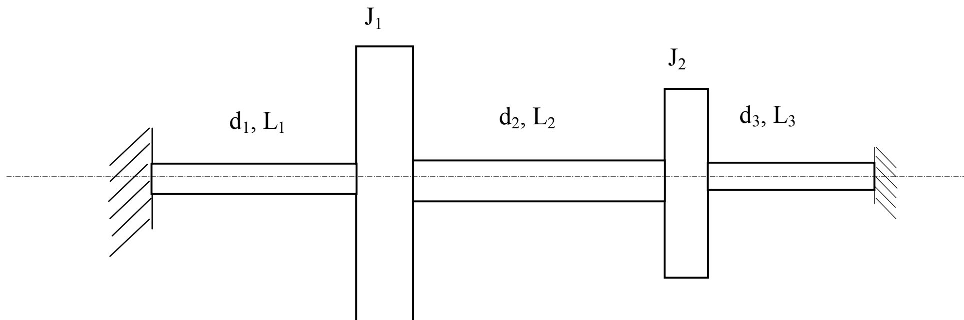


Fig. 2.5.10

Ecuațiile diferențiale ale vibrațiile de răsucire ale arborilor se vor scrie folosind ecuațiile lui Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_i}\right)+\frac{\partial V}{\partial \varphi_i}=0; \qquad i=1,2,3. \qquad (2.5.51)$$

unde, aşa cum rezultă din figura 2.5.11, energia cinetică E şi energia potențială V au expresiile:

$$\begin{cases} E = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_2^2 \\ V = \frac{1}{2} k_1 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 \varphi_2^2 \end{cases} \tag{2.5.52}$$

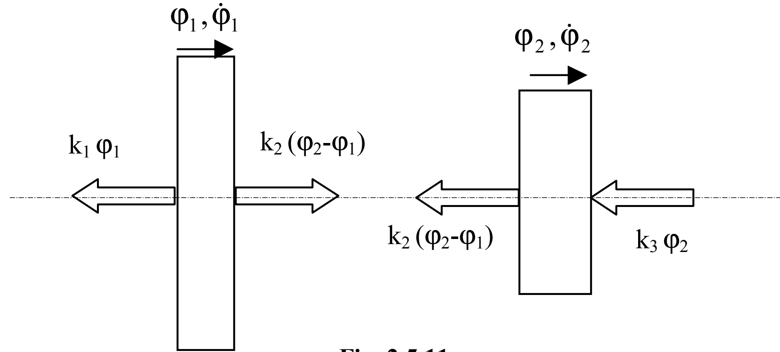


Fig. 2.5.11

iar constantele elastice la răsucire au expresiile:

$$k_1 = \frac{\pi d_1^4 G}{32 L_1};\ k_2 = \frac{\pi d_2^4 G}{32 L_2};\ k_3 = \frac{\pi d_3^4 G}{32 L_3}. \tag{2.5.53}$$

Derivatele parțiale sunt:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_1} = J_1 \dot{\varphi}_1; \quad \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_2} = J_2 \dot{\varphi}_2 \\ &\frac{\partial V}{\partial \varphi_1} = k_1 \varphi_1 - k_2 (\varphi_2 - \varphi_1); \ \frac{\partial V}{\partial \varphi_2} = k_2 (\varphi_2 - \varphi_1) + k_3 \varphi_2; \end{aligned} \tag{2.5.54}$$

Înlocuind în ecuațiile (2.5.51) se obține sistemul de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\varphi}_1^2 + k_1 \varphi_1 - k_2 (\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \\ J_2 \ddot{\varphi}_2^2 + k_2 (\varphi_2 - \varphi_1) + k_3 \varphi_2 = 0 \end{cases} \tag{2.5.55}$$

Soluțiile vibrațiilor libere sunt de forma:

$$\varphi_i = a_i \cos(pt - \theta_i), \quad i = 1, 2. \tag{2.5.56}$$

Introducând soluțiile (2.5.56) în (2.5.55) se obține sistemul omogen:

$$\begin{cases} (-J_1 p^2 + k_1 + k_2) a_1 - k_2 a_2 = 0 \\ -k_2 a_1 + (-J_2 p^2 + k_2 + k_3) a_2 = 0 \end{cases} \tag{2.5.57}$$

Condiția ca sistemul (2.5.57) să admită soluții nebanale se scrie:

$$\begin{vmatrix} -J_1 p^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -J_2 p^2 + k_2 + k_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.5.58}$$

Se obține ecuația caracteristică:

$$\left(k_1 + k_2 - J_1 p^2\right)\left(k_2 + k_3 - J_2 p^2\right) - k_2^2 = 0 \tag{2.5.59}$$

care se mai scrie:

$$J_1 J_2 p^4 - p^2\left(J_1(k_2+k_3)+J_2(k_1+k_2)\right)+k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3=0$$

$$sau\quad p^4 - p^2\left(\frac{k_2+k_3}{J_2}+\frac{k_1+k_2}{J_1}\right)+\frac{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3}{J_1J_2}=0 \qquad (2.5.60)$$

Dacă se notează:

$$2\alpha=\left(\frac{k_1+k_2}{J_1}+\frac{k_2+k_3}{J_2}\right);\qquad \beta=\left(\frac{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3}{J_1J_2}\right) \qquad (2.5.61)$$

se obțin pulsațiile proprii sub forma:

$$p_{1,2}=\sqrt{\alpha\mp\sqrt{\alpha^2-\beta}} \qquad (2.5.62)$$

Aplicație

Pentru cazul particular din figura 2.5.12 se cere să se determine pulsațiile şi modurile proprii de vibrație. Se cunosc valorile constantei elastice *k* şi ale momentului de inerție *J*.

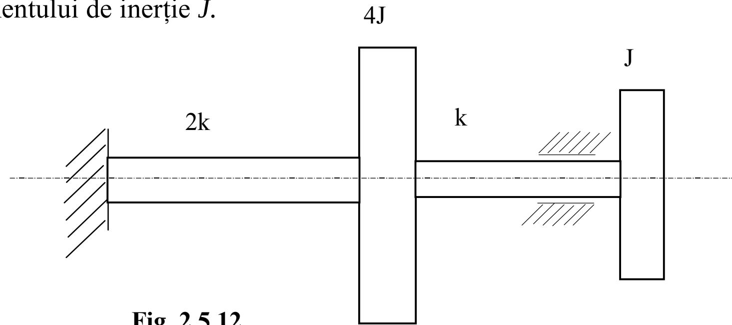


Fig. 2.5.12

Prin identificarea termenilor sistemului din figura 2.5.10 cu cei ai sistemului din figura 2.5.12 rezultă:

$$k_1=2k;\quad k_2=k;\quad k_3=0;\quad J_1=4J;\quad J_2=J; \qquad (2.5.63)$$

Ecuația pulsațiilor proprii (2.5.60) se scrie:

$$p^4-\frac{3k}{2J}p^2+\frac{k^2}{2J^2}=0 \qquad (2.5.64)$$

Se obțin pulsațiile proprii:

$$\begin{cases} p_1=0{,}707\sqrt{\dfrac{k}{J}};\qquad p_2=\sqrt{\dfrac{k}{J}} \end{cases} \qquad (2.5.65)$$

Modurile proprii se obțin din prima ecuație (2.5.57)

$$a_2=\frac{-J_1p^2+k_1+k_2}{k_2}a_1$$

$$\Rightarrow \mu_2=\frac{a_2}{a_1}=\frac{-4Jp^2+3k}{k} \qquad (2.5.66)$$

- Modul 1 de vibrație:

$$\mu_{11}=1$$

$$\mu_{21}=\frac{a_{21}}{a_{11}}=\frac{-4Jp_1^2+3k}{k}=1 \tag{2.5.67}$$

- Modul 2 de vibrație:

$$\mu_{12}=1$$

$$\mu_{22}=\frac{a_{21}}{a_{11}}=\frac{-4Jp_2^2+3k}{k}=-1 \tag{2.5.68}$$

Din forma modurilor proprii aşa cum rezultă din figura 2.5.13 primul mod de vibrație (2.5.67) corespunde vibrațiilor în fază iar al doilea mod (2.5.68) vibrațiilor în opoziție de fază ale celor două roți.

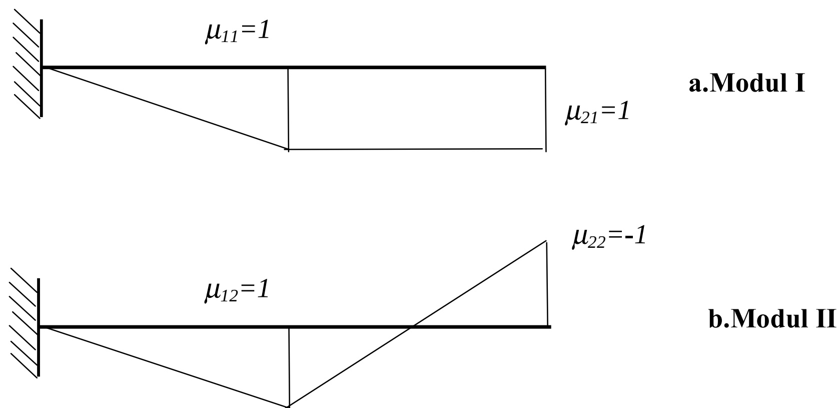


Fig. 2.5.13

2.6. Vibrații libere amortizate

Modelul matematic general al vibrațiilor amortizate este format din două corpuri mase m_1 şi m_2 legate între ele şi de mediul fix cu arcurile de constantă elastică k_2 k_2 şi k_3 şi cu elementele de amortizare vâscoasă c_1 c_2 şi c_3 ca în figura 2.6.1.

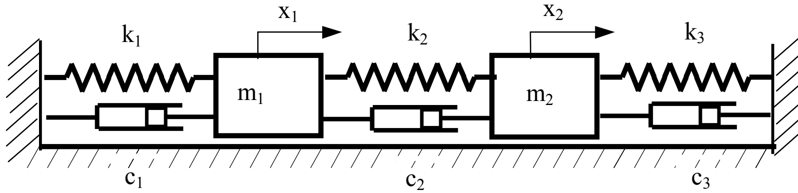


Fig. 2.6.1

Ecuațiile diferențiale se pot scrie folosind teorema impulsului după ce se izolează fiecare corp şi se introduc forțele de legătură din cele două arcuri (fig. 2.6.2):

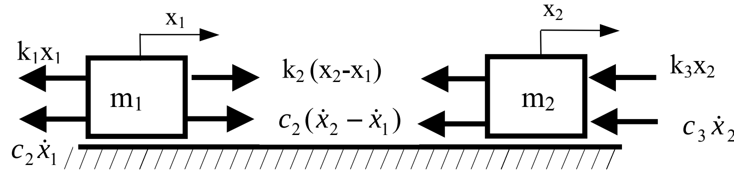


Fig. 2.6.2

Se obține:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - c_1\dot{x}_1 + k_2(x_2 - x_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_3x_2 - c_3\dot{x}_2 \end{cases} \quad (2.6.1)$$

sau:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_1x_1 - k_2(x_2 - x_1) = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) + k_3x_2 + c_3\dot{x}_2 = 0 \end{cases} \quad (2.6.2)$$

Pentru cazul general al unui sistem cu două grade de liberate şi folosirii coordonatelor generalizate ecuațiile diferențiale (2.6.2) se scriu:

$$\begin{cases} m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}\dot{q}_1 + c_{12}\dot{q}_2 + k_{11}q_1 + k_{12}q_2 = 0 \\ m_{21}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}\dot{q}_1 + c_{22}\dot{q}_2 + k_{21}q_1 + k_{22}q_2 = 0 \end{cases} \quad (2.6.3)$$

sau matriceal:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.6.4)$$

Acesta este un sistem liniar de ecuații diferențiale având soluții de forma:

$$\begin{cases} q_1 = a_1e^{rt} \\ q_2 = a_2e^{rt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_1 = a_1re^{rt} \\ \dot{q}_2 = a_2re^{rt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{q}_1 = a_1r^2e^{rt} \\ \ddot{q}_2 = a_1r^2e^{rt} \end{cases} \quad (2.6.5)$$

Înlocuind în sistemul de ecuații (2.6.3) se obține:

$$\begin{cases}\left(m_{11}r^2+c_{11}r+k_{11}\right)a_1+\left(m_{12}r^2+c_{12}r+k_{12}\right)a_2=0\\\left(m_{21}r^2+c_{21}r+k_{21}\right)a_1+\left(m_{22}r^2+c_{22}r+k_{22}\right)a_2=0\end{cases}\qquad(2.6.5)$$

Sistemul omogen (2.6.5) cu necunoscutele a_1 şi a_2 admite soluții diferite de cea banală dacă determinantul său este nul:

$$\Delta=\begin{vmatrix}m_{11}r^2+c_{11}r+k_{11} & m_{12}r^2+c_{12}r+k_{12}\\m_{21}r^2+c_{21}r+k_{21} & m_{22}r^2+c_{22}r+k_{22}\end{vmatrix}=0\qquad(2.6.6)$$

se obține ecuația caracteristică de gradul patru:

$$b_0r^4+b_1r^3+b_2r^2+b_3r+b_4=0\qquad(2.6.7)$$

Condițiile pentru aceste soluții să fie negative sau complexe cu partea reală negativă sunt (criteriul ROUTH-HURWITZ):

$$\begin{cases}b_0,b_1,b_2,b_3,b_4>0\\b_1b_2-b_0b_3>0\\b_1b_2b_3-b_0b_3^2-b_1b_4^2>0\end{cases}\qquad(2.6.8)$$

Pentru cazul particular: $m_1=m_2=m;\quad c_1=c_3=0;\ c_2=c;\ \ k_1=k_2=k_3=k$, se obține sistemul de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases}m\ddot{x}_1+c\dot{x}_1-c\dot{x}_2+2kx_1-kx_2=0\\m\ddot{x}_2-c\dot{x}_1+c\dot{x}_2-kx_1+2kx_2=0\end{cases}\qquad(2.6.9)$$

Acesta este un sistem liniar având soluții de forma:

$$\begin{cases}x_1=a_1e^{rt}\\x_2=a_2e^{rt}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dot{x}_1=a_1re^{rt}\\\dot{x}_2=a_2re^{rt}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ddot{x}_1=a_1r^2e^{rt}\\\ddot{x}_2=a_1r^2e^{rt}\end{cases}\qquad(2.6.10)$$

Înlocuind (2.6.10) în (2.6.9) se obține sistemul omogen:

$$\begin{cases}\left(mr^2+cr+2k\right)a_1-\left(cr+k\right)a_2=0\\-\left(cr+k\right)a_1+\left(mr^2+cr+2k\right)a_2=0\end{cases}\qquad(2.6.11)$$

Ecuația caracteristică este:

$$\Delta=\begin{vmatrix}mr^2+cr+2k & -cr-k\\-cr-k & mr^2+cr+2k\end{vmatrix}=0\qquad(2.6.12)$$

$$\left(mr^2+cr+2k\right)^2-\left(cr+k\right)^2=0\qquad\Leftrightarrow\qquad(2.6.13)$$

$$\begin{cases}mr^2+cr+2k=cr+k\quad\Rightarrow r_{1,2}=\pm i\sqrt{\dfrac{k}{m}};\\mr^2+cr+2k=-\left(cr+k\right)\Rightarrow r_{3,4}=\dfrac{-c\pm\sqrt{c^2-3mk}}{m}\end{cases}\qquad(2.6.14)$$

Pentru rădăcinile $r_{1,2}$ corespunzătoare primului mod de vibrație se notează cu C_1 şi C_2 valorile lui a_1 şi se obține: $a_2=a_1$ sau $\mu_{21}=1$.

Pentru rădăcinile $r_{3,4}$ corespunzătoare celui de al doilea mod de vibrație se notează cu C_3 şi C_4 valorile lui a_1 se obține: $a_2=-a_1$ sau $\mu_{22}=-1$.

Notând: $p^2 = \dfrac{k}{m}$; $\alpha = -\dfrac{c}{m}$; $\beta = \dfrac{\sqrt{c^2 - 3mk}}{m}$ soluția sistemului de ecuații (2.6.9) se scrie:

$$\begin{cases} x_1 = C_1 e^{ipt} + C_2 e^{-ipt} + C_3 e^{-\alpha t + \beta t} + C_4 e^{-\alpha t + \beta t} \\ x_1 = C_1 e^{ipt} + C_2 e^{-ipt} - C_3 e^{-\alpha t + \beta t} - C_4 e^{-\alpha t + \beta t} \end{cases} \quad (2.6.15)$$

- Pentru: $c^2 - 3mk > 0$ rădăcinile $r_{3,4}$ sunt reale, negative şi soluțiile se scriu:

$$\begin{cases} x_1 = B_1 \, cos(pt - \varphi_1) + C_3 e^{(-\alpha + \beta)t} + C_4 e^{(-\alpha - \beta)t} \\ x_2 = B_1 \, cos(pt - \varphi_1) - C_3 e^{(-\alpha + \beta)t} - C_4 e^{(-\alpha - \beta)t} \end{cases} \quad (2.6.17)$$

Pentru $t \to \infty$ termenii 2 şi 3 ai soluțiilor (2.6.17) se anulează şi sistemul virează după primul mod de vibrație:

$$\begin{cases} x_1 = B_1 \, cos(pt - \varphi_1) \\ x_2 = B_1 \, cos(pt - \varphi_1) \end{cases} \quad (2.6.18)$$

- Pentru: $c^2 - 3mk < 0$, $r_{3,4}$ sunt rădăcini imaginare cu partea reală negativă şi soluțiile corespunzătoare se scriu:

$$\begin{cases} x_1 = B_1 \, cos(pt - \varphi_1) + e^{-\alpha t}\left(C_3 e^{i\beta t} + C_4 e^{-i\beta t}\right) \\ x_2 = B_1 \, cos(pt - \varphi_1) - + e^{-\alpha t}\left(C_3 e^{i\beta t} + C_4 e^{-i\beta t}\right) \end{cases} \quad (2.6.19)$$

sau:

$$\begin{cases} x_1 = B_1 \, cos(pt - \varphi_1) + B_2 e^{-\alpha t} cos(\beta t - \varphi_2) \\ x_2 = B_1 \, cos(pt - \varphi_1) - B_2 e^{-\alpha t} cos(\beta t - \varphi_2) \end{cases} \quad (2.6.20)$$

Pentru $t \to \infty$ termenii conținând $e^{-\alpha t} \to 0$ şi sistemul devine:

$$\begin{cases} x_1 = B_1 \, cos(pt - \varphi_1) \\ x_2 = B_1 \, cos(pt - \varphi_1) \end{cases} \quad (2.6.21)$$

deci amortizarea are ca efect anularea mişcării de vibrație relativă dintre cele două corpuri, respectiv anularea modului 2 de vibrație.

2.7. Vibrații forțate amortizate

Modelul matematic al vibrațiilor forțate amortizate este format din două corpuri mase m_1 şi m_2 legate între ele şi de mediul fix cu arcurile de constantă elastică k_2 k_2 şi k_3 şi cu elementele de amortizare vâscoasă c_1 c_2 şi c_3 . Asupra corpului de masă m_1 acționează o forță armonică ca în figura 2.7.1.

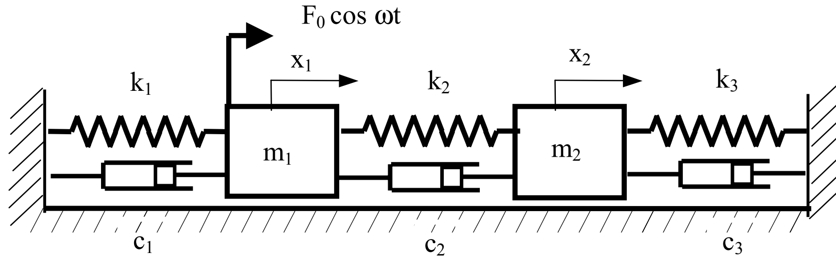


Fig. 2.7.1

Ecuațiile diferențiale se pot scrie folosind teorema impulsului (fig. 2.7.2) după ce se izolează fiecare corp şi se introduc forțele de legătură din cele două arcuri:

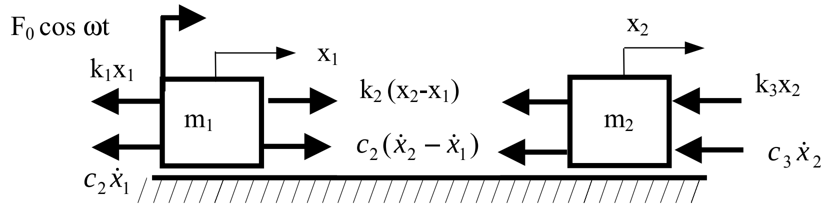


Fig. 2.7.2

Se obține:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - c_1\dot{x}_1 + k_2(x_2 - x_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + F_0 \cos\omega t \\ m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_3x_2 - c_3\dot{x}_2 \end{cases} \quad (2.7.1)$$

sau:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_1x_1 - k_2(x_2 - x_1) = F_0 \cos\omega t \\ m_2\ddot{x}_2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) + k_3x_2 + c_3\dot{x}_2 = 0 \end{cases} \quad (2.7.2)$$

Pentru cazul general al coordonatelor generalizate ecuațiile diferențiale (2.7.2) se scriu:

$$\begin{cases} m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}\dot{q}_1 + c_{12}\dot{q}_2 + k_{11}q_1 + k_{12}q_2 = F_0 \cos\omega \\ m_{21}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}\dot{q}_1 + c_{22}\dot{q}_2 + k_{21}q_1 + k_{22}q_2 = 0 \end{cases} \quad (2.7.3)$$

sau matriceal:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix} cos\,\omega t \qquad (2.7.4)$$

Acesta este un sistem liniar neomogen având ca soluție suma dintre soluția sistemului omogen şi soluția particulară:

$$\{q\} = \{q\}_{om} + \{q\}_p \qquad (2.7.5)$$

Fie rădăcinile complexe ale ecuației caracteristice de forma:

$$\begin{cases} r_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1 \\ r_{3,4} = \alpha_2 \pm i\beta_2 \qquad (\alpha_1, \alpha_2 < 0) \end{cases} \qquad (2.7.6)$$

$$\begin{cases} q_{1om} = e^{\alpha_1 t}\left(C_1\, cos\beta_1 t + C_2\, sin\beta_1 t\right) + e^{\alpha_2 t}\left(C_1\, cos\beta_2 t + C_2\, sin\beta_2 t\right) \\ q_{1om} = e^{\alpha_1 t}\left(\mu_{11} C_1\, cos\beta_1 t + \mu_{21} C_2\, sin\beta_1 t\right) + e^{\alpha_2 t}\left(\mu_{21} C_1\, cos\beta_2 t + \mu_{22} C_2\, sin\beta_2 t\right) \end{cases} \qquad (2.7.7)$$

Soluția particulară a acestui sistem de ecuații se poate determina folosind metoda ecuațiilor complexe, considerând sistemul ca parte reală a următorului sistem de ecuații în complex:

$$\begin{cases} m_{11}\ddot{z}_1 + m_{12}\ddot{z}_2 + c_{11}\dot{z}_1 + c_{12}\dot{z}_2 + k_{11}z_1 + k_{12}z_2 = F_0 e^{i\omega t} \\ m_{21}\ddot{z}_1 + m_{22}\ddot{z}_2 + c_{21}\dot{z}_1 + c_{22}\dot{z}_2 + k_{21}z_1 + k_{22}z_2 = 0 \end{cases}$$

$$unde: \quad \begin{cases} z_1 = q_1 + is_1 \\ z_2 = q_2 + is_2 \end{cases} ; \qquad (2.7.8)$$

$$F_0 e^{i\omega t} = F_0\left(cos\,\omega t + i\, sin\,\omega t\right)$$

Soluția complexă a sistemului (2.7.8) va fi de forma

$$\begin{cases} z_1 = b_1 e^{i(\omega t - \varphi_1)} \\ z_2 = b_2 e^{i(\omega t - \varphi_2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{z}_1 = i\omega b_1 e^{i(\omega t - \varphi_1)} \\ \dot{z}_2 = i\omega b_2 e^{i(\omega t - \varphi_2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{z}_1 = -\omega^2 b_1 e^{i(\omega t - \varphi_1)} \\ \ddot{z}_2 = -\omega^2 b_2 e^{i(\omega t - \varphi_2)} \end{cases} \qquad (2.7.9)$$

Înlocuind în sistemul (2.7.8) se obține:

$$\begin{cases} \left(-\omega^2 m_{11} + c_{11} i\omega + k_{11}\right)z_1 + \left(-\omega^2 m_{12} + c_{12} i\omega + k_{12}\right)z_2 = F_0 e^{i\omega t} \\ \left(-\omega^2 m_{21} + c_{21} i\omega + k_{21}\right)z_1 + \left(-\omega^2 m_{22} + c_{22} i\omega + k_{22}\right)z_2 = 0 \end{cases} \qquad (2.7.10)$$

Dacă se fac notațiile:

$$\begin{cases} Z_{11} = -\omega^2 m_{11} + c_{11} i\omega + k_{11} \\ Z_{12} = -\omega^2 m_{12} + c_{12} i\omega + k_{12} \end{cases} \quad \begin{cases} Z_{21} = -\omega^2 m_{21} + c_{21} i\omega + k_{21} \\ Z_{22} = -\omega^2 m_{22} + c_{22} i\omega + k_{22} \end{cases} \qquad (2.7.11)$$

sistemul (2.7.10) se scrie:

$$\begin{cases} Z_{11}z_1 + Z_{12}z_2 = F_0 e^{i\omega t} \\ Z_{21}z_1 + Z_{22}z_2 = 0 \end{cases} \tag{2.7.12}$$

Rezolvând acest sistem în complex se obține:

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{Z_{22}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{21}Z_{12}} F_0 e^{i\omega t} \\ z_2 = \dfrac{Z_{21}}{Z_{12}Z_{21} - Z_{22}Z_{11}} F_0 e^{i\omega t} \end{cases} \tag{2.7.13}$$

Soluția particulară a sistemului (2.7.3) este:

$$\begin{cases} q_1 = |z_1| cos(\omega t - \varphi_1); \quad \varphi_1 = -arg\left(\dfrac{Z_{22}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{21}Z_{12}} \right) \\ q_2 = |z_2| cos(\omega t - \varphi_2); \quad \varphi_2 = arg\left(\dfrac{-Z_{21}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{21}Z_{12}} \right) \end{cases} \tag{2.7.14}$$

unde s-a noatat:

$$\begin{cases} |z_1| = \dfrac{|Z_{22}|}{|Z_{11}Z_{22} - Z_{21}Z_{12}|} F_0 \\ |z_2| = \dfrac{|Z_{21}|}{|Z_{11}Z_{22} - Z_{21}Z_{12}|} F_0 \end{cases} \tag{2.7.15}$$

2.8. Absorbitorul dinamic simplu

Se consideră un sistem cu un grad de libertate (sistem principal) format dintr-un corp de masă m_1 şi un arc de constantă k_1 legat de mediul fix, asupra căruia acţionează o forţă perturbatoare armonică $F = F_0 \cos \omega t$ (fig. 2.8.1).

Absorbitorul dinamic simplu (fără amortizare) este sistemul secundar care se adaugă celui principal (având pulsaţia proprie egală cu pulsaţia forţei perturbatoare $p_1 = \omega = \sqrt{k_1 / m_1}$ într-un regim de funcţionare normal) în scopul evitării fenomenului de rezonanţă, obţinându-se un sistem cu două grade de libertate.

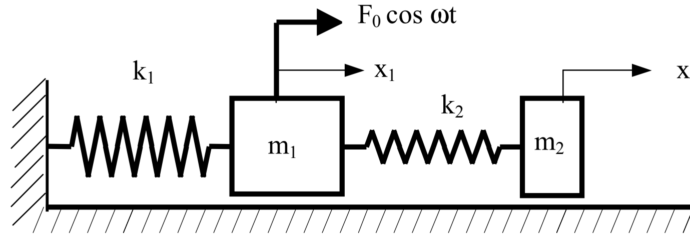


Fig. 2.8.1

Ecuaţiile diferenţiale ale mişcării sunt:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = F_0 \cos \omega t \\ m_2\ddot{x}_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 = 0 \end{cases} \tag{2.8.16}$$

Soluţia particulară (staţionară) a mişcării va fi de forma:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 \cos \omega t \\ x_2 = a_2 \cos \omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 = \omega^2 a_1 \cos \omega t \\ \ddot{x}_2 = -\omega^2 a_2 \cos \omega t \end{cases} \tag{2.8.2}$$

Introducând în ecuaţiile (2.8.16) se obţine:

$$\begin{cases} \left(-\omega^2 m_1 + k_1 + k_2\right)a_1 - k_2 a_2 = F_0 \\ -k_2 a_1 + \left(-\omega^2 m_2 + k_2\right)a_2 = 0 \end{cases} \tag{2.8.3}$$

având soluţiile:

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{F_0\left(-\omega^2 m_2 + k_2\right)}{\left(-\omega^2 m_2 + k_2\right)\left(-\omega^2 m_1 + k_1 + k_2\right) - k_2^2} \\ a_2 = \dfrac{F_0 k_2}{\left(-\omega^2 m_2 + k_2\right)\left(-\omega^2 m_1 + k_1 + k_2\right) - k_2^2} \end{cases} \tag{2.8.4}$$

Soluţia staţionară corespunzătoare sistemului principal va fi:

$$x_1 = \frac{F_0\left(-\omega^2 m_2 + k_2\right)}{\left(-\omega^2 m_2 + k_2\right)\left(-\omega^2 m_1 + k_1 + k_2\right) - k_2^2} \cos \omega t \tag{2.8.5}$$

Se observă că pentru anumite valori ale parametrilor k_2 şi m_2 (corespunzătoare pulsației proprii a sistemului secundar $p_2 = \sqrt{k_2 / m_2}$) se obține pentru x_1 amplitudinea zero:

$$-\omega^2 m_2 + k_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega^2 = \frac{k_2}{m_2} \Rightarrow \omega = p_2 \qquad (2.8.6)$$

Condiția pentru dimensionarea absorbitorului dinamic simplu se scrie:

$$\sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \Rightarrow \frac{k_2}{m_2} = \frac{k_1}{m_2} \qquad (2.8.7)$$

Notând: $p^2 = \frac{k_1}{m_1} = \frac{k_2}{m_2};\ \ \mu = \frac{k_2}{k_1};\ \ a_{10} = \frac{F_0}{k_1}$ împărțind cu $k_1 k_2$ atât numărătorul cât şi numitorul amplitudinii vibrației sistemului principal x_1 dat de relația (2.8.4) se obține:

$$a_1 = \frac{\frac{F_0}{k_1}\left(\frac{k_2}{k_2} - \omega^2 \frac{m_2}{k_2}\right)}{\left(1 - \omega^2 \frac{m_2}{k_2}\right)\left(1 + \frac{k_2}{k_1} - \omega^2 \frac{m_1}{k_1}\right) - \frac{k_2}{k_1}}$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{a_{10}\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)\left(1 + \mu - \frac{\omega^2}{p^2}\right) - \mu} \qquad (2.8.8)$$

Notând: $\eta = \frac{\omega}{p}$ pulsația relativă a forței perturbatoare şi cu $\xi = \left|\frac{a_1}{a_{10}}\right|$ factorul de amplificare relația (2.8.8) se mai scrie:

$$\xi = \left|\frac{a_1}{a_{10}}\right| = \left|\frac{1 - \eta^2}{\left(1 - \eta^2\right)\left(1 + \mu - \eta^2\right) - \mu}\right| \qquad (2.8.9)$$

În figura 2.8.2 sunt reprezentate variațiile factorului de amplificare pentru două valori ale raportului constantelor elastice: $\mu = 0.5$ *si* $\mu = 2.5$.

Absorbitorul dinamic are rolul de *"a deplasa"* frecvența de rezonanță a sistemului din zona $\omega / p = 1$ spre două zone învecinate având pulsațiile relative:

$$\eta_{1,2} = \sqrt{\frac{2 + \mu \pm \sqrt{\mu^2 + 4\mu}}{2}} \qquad (2.8.10)$$

În figura 2.8.3 sunt reprezentate cele două valori ale frecvențelor de rezonanță date de relația (2.8.10) în funcție de valorile raportului μ.

Se constată că absorbitorul dinamic permite ca sistemul să vibreze în condiții corespunzătoare (cu amplitudini mici) atunci când pulsațiile forței perturbatoare au valori apropiate de pulsația proprie p_1.

În jurul valorii de rezonanţă $\omega=p_1$ amplitudinea poate creşte foarte mult pentru valori mici ale factorului μ, deci absorbitorul dinamic simplu este instabil. Acest dezavantaj este eliminat dacă se realizează absorbitorul cu amortizare.

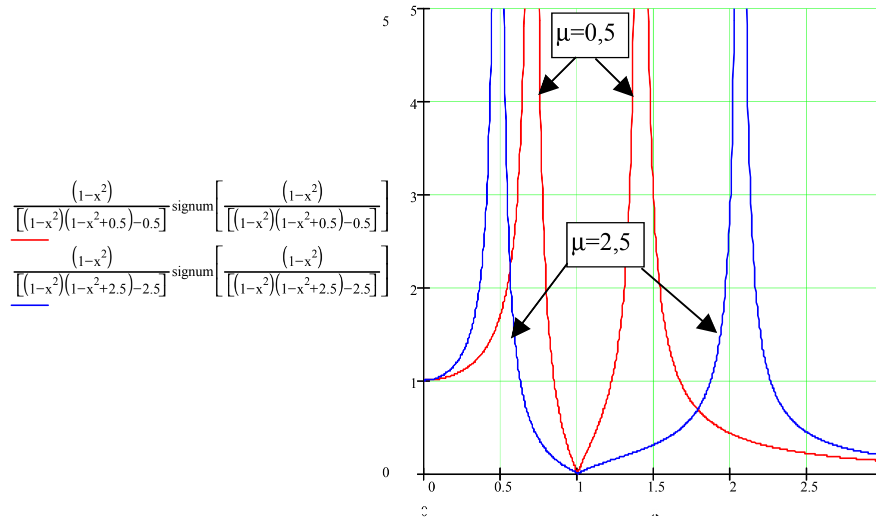


Fig. 2.8.2 Variaţiile factorului de amplificare ξ pentru două valori ale raportului constantelor elastice: $\mu = 0.5$ *si* $\mu = 2.5$.

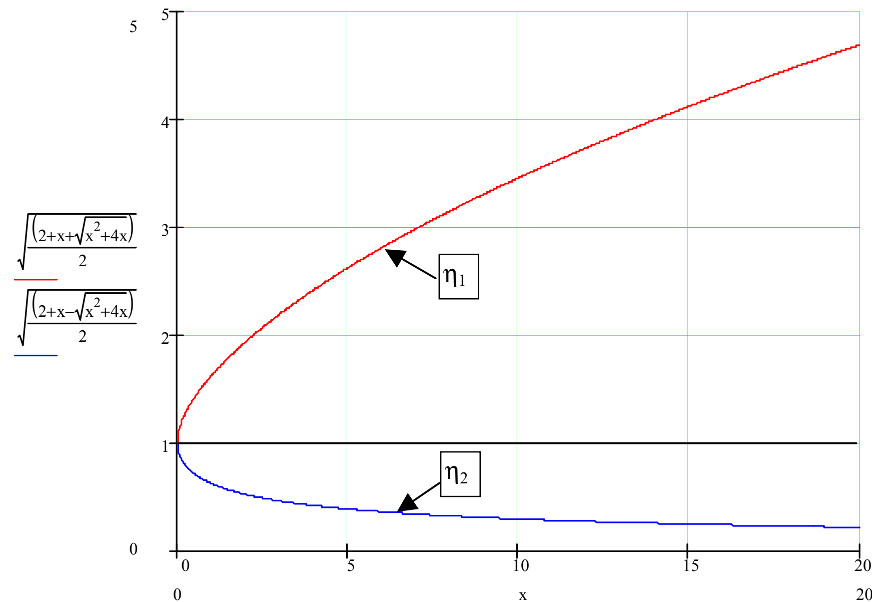


Fig. 2.8.5. Variaţia celor două valori ale frecvenţelor de rezonanţă ale absorbitorului dinamic în funcţie de valorile raportului constantelor elastice μ.

2.9. Absorbitorul dinamic cu amortizare

Sistemului principal este format dintr-un corp de masă m_1 şi un arc de constantă k_1 legat de mediul fix asupra căruia acţionează o forţă perturbatoare armonică $F = F_0 \cos\omega t$ având pulsaţia proprie egală cu pulsaţia forţei perturbatoare $p_1 = \omega = \sqrt{k_1 / m_1}$ în regimul de funcţionare normal. Absorbitorul dinamic cu amortizare este format dintr-un corp de masă m_2, un element elastic de constantă k_2 şi un element de amortizare vâscoasă c_2 şi este ataşat sistemului principal (fig. 2.9.1).

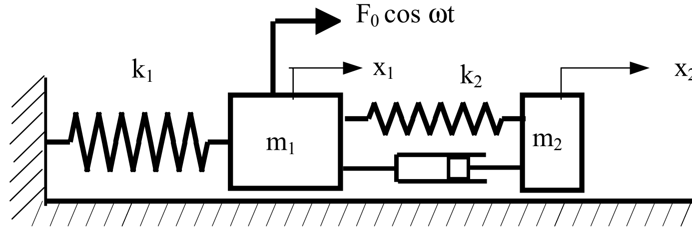


Fig. 2.9.1

Ecuaţiile diferenţiale ale mişcării în acest caz sunt:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + c_2\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = F_0 \cos\omega t \\ m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + c_2\dot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = 0 \end{cases} \tag{2.9.1}$$

Ecuaţiile diferenţiale în complex ataşate ecuaţiilor (2.9.1) sunt:

$$\begin{cases} m_1\ddot{z}_1 + c_2\dot{z}_1 - c_2\dot{z}_2 + (k_1 + k_2)z_1 - k_2z_2 = F_0e^{i\omega t} \\ m_2\ddot{z}_2 - c_2\dot{z}_1 + c_2\dot{z}_2 - k_2z_1 + k_2z_2 = 0 \end{cases} \tag{2.9.2}$$

Soluţia complexă a sistemului (2.9.2) va fi de forma:

$$\begin{cases} z_1 = b_1e^{i(\omega t - \varphi_1)} \\ z_2 = b_2e^{i(\omega t - \varphi_2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{z}_1 = i\omega z_1 \\ \dot{z}_2 = i\omega z_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{z}_1 = -\omega^2 z_1 \\ \ddot{z}_2 = -\omega^2 z_2 \end{cases} \tag{2.9.3}$$

Înlocuind în sistemul (2.9.2) se obţine:

$$\begin{cases} \left(-\omega^2m_1 + c_2i\omega + k_1 + k_2\right)z_1 - (c_2i\omega + k_2)z_2 = F_0e^{i\omega t} \\ -(c_2i\omega + k_2)z_1 + \left(-\omega^2m_2 + c_2i\omega + k_2\right)z_2 = 0 \end{cases} \tag{2.9.4}$$

Rezolvând acest sistem în complex se obţine:

$$z_1 = \frac{\left(-\omega^2m_2 + c_2i\omega + k_2\right)F_0\, e^{i\omega t}}{\left(-\omega^2m_1 + c_2i\omega + k_1 + k_2\right)\left(-\omega^2m_2 + c_2i\omega + k_2\right) - (c_2i\omega + k_2)^2} \tag{2.9.5}$$

sau: $$z_1 = \frac{\left(k_2 - \omega^2 m_2 + ic_2\omega\right)F_0\, e^{i\omega t}}{\left(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1\right)\left(k_2 - \omega^2 m_2\right) - k_2^2 + ic_2\omega\left(k_1 - (m_1 + m_2)\omega^2\right)} \qquad (2.9.6)$$

Amplitudinea vibrațiilor sistemului principal este:

$$a_1 = F_0 \sqrt{\frac{\left(k_2 - \omega^2 m_2\right)^2 + (c_2\omega)^2}{\left[\left(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1\right)\left(k_2 - \omega^2 m_2\right) - k_2^2\right]^2 + \left[c_2\omega\left(k_1 - (m_1 + m_2)\omega^2\right)\right]^2}} \qquad (2.9.7)$$

Împărțind cu $k_1 k_2$ atât numărătorul cât şi numitorul relației (2.9.7) şi notând:

$$p^2 = \frac{k_1}{m_1} = \frac{k_2}{m_2}; \quad \mu = \frac{k_2}{k_1}; \quad a_{10} = \frac{F_0}{k_1}; \; \eta = \frac{\omega}{p} \text{ şi cu } \xi = \frac{a_1}{a_{10}} \qquad (2.9.8)$$

factorul de amplificare se scrie:

$$\xi = \frac{a_1}{a_{10}} = \sqrt{\frac{\left(1 - \eta^2\right)^2 + (2\zeta\eta)^2}{\left[\left(1 - \eta^2\right)^2 - \mu\eta^2\right]^2 + \left[2\zeta\eta\left(1 - \eta^2(1 + \mu)\right)\right]^2}} \qquad (2.9.9)$$

În figura 2.9.2 sunt reprezentate variațiile factorului de amplificare (2.9.8) pentru trei valori ale factorului de amortizare: $\zeta = 0.1, \;\; \zeta = 0.25 \;\; si \;\; \zeta = 0.4$ şi $\mu = \frac{k_2}{k_1} = 0.5$

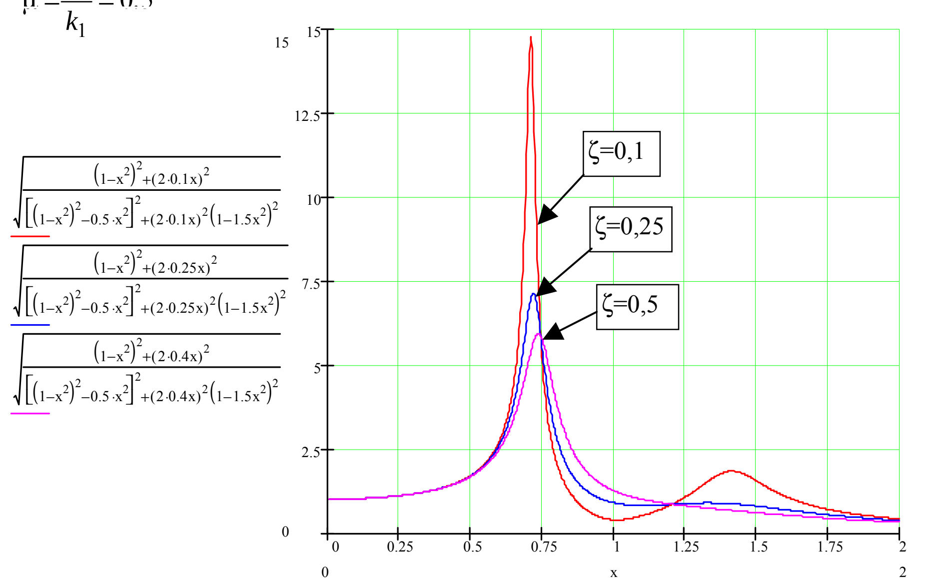


Fig. 2.9.2 variațiile factorului de amplificare (2.9.8) pentru trei valori ale factorului de amortizare: $\zeta = 0.1, \;\; \zeta = 0.25 \;\; si \;\; \zeta = 0.4$ **şi** $\mu = \frac{k_2}{k_1} = 0.5$ **(η≡x)**

Se observă din figura 2.9.2 că amplitudinea a_1 este mai mică în jurul valorii de rezonanță ($\omega = p$) cu cât factorul de amortizare ζ este mai mic, dar valorile amplitudinii maxime pentru prima valoare de rezonanță a absorbitorului sunt foarte mari.

În figura 2.9.3 sunt reprezentate variațiile factorului de amplificare (2.9.8) pentru trei valori ale raportului $\mu = k_2 / k_1$: $\mu = 0.5;$ $\mu = 1$ *si* $\mu = 2.5$ şi un factor de amortizare ζ=0.2

Se observă din figura 2.9.3 că amplitudinea este mai mică şi devine mai stabilă în jurul valorii de rezonanță $\omega = p$ cu cât raportul $\mu = k_2 / k_1$ este mai mare , însă în acest caz masa m_2 este mai mare conform relației $\frac{k_1}{m_1} = \frac{k_2}{m_2}$ şi valorile amplitudinii maxime pentru prima valoare de rezonanță a absorbitorului dinamic sunt mai mari.

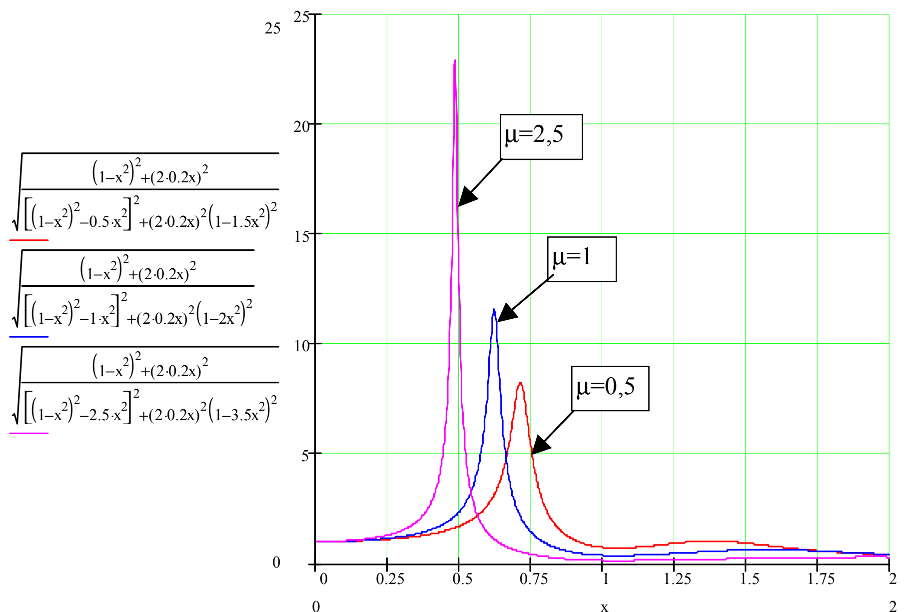


Fig. 2.9.3. Variațiile factorului de amplificare pentru trei valori ale raportului $\mu = k_2 / k_1$: $\mu = 0.5;$ $\mu = 1$ *si* $\mu = 2.5$ şi un factor de amortizare ζ=0.2

2.10. Absorbitorul dinamic la răsucire (HOUDAILLE)

Absorbitorul dinamic de tip Houdaille este folosit pentru amortizarea vibrațiilor la torsiune ale arborilor de maşini pentru un domeniu larg al pulsațiilor forței de excitație. Acesta este format dintr-un volant având momentul de inerție J_2 montat cu joc într-o carcasă plină cu ulei având momentul de inerție J_1, astfel încât acesta se poate roti cu frecare vâscoasă în interiorul carcasei. Excitația exterioară este dată de cuplul armonic $M_0 \cos \omega t$ ce acționează asupra carcasei (fig. 2.10.1).

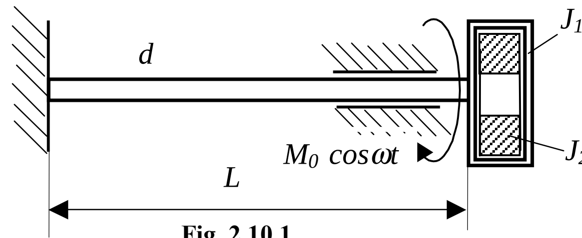


Fig. 2.10.1

Se consideră ca parametri ai mişcării sistemului unghiul de rotire al carcasei φ_1 şi unghiul de rotire al volantului φ_2 ($\varphi_2 < \varphi_1$). În figura 2.10.2 sunt reprezentate cele două corpuri izolate, cu cuplurile ce acționează asupra lor şi accelerațiile unghiulare respective.

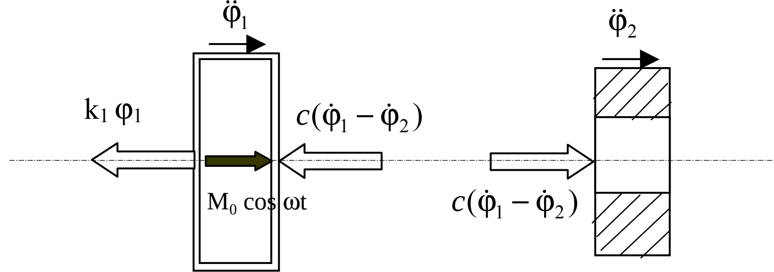


Fig. 2.10.2

Teorema momentului cinetic se scrie pentru fiecare din cele două corpuri astfel:

$$\begin{cases} J_1\ddot{\varphi}_1 = -k\varphi_1 - c(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + M_0 \cos \omega t \\ J_2\ddot{\varphi}_2 = c(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \end{cases} \tag{2.10.1}$$

sau:

$$\begin{cases} J_1\ddot{\varphi}_1 + k\varphi_1 + c(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) = M_0 \cos \omega t \\ J_2\ddot{\varphi}_2 - c(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) = 0 \end{cases} \tag{2.10.2}$$

Soluția staționară a acestui sistem de ecuații diferențiale este de forma:

$$\begin{cases} \varphi_1 = a_1 \cos(\omega t - \theta_1) \\ \varphi_2 = a_2 \cos(\omega t - \theta_2) \end{cases} \tag{2.10.3}$$

Pentru a determina amplitudinea vibrațiilor forțate cu amortizare se consideră sistemul de ecuații în complex ataşat sistemului real (2.10.2):

$$\begin{cases} J_1\ddot{\tilde{\varphi}}_1 + k\tilde{\varphi}_1 + c(\dot{\tilde{\varphi}}_1 - \dot{\tilde{\varphi}}_2) = M_0 e^{i\omega t} \\ J_2\ddot{\tilde{\varphi}}_2 - c(\dot{\tilde{\varphi}}_1 - \dot{\tilde{\varphi}}_2) = 0 \end{cases} \tag{2.10.4}$$

Soluția staționară a acestui sistem este de forma:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_1 = \tilde{a}_1 e^{i\omega t} \\ \tilde{\varphi}_2 = \tilde{a}_2 e^{i\omega t} \end{cases} \tag{2.10.5}$$

Înlocuind în sistemul (2.10.4) se obține:

$$\begin{cases} (-\omega^2 J_1 + k + ic\omega)\tilde{a}_1 - ic\omega\tilde{a}_2 = M_0 \\ -ic\omega\tilde{a}_1 \quad + (-\omega^2 J_2 + ic\omega)\tilde{a}_2 = 0 \end{cases} \tag{2.10.6}$$

Rezolvând acest sistem rezultă amplitudinile complexe:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 &= \frac{(-\omega^2 J_2 + ic\omega)M_0}{(-\omega^2 J_1 + k + ic\omega)(-\omega^2 J_2 + ic\omega) + c^2\omega^2} \\ \tilde{a}_2 &= \frac{ic\omega M_0}{(-\omega^2 J_1 + k + ic\omega)(-\omega^2 J_2 + ic\omega) + c^2\omega^2} \end{aligned} \tag{2.10.7}$$

Dacă se introduc notațiile:

$$p^2 = \frac{k}{J_1};\ \lambda = \frac{J_2}{J_1};\ \eta = \frac{\omega}{p};\ \zeta = \frac{c}{J_1 p} \Rightarrow 2\zeta\eta = \frac{c\omega}{k};\ \varphi_{st} = \frac{M_0}{k} \tag{2.10.8}$$

şi se împarte atât numărătorul cât şi numitorul expresiei amplitudinii lui $\tilde{a}_1$ (2.10.7) se obține:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 &= \varphi_{st}\frac{-\lambda\eta^2 + 2i\zeta\eta}{(1-\eta^2 + 2i\zeta\eta)(-\lambda\eta^2 + 2i\zeta\eta) + (2\zeta\eta)^2} \\ \Rightarrow \tilde{a}_1 &= \varphi_{st}\frac{-\lambda\eta + 2i\zeta}{-\lambda\eta(1-\eta^2) + (1-\eta^2-\lambda\eta^2)2i\zeta} \end{aligned} \tag{2.10.9}$$

Amplitudinea reală a carcasei se scrie ca modul al amplitudinii complexe:

$$\begin{aligned} a_1 &= |\tilde{a}_1| = \varphi_{st}\left|\frac{-\lambda\eta + 2i\zeta}{-\lambda\eta(1-\eta^2) + (1-\eta^2-\lambda\eta^2)2i\zeta}\right| \\ \Rightarrow \xi &= \frac{a_1}{\varphi_{st}} = \sqrt{\frac{\lambda^2\eta^2 + 4\zeta^2}{\lambda^2\eta^2(1-\eta^2)^2 + 4\zeta^2(1-\eta^2(1+\lambda))^2}} \end{aligned} \tag{2.10.10}$$

unde ξ este factorul de amplificare a amplitudinilor vibrațiilor.

Se observă că amplitudinea vibrațiilor forțate depinde de pulsația relativă η şi de parametrii λ şi ζ. Parametrul λ fiind un parametru constructiv, se studiază în continuare modul de variție al amplitudinii cu factorul de amortizare ζ pentru λ=1.

Pentru cele două cazuri extreme ale factorului de amortizare se obține:

- Pentru ζ=0 factorul de amplificare are aceeaşi expresie ca în cazul vibrațiilor forțate neamortizate pentru un volant de moment de inerție J_1:

$$\xi_1 = \frac{1}{\left|1-\eta^2\right|} \tag{2.10.11}$$

➢ Pentru $\zeta \to \infty$ factorul de amplificare are aceeaşi expresie ca în cazul vibraţiilor forţate neamortizate pentru un volant de moment de inerţie $J = J_1 + J_2 = J_1(1+\lambda)$:

$$\xi_2 = \frac{1}{\left|1-(1+\lambda)\eta^2\right|} \tag{2.10.12}$$

În figura 2.10.3 sunt date variaţiile factorul de amplificare pentru următoarele valori ale factorului de amortizare: ζ=0,05; ζ=0,1; ζ=0,3; ζ=0,5; ζ=1 şi ζ=1,5.

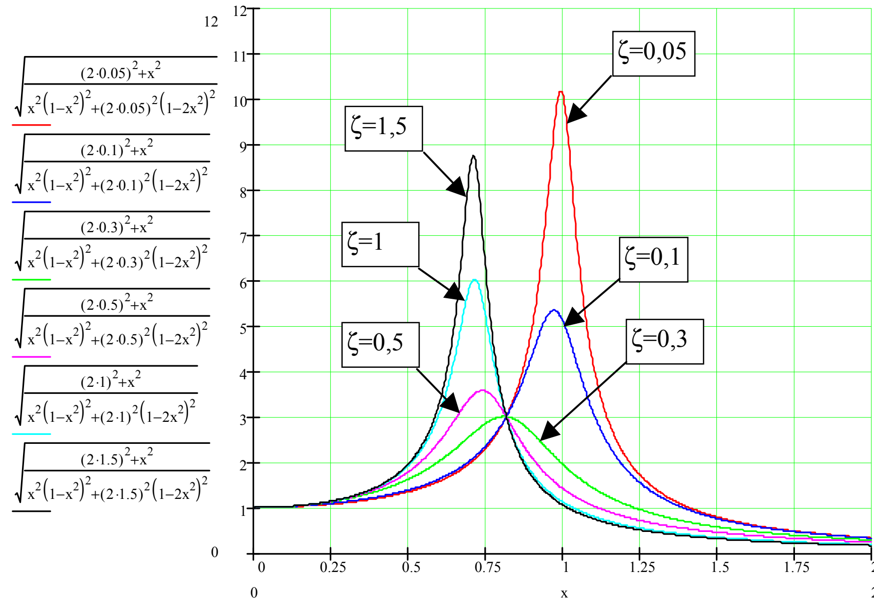


Fig. 2.10.3 Variaţiile factorul de amplificare pentru diferite valori ale factorului de amortizare: ζ=0,05; ζ=0,1; ζ=0,3; ζ=0,5; ζ=1 şi ζ=1,5.

Se observă că toate diagramele din figura 2.10.3 trec prin două puncte fixe care au abscisele soluţii ale ecuaţiei:

$$\left|1-\eta^2\right| = \left|1-\eta^2(1+\lambda)\right| \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\eta^2 = 1-\eta^2(1+\lambda) \Rightarrow \eta_1 = 0 \\ 1-\eta^2 = -1+\eta^2(1+\lambda) \Rightarrow \eta_2 = \sqrt{\dfrac{2}{2+\lambda}} \end{cases} \tag{2.10.13}$$

Valoarea corespunzătoare a factorului de amplificare este:

$$\xi = 1 + \frac{2}{\lambda} \tag{2.10.14}$$

Pentru cazul din figura 2.10.3 această valoare este:

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}816 \;\; \Rightarrow \xi_2 = 3 \tag{2.10.15}$$

Valoarea optimă a factorului de amortizare (pentru care se obține un factor de amplificare minim) este:

$$\zeta_{opt} = \frac{1}{\sqrt{2(1+\lambda)(2+\lambda)}}\,; \quad \zeta_{opt} = \frac{1}{\sqrt{12}} = 0{,}288 \tag{2.10.16}$$

În figura 2.10.4 sunt date variațiile factorul de amplificare pentru un factor de amortizare ζ=0,3 şi pentru următoarele valori ale parametrului λ:

λ=0,5; λ=1; λ=1,5; λ=2,5 şi λ=5.

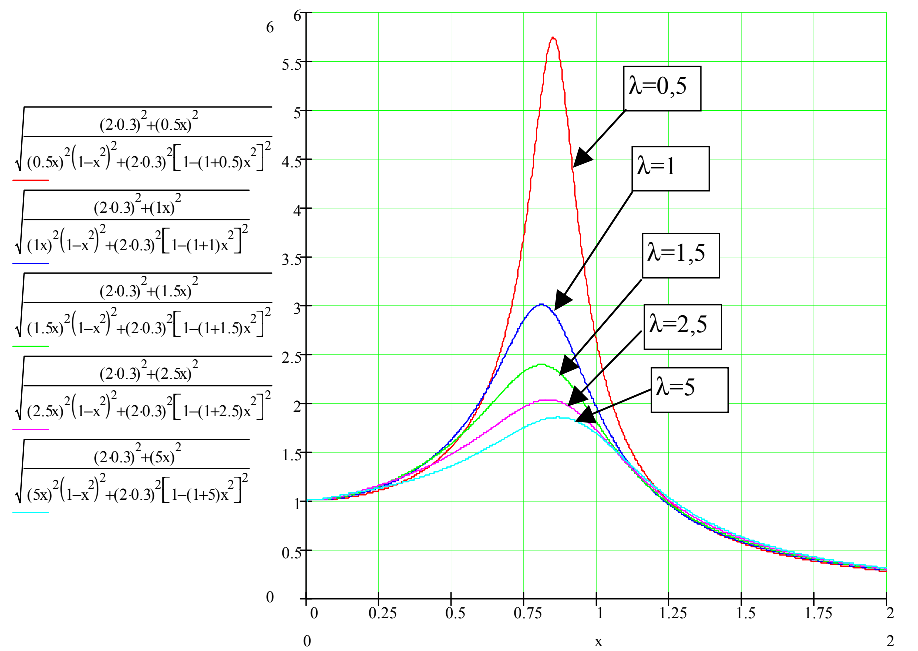


Fig. 2.10.4 Variațiile factorul de amplificare pentru un factor de amortizare ζ=0,3 şi diferite valori ale parametrului λ : λ=0,5; λ=1; λ=1,5; λ=2,5 şi λ=5.

2.11. Probleme propuse

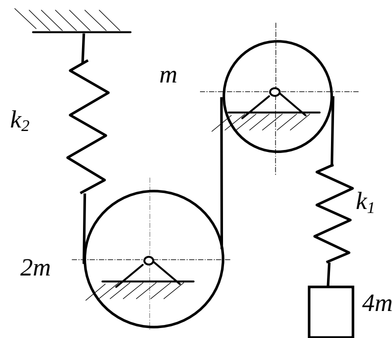


Fig. 2.11.1

2.11.1. Două roți omogene de mase *m* şi *2m* sunt legate de mediul fix prin articulații şi între ele printr-un fir, la capătul căruia atârnă masa *4m,* prin intermediul unui arc de rigiditate k_1; celălalt capăt al firului este legat de mediul fix prin intermediul unui arc de rigiditate k_2 , ca în fig.2.11.1. Să se determine pulsațiile şi frecvențele proprii ale vibrațiilor libere ale acestui sistem. Date numerice: *m*=1 kg; k_1 = 50 N/mm; k_2 = 80 N/mm; g=10 ms^{-2}

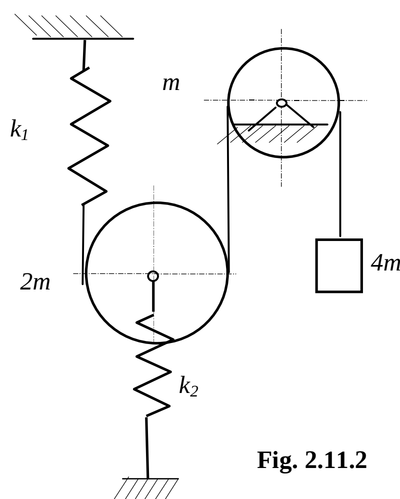


Fig. 2.11.2

2.11.2. Două roți omogene de mase *m* şi *2m* sunt legate între ele prin intermediul unui fir la capătul căruia atârnă masa *4m ;* celălalt capăt al firului este legat de mediul fix prin intermediul unui arc de rigiditate k_1 ; roata de masă *m* este legată de mediul fix prin intermediul unui arc de rigiditate k_2 ca în fig. 2.11.2. Să se determine pulsațiile şi frecvențele proprii ale vibrațiilor libere ale acestui sistem. Date numerice: *m*=1 kg; k_1 = 50 N/mm; k_2 = 80 N/mm; g=10 ms^{-2}

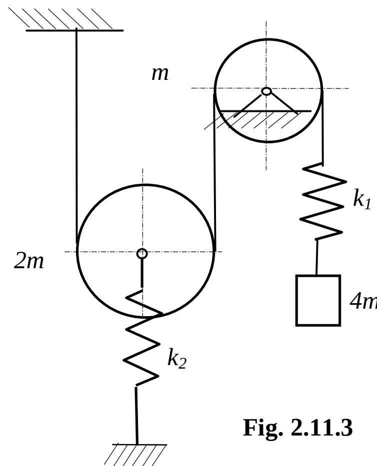


Fig. 2.11.3

2.11.3. Două roți omogene de mase *m* şi *2m* sunt legate între ele prin intermediul unui fir la capătul căruia atârnă masa *4m*, prin intermediul unui arc de rigiditate k_1; celălalt capăt al firului este legat de mediul fix ; roata de masă *m* este legată de mediul fix printr-o articulație iar roata de masă *2m* prin intermediul unui arc de rigiditate k_2 , ca în fig.2.11.3. Să se determine pulsațiile şi frecvențele proprii ale vibrațiilor libere ale acestui sistem.

Date numerice: *m*=1 kg; k_1 = 50 N/mm; k_2 = 80 N/mm; g=10 ms^{-2}

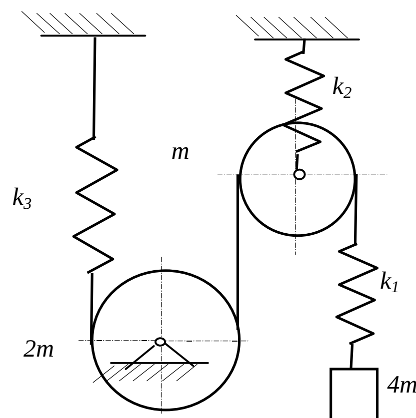


Fig. 2. 11.4

2.11.4. Două roți omogene de mase *m* şi *2m* sunt legate între ele prin intermediul unui fir la capătul căruia atârnă masa *4m* prin intermediul unui arc de rigiditate k_1 ; celălalt capăt al firului este legat de mediul fix prin intermediul unui arc de rigiditate k_3 ; roata de masă *m* este legată de mediul fix prin intermediul unui arc de rigiditate k_2 iar roata de masă *2m* printr-o articulație ca în fig. 2.11.4. Să se determine pulsațiile şi frecvențele proprii ale vibrațiilor libere ale acestui sistem.

Date numerice: *m*=1 kg; k_1 = 50 N/mm; k_2 = 80 N/mm *;* k_3 = 100 N/mm; g=10 ms^{-2}

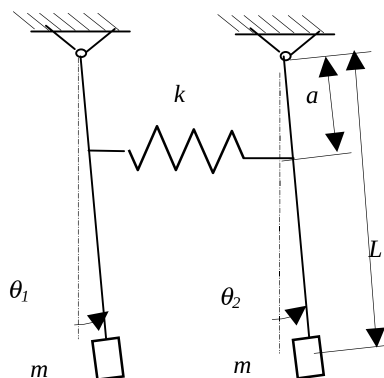


Fig. 2. 11.5

2.11.5. Se consideră pendulul dublu, format din două bare de lungime *L* de mase neglijabile la capetele cărora se găsesc două mase *m*, legate între ele prin intermediul unui arc de rigiditate *k* la distanța *a* de articulații, ca în fig. 2.11.5. Să se determine pulsațiile şi modurile proprii de vibrație corespunzătoare ale vibrațiilor libere ale acestui sistem.
Date numerice: m=1 kg; L= 500 mm; a=200 mm; k = 50 N/mm; g=10 ms^{-2}

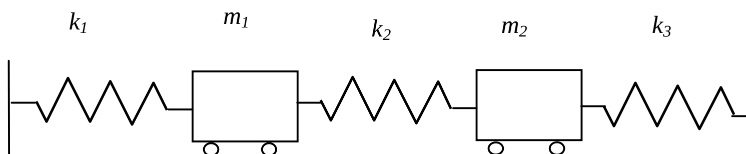


Fig. 2. 11.6

2.11.6 . Se consideră sistemul format din două mase m_1 şi m_2 legate între ele şi cu mediul fix prin intermediul elementelor elastice de rigidităţi k_2 , k_1 şi respectiv k_3 ca în fig. 2.11.6. Să se determine ecuațiile diferențiale ale mişcării frecvențele şi modurile proprii de vibrații ale acestui sistem. Date numerice: m_1=1 kg; m_2=3 kg; $k_1 = k_3 =$ 50 N/mm; k_2 =100 N/mm

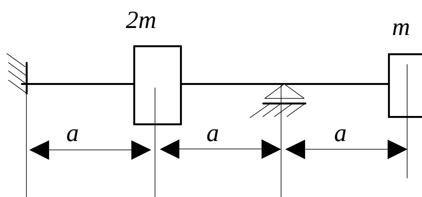


Fig. 2. 11.7

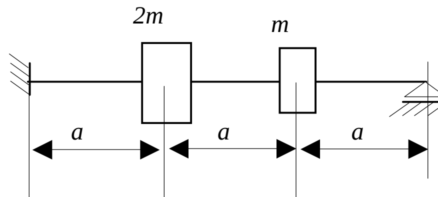


Fig. 2. 11.8

2.11.7. Se consideră sistemul format dintr-un arbore de masă neglijabilă şi rigiditate constantă *EI,* pe care se află montați doi volanți de mase *m* şi *2m* , având legăturile cu mediul fix ca în fig. 2.11.7. Să se determine folosind metoda coeficienților de influență frecvențele proprii şi modurile proprii de vibrații flexionale corespunzătoare ale acestui sistem. Date numerice: m=2 kg; a= 50 mm; EI= 125. 10^3 N m^2; g=10 ms^{-2}

2.11.8. Se consideră sistemul format dintr-un arbore de masă neglijabilă şi rigiditate constantă *EI,* pe care se află montaţi doi volanţi de mase *m* şi *2m* , având legăturile cu mediul fix ca în fig. 2.11.8. Să se determine (folosind metoda coeficienţilor de influenţă) frecvenţele proprii şi modurile proprii de vibraţii flexionale corespunzătoare ale acestui sistem. Date numerice: *m*=2 kg; a = 50 mm; EI = 125. 10^3 N m^2; g=10 ms^{-2}.

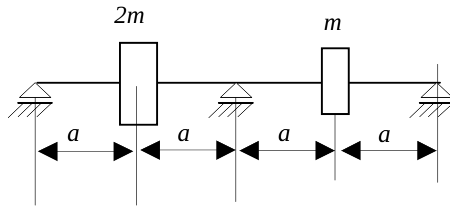


Fig. 2. 11.9

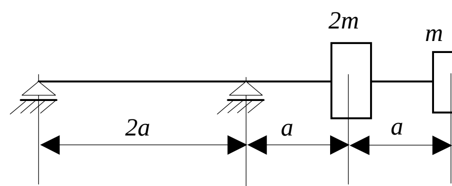


Fig. 2. 11.10

2.11.9. Se consideră sistemul format dintr-un arbore de masă neglijabilă şi rigiditate constantă *EI,* pe care se află montaţi doi volanţi de mase *m* şi *2m* , având legăturile cu mediul fix ca în fig. 2.11.9. Să se determine folosind metoda coeficienţilor de influenţă frecvenţele proprii şi modurile proprii ale vibraţiilor flexionale corespunzătoare ale acestui sistem. Date numerice: *m*=2 kg; a= 50 mm; EI= 125. 10^3 N m^2; g=10 ms^{-2}.

2.11.10. Se consideră sistemul format dintr-un arbore de masă neglijabilă şi rigiditate constantă *EI,* pe care se află montaţi doi volanţi de mase *m* şi *2m* , având legăturile cu mediul fix ca în fig. 2.11.10. Să se determine (folosind metoda coeficienţilor de influenţă) frecvenţele proprii şi modurile proprii de vibraţii flexionale corespunzătoare ale acestui sistem. Date numerice: *m*=2 kg; a= 50 mm; EI= 125. 10^3 N m^2; g=10 ms^{-2}

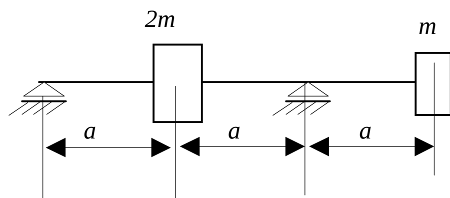


Fig. 2. 11.11

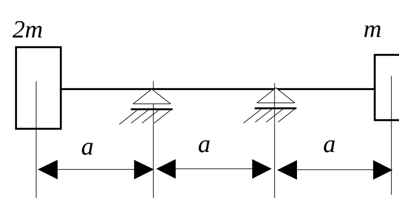


Fig. 2. 11.12

2.11.11. Se consideră sistemul format dintr-un arbore de masă neglijabilă şi rigiditate constantă *EI,* pe care se află montaţi doi volanţi de mase *m* şi *2m* , având legăturile cu mediul fix ca în fig. 2.11.11. Să se determine (folosind metoda coeficienţilor de influenţă) frecvenţele proprii şi modurile proprii de vibraţii flexionale corespunzătoare ale acestui sistem. Date numerice: *m* =2 kg; *a* = 50 mm; *EI* = 125. 10^3 N m^2; g=10 ms^{-2}

2.11.12. Se consideră sistemul format dintr-un arbore de masă neglijabilă şi rigiditate constantă *EI,* pe care se află montaţi doi volanţi de mase *m* şi *2m* , având legăturile cu mediul fix ca în fig. 2.11.12. Să se determine (folosind metoda coeficienţilor de influenţă) frecvenţele proprii şi modurile proprii de vibraţii flexionale corespunzătoare ale acestui sistem. Date numerice: m =2 kg; a = 50 mm; EI = 125. 10^3 N m^2; g=10 ms^{-2}

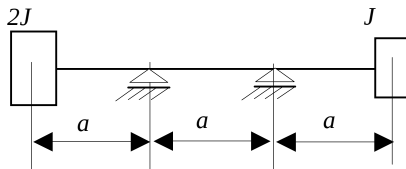


Fig. 2. 11.13

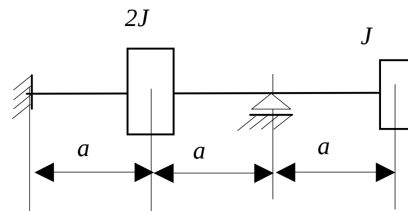


Fig. 2. 11.14

2.11.13. Se consideră sistemul format dintr-un arbore de masă neglijabilă şi rigiditate constantă GI_p *(*având diametrul constant *d)* , pe care se află montaţi doi volanţi de momente de inerţie *J* şi *2J* , având legăturile cu mediul fix ca în fig. 2.11.13. Să se determine frecvenţele proprii şi modurile proprii pentru vibraţiile torsionale ale acestui sistem. Date numerice: *J =50 kgm*^{2}*; a = 100 mm; a=60mm;* $G = 85\cdot 10^3\ N/mm^2$

2.11.14. Se consideră sistemul format dintr-un arbore de masă neglijabilă şi rigiditate constantă GI_p *(*având diametrul constant *d)* , pe care se află montaţi doi volanţi de momente de inerţie *J* şi *2J* , având legăturile cu mediul fix ca în fig. 2.11.14. Să se determine frecvenţele proprii şi modurile proprii pentru vibraţiile torsionale ale acestui sistem. Date numerice: *J =50 kgm*^{2}*; a= 100 mm; d=60mm;* $G = 85\cdot 10^3\ N/mm^2$.

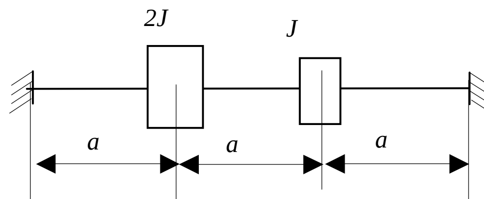


Fig. 2. 11.15

2.11.15. Se consideră sistemul format dintr-un arbore de masă neglijabilă şi rigiditate constantă GI_p *(*având diametrul constant *d)* , pe care se află montaţi doi volanţi de momente de inerţie *J* şi *2J* , având legăturile cu mediul fix ca în fig. 2.11.15. Să se determine frecvenţele proprii şi modurile proprii pentru vibraţiile torsionale ale acestui sistem. Date numerice: *J =50 kgm*^{2}*; a = 100 mm; a=60mm;*

$G = 85\cdot 10^3\ N/mm^2$

CAPITOLUL III
VIBRAȚIILE SISTEMELOR CU
N GRADE DE LIBERTATE

Studiul vibrațiilor sistemelor conservative prezintă interes atât pentru analiza structurilor cu *amortizare neglijabilă* (şasiuri, cadre, batiuri, etc.) cât şi pentru analiza structuri reale cu *amortizare proporțională* al căror răspuns poate fi exprimat în funcție de modurile proprii de vibrație ale sistemului conservativ asociat.

3.1. Vibrații libere ale sistemelor discrete. Abordarea modală.

Ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor libere ale unui sistem conservativ cu N grade de libertate, scrise în funcție de coordonatele generalizate independente q_1, q_2,..., q_N, sunt de forma:

$$[M]\{\ddot{q}\}+[K]\{q\}=\{0\} \tag{3.1.1}$$

unde: *[M]* este matricea maselor şi *[K]* matricea constantelor elastice; acestea sunt matrici pozitive, nesingulare şi simetrice (când coordonatele q_i definesc deplasări față de un reper fix din spațiu)

[q] este matricea coloană a coordonatelor generalizate şi $[\ddot{q}]$ matricea coloană a accelerațiilor generalizate

Soluțiile sistemului (3.1.1) sunt de forma:

$$\{q\}=\{\psi\}cos\ pt \tag{3.1.2}$$

şi reprezintă o vibrație armonică pentru care mişcările corespunzătoare celor N coordonate generalizate sunt *sincrone şi sinfazice.*

Înlocuind soluția (3.1.2) în (3.1.1), rezultă ecuațiile matriceale echivalente:

$$\left([K]-p^2[M]\right)\{\psi\}=\{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}[M]^{-1}[K]\{\psi\}=p^2\{\psi\}\\ [K]^{-1}[M]\{\psi\}=\dfrac{1}{p^2}\{\psi\}\end{cases} \tag{3.1.3}$$

Aceasta este o problemă de valori proprii asociată matricelor [M] şi [K].

Sistemul (3.1.3) are soluții nenule numai dacă :

$$det\left(\left[K\right]-p^2\left[M\right]\right)=0 \qquad (3.1.4)$$

Relația (3.1.4) este o ecuație algebrică de gradul N în p^2, numită *ecuația pulsațiilor*. Rădăcinile acesteia $p_1^2, p_2^2, ..., p_N^2$ (se consideră cazul când cele N valori sunt distincte) sunt toate reale şi pozitive şi se numesc *valori proprii*. Mărimile $p_1^2, p_2^2, ..., p_N^2$ se numesc *pulsații proprii*.

Fiecărei valori proprii p_r^2 îi corespunde un *vector propriu* $[\psi^{(r)}]$, format din elemente reale $\psi_j^{(r)}$, care satisface ecuația

$$\left(\left[K\right]-p_r^2\left[M\right]\right)\left\{\psi^{(r)}\right\}=\left\{0\right\} \qquad (3.1.5)$$

şi care defineşte forma *modului propriu de vibrație (r)*.

Aceşti *vectori modali* sunt unici, în sensul că deşi valorile elementelor pot fi arbitrare, raportul între două elemente $\psi_j^{(r)}$, $\psi_l^{(r)}$ este constant. Procesul de *"ajustare"* a elementelor vectorilor proprii pentru ca amplitudinea să fie unică se numeşte *normalizare,* iar vectorii rezultați definesc forma *modurilor normale* de vibrație. Normalizarea se face alegând fie $\psi_{max}^{(r)}=1$, fie $\left\{\psi^{(r)}\right\}^T\left[M\right]\left\{\psi^{(r)}\right\}=1$.

Probleme de valori proprii (3.1.5) se scrie sub forma :

$$\begin{cases}\left[M\right]^{-1}\left[K\right]\left\{\psi\right\}=p_r^2\left\{\psi\right\}\\ \left[K\right]^{-1}\left[M\right]\left\{\psi\right\}=\dfrac{1}{p_r^2}\left\{\psi\right\}\end{cases} \qquad (3.1.6)$$

deci vectorii proprii la dreapta matricei $\left[D\right]=\left[M\right]^{-1}\left[K\right]$ şi ai matricei inverse $\left[D\right]^{-1}=\left[K\right]^{-1}\left[M\right]$ sunt identici, iar valorile proprii corespunzătoare sunt inverse una alteia (datorită simetriei matricelor [M] şi [K]).

Între vectorii proprii $\left\{\psi^{(r)}\right\}$ şi matricele [*M*] şi [*K*] există următoarele relații de ortogonalitate:

$$\left\{\psi^{(s)}\right\}^T\left[M\right]\left\{\psi^{(r)}\right\}=0, \qquad (r\neq s) \qquad (3.1.7)$$

$$\left\{\psi^{(s)}\right\}^T\left[K\right]\left\{\psi^{(r)}\right\}=0, \qquad (r\neq s)$$

în care [*M*] şi [*K*] joacă rolul de matrici de ponderare.

Dacă se înmulţeşte ecuaţia matriceală (3.1.5) la stânga cu $\left\{\psi^{(r)}\right\}^T$ se obţine:

$$\left\{\psi^{(r)}\right\}^T\left([K]-p_r^2[M]\right)\left\{\psi^{(r)}\right\}=\{0\} \qquad (3.1.8)$$

Se notează:

$$m_r=\left\{\psi^{(r)}\right\}^T[M]\left\{\psi^{(r)}\right\} \quad si \quad k_r=\left\{\psi^{(r)}\right\}^T[K]\left\{\psi^{(r)}\right\} \qquad (3.1.9)$$

unde m_r este *masa generalizată* corespunzătoare modului r (*masa modală*) şi k_r *constanta elastică generalizată* corespunzătoare modului r (*constanta elastică modală)*.

Ecuaţia (3.1.8) devine:

$$k_r-p_r^2m_r=0 \qquad (3.1.10)$$

Rezultă:

$$p_r^2=\frac{k_r}{m_r}=\frac{\left\{\psi^{(r)}\right\}^T[K]\left\{\psi^{(r)}\right\}}{\left\{\psi^{(r)}\right\}^T[M]\left\{\psi^{(r)}\right\}} \qquad (3.1.11)$$

Se defineşte *matricea modală* matricea pătrată având drept coloane vectorii proprii $\left\{\psi^{(r)}\right\}$:

$$[\Psi]=\left[\left\{\psi^{(1)}\right\}\left\{\psi^{(2)}\right\}\ldots\left\{\psi^{(r)}\right\}\ldots\left\{\psi^{(N)}\right\}\right] \qquad (3.1.12)$$

Dacă valorile proprii se aranjează în matricea diagonală numită *matricea spectrală:*

$$\left[p_r^2\right]^D=diag\left[p_r^2\right] \qquad (3.1.13)$$

atunci ecuaţiile (3.1.5) se scriu sub forma

$$[K][\Psi]-[M][\Psi]\left[p_r^2\right]^D=[0]. \qquad (3.1.14)$$

3.2. Vibrații forțate neamortizate ale sistemelor conservative

Ecuațiile vibrațiilor forțate neamortizate ale unui sistem conservativ cu N grade de libertate se scriu sub forma :

$$[M]\{\ddot{q}\}+[K]\{q\}=\{f\}, \qquad (3.2.1)$$

unde $\{f\}$ este vectorul excitației iar celelalte notații au aceleaşi semnificații ca în relația (3.1.1).

În cazul general în care matricele $[M]$ şi $[K]$ nu sunt simultan diagonale pentru decuplarea ecuațiilor (3.2.1) se foloseşte transformarea liniară:

$$\{q\}=[\Psi]\{\xi\}, \qquad (3.2.2)$$

exprimând vectorul coordonatelor generalizate $\{q\}$ ca o combinație liniară de vectorii proprii $\{\psi^{(r)}\}$ şi ξ_r reprezintă *coordonatele principale neamortizate:*

$$\{q^{(r)}\}=\{\psi^{(r)}\}\xi_r \qquad (3.2.3)$$

Înlocuind (3.2.2) în (3.2.1) şi înmulțind la stânga cu $[\Psi]^T$, rezultă ecuația matriceală:

$$[\psi]^T[M][\psi]\{\ddot{\xi}\}+[\psi]^T[K][\psi]\{\xi\}=[\psi]^T\{f\} \qquad (3.2.4)$$

Ecuația r corespunzătoare coordonatei principale ξ_r se obține scriind linia r a ecuației matriceale (3.2.4) şi ținând seama de relațiile de ortogonalitate (3.1.7) :

$$\{\psi^{(r)}\}^T[M]\{\psi^{(r)}\}\ddot{\xi}_r+\{\psi^{(r)}\}^T[K]\{\psi^{(r)}\}\xi_r=\{\psi^{(r)}\}^T\{f\} \qquad (3.2.5)$$

Folosind relațiile (3.1.8) şi (3.1.9), ecuația (3.2.5) se mai scrie:

$$m_r\ddot{\xi}_r+k_r\xi_r=F_r. \qquad (3.2.6)$$

unde m_r este *masa modală* corespunzătoare modului r

k_r - *constanta modală* corespunzătoare modului r (3.2.7)

$F_r=\{\psi^{(r)}\}^T\{f\}$ - *forța generalizată* (*modală*) corespunzătoare modului r.

Dacă se introduc matricele diagonale corespunzătoare:

- maselor modale:

$$[m]^D=[\psi]^T[M][\psi]=diag[m_r] \qquad (3.2.8)$$

- constantelor elastice modale:

$$[k]^D = [\Psi]^T [K][\Psi] = diag[k_r] \tag{3.2.9}$$

- şi vectorul forțelor modale:

$$\{F\} = [\Psi]^T \{f\}, \tag{3.2.10}$$

atunci sistemul (3.2.3) se mai scrie:

$$[m]^D \{\ddot{\xi}\} + [k]^D \{\xi\} = \{F\} \tag{3.2.11}$$

şi reprezintă N ecuații decuplate echivalente cu N ecuații independente cu un singur grad de libertate.

În cazul unei excitații armonice de forma $\{f\} = \{\hat{f}\}e^{i\omega t}$ soluția staționară este de forma:

$$\{q\} = \{\hat{q}\}e^{i\omega t} \;\Rightarrow\; \{\ddot{q}\} = -\omega^2 \{\hat{q}\}e^{i\omega t} \tag{3.2.12}$$

şi ecuația (3.2.10) se scrie:

$$\left(-\omega^2 [m]^D + [k]^D\right)\{\hat{q}\} = [\Psi]^T \{\hat{f}\} \tag{3.2.13}$$

Folosind transformarea de coordonate principale:

$$\{\hat{q}\} = [\psi]\{\hat{\xi}\} = \sum_{r=1}^{N} \{\psi^{(r)}\}\hat{\xi}_r \tag{3.2.14}$$

ecuația 3.2.12 se scrie:

$$\left(-\omega^2 m_r + k_r\right)\hat{\xi}_r = \{\psi^{(r)}\}^T \{\hat{f}\} \tag{3.2.15}$$

Rezultă:

$$\hat{\xi}_r = \frac{\{\psi^{(r)}\}^T \{\hat{f}\}}{k_r - \omega^2 m_r} \tag{3.2.16}$$

deci:

$$\{\hat{q}\} = \sum_{r=1}^{N} \frac{\{\psi^{(r)}\}^T \{\hat{f}\}\{\psi^{(r)}\}}{m_r\left(p_r^2 - \omega^2\right)}. \tag{3.2.17}$$

Modurile proprii de vibrație $\{\psi^{(r)}\}$ ale unui sistem conservativ se pot manifesta şi în absența unei solicitări exterioare. Este posibil ca fiecărui mod propriu de vibrație să i se ataşeze câte un *mod propriu de solicitare*, denumit *mod principal de excitație* care reprezintă distribuția de forțe având pulsații diferite de pulsația proprie p_r capabilă să întrețină vibrația corespunzător modului propriu r.

Dacă excitația $\{f\}=\{\hat{F}^{(r)}\}e^{i\omega t}$ produce răspunsul $\{q\}=\{\psi^{(r)}\}e^{i\omega t}$, atunci din relația (3.2.12) rezultă $\{\xi\}=\{I\}_r e^{i\omega t}$, unde $\{I\}_r$ este coloana r a matricei unitate $[I]$, iar ecuația (3.2.5) devine:

$$\{\hat{F}^{(r)}\}=\left([K]-p_r^2[M]\right)\{\psi^{(r)}\} \qquad (3.2.18)$$

Relația (3.2.18) definește *modul principal de solicitare* corespunzător pulsației proprii p_r .

Înmulțind în ecuația (3.2.18) la stânga cu $\{\psi^{(s)}\}^T$ conform relațiilor de ortogonalitate (3.1.7) rezultă relația:

$$\{\psi^{(s)}\}^T\{\hat{F}^{(r)}\}=0 \qquad (3.2.19)$$

care arată că lucrul mecanic efectuat de forțele corespunzătoare modului principal de solicitare pe deplasările corespunzătoare celorlalte moduri de vibrație este nul.

Analog, pe baza relațiilor (3.1.8) şi (3.1.9), din relația (3.2.19) se obține:

$$\{\psi^{(r)}\}^T\{\hat{F}^{(r)}\}=k_r-\omega^2 m^r=k_r\left(1-\frac{\omega^2}{p_r^2}\right) \qquad (3.2.20)$$

Se observă că pentru $\omega \neq p_r$ lucrul mecanic efectuat este diferit de zero.

3.3. Vibrațiile sistemelor amortizate

Ecuațiile vibrațiilor forțate ale unui sistem cu N grade de libertate cu amortizare vâscoasă liniară se pot scrie sub forma:

$$[M]\{\ddot{q}\}+[C]\{\dot{q}\}+[K]\{q\}=\{f\} \tag{3.3.1}$$

unde $[C]$ este matricea coeficienților de amortizare vâscoasă, denumită şi *matricea amortizării*. Se va considera că $[C]$ este reală, simetrică şi definită pozitiv.

Transformarea în coordonate principale ξ conform relației (3.2.2) şi înmulțirea ecuației obținute la stânga cu $[\Psi]^T$ conduce la sistemul de ecuații:

$$[\Psi]^T[M][\Psi]\{\ddot{\xi}\}+[\Psi]^T[C][\Psi]\{\dot{\xi}\}+[\Psi]^T[K][\Psi]\{\xi\}=[\Psi]^T\{f\} \tag{3.3.2}$$

Folosind notațiile (3.2.8), (3.2.9) şi notând:

$$[c]=[\Psi]^T[C][\Psi] \tag{3.3.3}$$

sistemul (3.3.2) devine:

$$[m]^D\{\ddot{\xi}\}+[c]\{\dot{\xi}\}+[k]^D\{\xi\}=\{F\} \tag{3.3.4}$$

Se deosebesc două cazuri:

- cazul când matricea $[c]$ nu este diagonală, amortizarea vâscoasă se numeşte *neproporțională (neortogonală* sau *neclasică)*. Prima ecuație diferențială a sistemului (3.3.4) se scrie:

$$m_1\ddot{\xi}_1+c_{11}\dot{\xi}_1+\sum_{r=2}^{N}c_{1r}\dot{\xi}_r+k_1\xi_1=F_1 \tag{3.3.5}$$

  Termenul al treilea indică existența unei cuplări între modurile de vibrație datorată amortizării. În acest caz se definesc pulsațiile proprii complexe şi formele proprii complexe, după cum urmează.

- cazul când matricea $[c]$ este diagonală, amortizarea vâscoasă se numeşte *proporțională (ortogonală* sau *clasică)*. Făcând notația:

$$[c]^D=diag[c_r] \tag{3.3.6}$$

  sistemul (3.3.4) devine:

$$[m]^D\{\ddot{\xi}\}+[c]^D\{\dot{\xi}\}+[k]^D\{\xi\}=\{F\} \tag{3.3.7}$$

  deci în aceste condiții modurile de vibrație sunt decuplate.

Prima ecuație diferențială a sistemului (3.3.7) se scrie:

$$m_1\ddot{\xi}_1 + c_1\dot{\xi}_1 + k_1\xi_1 = F_1 \qquad (3.3.8)$$

şi poate fi rezolvată independent de celelalte *N-1* ecuații.

Denumirea de amortizare proporțională provine de la o observație a lui Rayleigh. Astfel, dacă e exprimă matricea amortizării $[C]$ ca o combinație a matricelor $[M]$ şi $[K]$ de forma:

$$[C] = \sigma[M] + \tau[K] \qquad (3.3.9)$$

unde τ şi σ sunt doi factori de proporționalitate, atunci matricea $[\Psi]^T[C][\Psi]$ este diagonală.

Într-adevăr:

$$[\Psi]^T[C][\Psi] = \sigma[\Psi]^T[M][\Psi] + \tau[\Psi]^T[K][\Psi] = \sigma[m]^D + \tau[k]^D = [c]^D \qquad (3.3.10)$$

Amortizarea proporțională nu trebuie însă limitată la o combinație liniară a matricelor masei şi rigidității. S-a demonstrat că dacă matricea amortizării $[C]$ se poate exprima ca o funcție polinomială a matricelor $[M]$ şi $[K]$ atunci matricea modală $[\Psi]$ diagonalizează matricea $[C]$ la fel ca şi matricele $[M]$ şi $[K]$, cu condiția ca matricea modală să fie ortogonală adică:

$$[\Psi]^T[\Psi] = [I] \qquad (3.3.11)$$

Condiția generală necesară şi suficientă pentru decuplarea ecuațiilor (3.3.2) după aplicarea transformării de coordonate principale este:

$$[C][M]^{-1}[K] = [K][M]^{-1}[C]. \qquad (3.3.12)$$

În practica inginerească alegerea ipotezei amortizării proporționale nu se face verificând respectarea condiției (3.3.12) ci mult mai simplu, considerând neglijabili termenii nediagonali ai matricei amortizării, adică cuplajele intermodale produse de amortizări. Dacă matricea amortizării poate fi diagonalizată folosind aceeaşi transformare care decuplează sistemul (3.1.1), răspunsul sistemului amortizat se poate exprima în funcție de modurile de vibrație ale sistemului neamortizat asociat $\{\Psi^{(r)}\}$ numite *moduri reale* sau *clasice* de vibrație.

3.4. Moduri clasice de vibrații forțate

3.4.1. Vibrații forțate cu amortizare vâscoasă

În cazul amortizării vâscoase proporționale se poate stabili o relație de ortogonalitate pentru matricea coeficienților de amortizare:

$$\left\{\psi^{(s)}\right\}^T [C]\left\{\psi^{(r)}\right\} = 0 \qquad (r \neq s) \tag{3.4.1}$$

şi se notează cu c_r coeficientul de amortizare vâscoasă modală:

$$\left\{\psi^{(s)}\right\}^T [C]\left\{\psi^{(r)}\right\} = c_r \qquad r = s \tag{3.4.2}$$

În regim armonic staționar, dacă se scrie:

$$\{f\} = \left\{\hat{f}\right\} e^{i\omega t}, \qquad \{q\} = \{\tilde{q}\} e^{i\omega t}, \tag{3.4.3}$$

ecuația matriceală (3.3.1) $[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{f\}$ se scrie sub forma:

$$\left(-p^2[M] + ip[C] + [K]\right)\{\tilde{q}\} = \left\{\hat{f}\right\} \tag{3.4.4}$$

Aplicând transformarea de coordonate principale:

$$\{\tilde{q}\} = [\Psi]\left\{\tilde{\xi}\right\} = \sum_{r=1}^{N} \left\{\psi^{(r)}\right\} \tilde{\xi}_r \tag{3.4.5}$$

înmulțind la stînga ecuația (3.4.4) cu $[\Psi]^T$ şi folosind relațiile (3.1.6) - (3.1.8), (3.4.1) şi (3.4.2) rezultă expresia coordonatei complexe principale:

$$\tilde{\xi}_r = \frac{\left\{\psi^{(r)}\right\}^T \left\{\hat{f}\right\}}{m_r\left(p_r^{\,2} - \omega^2 + 2i\zeta_r \omega p_r\right)} \tag{3.4.6}$$

unde s-a notat cu ζ_r factorul de amortizare corespunzător modului *r*:

$$\zeta_r = \frac{c_r}{2m_r\omega_r} \tag{3.4.7}$$

Ținând seama de (3.4.6) relația (3.4.5) se scrie:

$$\{\tilde{q}\} = \sum_{r=1}^{N} \frac{\left\{\psi^{(r)}\right\}^T \left\{\hat{f}\right\}\left\{\psi^{(r)}\right\}}{m_r\left(-\omega^2 + i2\zeta\omega\omega_r + \omega_r^{\,2}\right)} \tag{3.4.8}$$

3.4.2. Vibrații forțate cu amortizare histeretică

Ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor forțate cu amortizare histeretică pentru un sistem liniar cu *N* grade de libertate se pot scrie matriceal:

$$[M]\{\ddot{q}\}+\frac{1}{\omega}[H]\{\dot{q}\}+[K]\{q\}=\{f\}, \qquad (3.4.9)$$

unde $[H]$ este matricea coeficienților de amortizare histeretică (reală, pozitiv definită şi simetrică).

În cazul amortizării histeretice proporționale se poate stabili ca şi în cazul precedent o relație de ortogonalitate pentru matricea coeficienților de amortizare histeretică:

$$\{\psi^{(s)}\}^T[H]\{\psi^{(r)}\}=0. \qquad (r \neq s) \qquad (3.4.10)$$

şi se notează cu h_r coeficientul de amortizare histerezică modală corespunzător modului r :

$$\{\psi^{(s)}\}^T[H]\{\psi^{(r)}\}=h_r \qquad r=s \qquad (3.4.11)$$

În regim armonic staționar, dacă se scrie:

$$\{f\}=\{\hat{f}\}e^{i\omega t}, \qquad \{q\}=\{\tilde{q}\}e^{i\omega t}, \qquad (3.4.12)$$

ecuația matriceală (3.3.1): $[M]\{\ddot{q}\}+[C]\{\dot{q}\}+[K]\{q\}=\{f\}$ se scrie sub forma:

$$\left(-\omega^2[M]+i[H]+[K]\right)\{\tilde{q}\}=\{\hat{f}\} \qquad (3.4.13)$$

Aplicând transformarea de coordonate principale (3.4.5) se decuplează sistemul de ecuații (3.4.13), care devine:

$$\left(-\omega^2[m]^D+i[h]^D+[k]^D\right)\{\tilde{\xi}\}=\{\psi^{(r)}\}^T\{\hat{f}\}=\{\hat{F}\} \qquad (3.4.14)$$

unde s-a notat:

$$[h]^D=diag[h_r] \qquad (3.4.15)$$

Ecuația r a acestui sistem se scrie

$$\left(k_r-\omega^2 m_r+ih_r\right)\tilde{\xi}_r=\hat{F}_r \qquad (3.4.16)$$

deci coordonata modală complexă este:

$$\tilde{\xi}_r=\frac{\{\psi^{(r)}\}^T\{\hat{f}\}}{k_r-\omega^2 m_r+ih_r} \qquad (3.4.17)$$

Rezultă vectorul amplitudinilor complexe ale deplasărilor:

$$\{\tilde{q}\}=\sum_{r=1}^{N}\frac{\{\psi^{(r)}\}^T\{\hat{f}\}\{\psi^{(r)}\}}{k_r\left(1-\dfrac{\omega^2}{p_r^{\,2}}+ig_r\right)}, \qquad (3.4.18)$$

unde s-a notat cu g_r *factorul de amortizare histeretică* corespunzător modului r:

$$g_r=h_r/k_r \qquad (3.4.19)$$

În cazul metodelor de identificarea dinamică a sistemelor mecanice cu excitație într-un punct interesează răspunsul *pe direcția coordonatei* q_j produs de o forță armonică aplicată pe direcția coordonatei q_l.

Ținând seama de derivata parțială în raport cu coordonata principală ξ_r amplitudinilor complexe ale deplasărilor conform relației (3.4.5):

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}_r}\{\tilde{q}\} = \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}_r}\left(\sum \{\psi^{(r)}\}\tilde{\xi}_r\right) = \{\psi^{(r)}\} \qquad (3.4.20)$$

expresia (3.4.18) se scrie:

$$\tilde{q}_j = \sum_{r=1}^{N} \frac{\psi_l^{(r)} \hat{f}_l \psi_j^{(r)}}{k_r\left(1 - \frac{\omega^2}{p_r^{\,2}} + ig_r\right)} = \sum_{r=1}^{N} \frac{\frac{\partial \tilde{q}_l}{\partial \tilde{\xi}_r} \hat{f}_l \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial \tilde{\xi}_r}}{k_r\left(1 - \frac{\omega^2}{p_r^{\,2}} + ig_r\right)}. \qquad (3.4.21)$$

Rezultă *receptanța (de transfer) complexă:*

$$\overline{\alpha}_{jl} = \frac{\tilde{q}_j}{\hat{f}_l} = \sum_{r=1}^{N} \frac{\psi_l^{(r)} \psi_j^{(r)}}{k_r\left(1 - \frac{\omega^2}{p_r^{\,2}} + ig_r\right)} = \sum_{r=1}^{N} \frac{\psi_l^{(r)} \psi_j^{(r)}}{k_r g_r} \sin\psi_r e^{-i\psi_r} \qquad (3.4.22)$$

unde s-a notat cu: $$\psi_r = arctg \frac{g_r}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^{\,2}}}. \qquad (3.4.23)$$

La același rezultat se ajunge folosind metoda răspunsului în frecvență.

Astfel, ecuația (3.4.13) se mai scrie:

$$[\overline{\beta}]\{\tilde{q}\} = \{\hat{f}\} \qquad (3.4.24)$$

unde s-a notat cu $[\overline{\beta}]$ matricea obstructanțelor complexe (matricea constantelor elastice dinamice):

$$[\overline{\beta}] = \left[-\omega^2[M] + i[H] + [K]\right] \qquad (3.4.25)$$

Matricea receptanțelor complexe sau a coeficienților de influență dinamici este inversa matricei obstructanțelor complexe:

$$[\overline{\alpha}] = [\overline{\beta}]^{-1} = \left[-\omega^2[M] + i[H] + [K]\right]^{-1}, \qquad (3.4.26)$$

şi are elementele de forma:

$$\overline{\alpha}_{jl} = \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial \hat{f}_l}. \qquad (3.4.27)$$

Aplicând transformarea de coordonate principale (3.4.5) ecuația (3.4.24) devine: $$[\overline{\beta}][\psi]\{\tilde{\xi}\} = \{\hat{f}\} \qquad (3.4.28)$$

După înmulțirea la stânga cu $[\psi]^T$ se obține sistemul decuplat:

$$[\overline{\beta}_r]^D\{\tilde{\xi}\}=[\psi]^T\{\hat{f}\} \tag{3.4.29}$$

unde: $$[\overline{\beta}_r]^D=[\psi]^T[\overline{\beta}][\psi]=(-\omega^2[m]^D+i[h]^D+[k]^D) \tag{3.4.30}$$

iar *obstructanța modală complexă* este:

$$\overline{\beta}_r=k_r-\omega^2 m_r+ih_r. \tag{3.4.31}$$

Receptanța modală complexă este inversa *obstructanței modale complexe*:

$$\overline{\alpha}_r=\frac{1}{\overline{\beta}_r}=\frac{1}{k_r\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_r{}^2}+ig_r\right)}=\frac{sin\psi_r\cdot e^{-i\psi_r}}{k_r g_r} \tag{3.4.32}$$

şi matricea diagonală corespunzătoare *receptanțelor modale* este:

$$[\overline{\alpha}_r]^D=\left([\overline{\beta}_r]^D\right)^{-1}. \tag{3.4.33}$$

Prin inversarea relației (3.4.42) se obține:

$$\left([\overline{\beta}_r]^D\right)^{-1}=[\Psi]^{-1}[\overline{\beta}]^{-1}\left([\Psi]^T\right)^{-1} \tag{3.4.34}$$

Prin inversarea relației matriceale $[\overline{\alpha}_r]^D=[\Psi]^T[\overline{\alpha}]\,[\Psi]$ se obține:

$$\left([\overline{\alpha}_r]^D\right)^{-1}=[\Psi]^{-1}\,[\overline{\alpha}]^{-1}\left([\Psi]^T\right)^{-1} \tag{3.4.35}$$

Înmulțind relația (3.4.35) la stânga cu $[\Psi]$ şi la dreapta cu $[\Psi]$se obține:

$$[\Psi][\overline{\alpha}_r]^D[\Psi]^T=[\overline{\alpha}] \tag{3.4.36}$$

Coloana l a matricei receptanțelor complexe $[\overline{\alpha}]$ reprezintă vectorul răspuns pentru o forță aplicată după direcția coordonatei l :

$$\{\overline{\alpha}\}_l=[\Psi][\overline{\alpha}_r]^D\{\psi\}_l=[\Psi]\{\overline{\alpha}_r\psi_l\}, \tag{3.4.37}$$

unde $\{\Psi\}_l$ este un vector care conține elementul l al fiecărui mod propriu.

Rezultă elementul α_{ij} al matricei receptanțelor complexe:

$$\overline{\alpha}_{jl}=\sum_{r=1}^{N}\psi_l{}^{(r)}\psi_j{}^{(r)}\overline{\alpha}_r=\sum_{r=1}^{N}\frac{\psi_l{}^{(r)}\psi_j{}^{(r)}}{k_r g_r}sin\psi_r\cdot e^{-i\psi_r} \tag{3.4.50}$$

având expresia identică cu cea obținută anterior (3.4.34).

3.5. Probleme rezolvate

3.5.1. Pendulul triplu

Se consideră sistemul cu trei grade de libertate format din 3 tije identice de masă *m* şi lungime *L* articulate la capătul superior, fiecare tijă având la celălalt capăt câte o piesă cilindrică de masă *M*. La distanţa *a* de articulaţii tijele sunt legate între ele cu două arcuri identice de constantă elastică *k* ca în figura 3.5.1. Să se determine pulsaţiile şi modurile proprii de vibraţie.

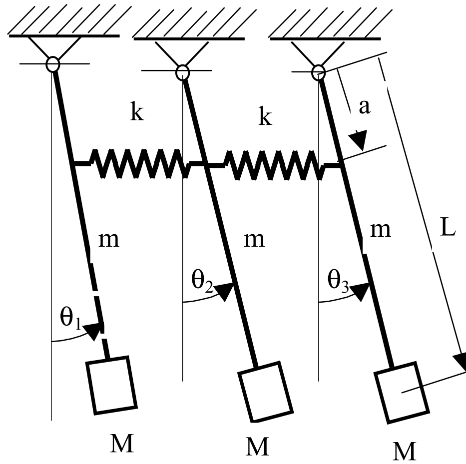


Fig. 3.5.1

Se consideră ca parametrii ai mişcării sistemului unghiurile θ_1, θ_2 şi θ_3. Valorile deplasărilor şi vitezelor unghiulare la momentul iniţial ($t = 0$) sunt:

$$\theta_1 = \theta_1^0;\ \theta_2 = \theta_2^0;\ \theta_3 = \theta_3^0$$
$$\dot\theta_1 = \dot\theta_2 = \dot\theta_3 = 0 \tag{3.5.1}$$

Energia cinetică a sistemului este:

$$E_c = \frac{1}{2}\left(J + ML^2\right)\cdot\left(\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2 + \dot\theta_3^2\right) \tag{3.5.2}$$

$J = \dfrac{mL^2}{3}$ este momentul de inerţie al barei de masă *m* şi lungime *L*.

Energia potenţială a sistemului este suma dintre energia elastică a arcurilor şi energia potenţială gravitaţională a sistemului de bare şi corpuri de masă M:

$$V = \frac{ka^2}{2}\left[(\theta_2 - \theta_1)^2 + (\theta_3 - \theta_2)^2\right] + gl\left(M + \frac{m}{2}\right)(3 - cos\theta_1 - cos\theta_2 - cos\theta_3) \tag{3.5.3}$$

Dacă se notează: $$J_0 = \frac{mL^2}{3} + ML^2;\ \ k_0 = ka^2 + gl\left(M + \frac{m}{2}\right) \tag{3.5.4}$$

ecuaţiile lui Lagrange: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial E_c}{\partial\dot\theta_k}\right) + \dfrac{\partial V}{\partial\theta_k} = 0, \qquad k = 1,2,3$ se scriu:

$$\begin{cases} J_0\ddot\theta_1 + k_0\theta_1 - ka^2\theta_2 = 0 \\ J_0\ddot\theta_2 - ka^2\theta_1 + (k_0 + ka^2)\theta_2 - ka^2\theta_3 = 0 \\ J_0\ddot\theta_3 - ka^2\theta_2 + k_0\theta_3 = 0 \end{cases} \tag{3.5.5}$$

Soluțiile sistemului de ecuații diferențiale (3.5.5) sunt de forma:

$$\begin{cases}\theta_1 = a_1 \cos(pt-\varphi)\\ \theta_2 = a_2 \cos(pt-\varphi)\\ \theta_3 = a_3 \cos(pt-\varphi)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\ddot{\theta}_1 = -p^2 a_1 \cos(pt-\varphi)\\ \ddot{\theta}_2 = -p^2 a_2 \cos(pt-\varphi)\\ \ddot{\theta}_3 = -p^2 a_3 \cos(pt-\varphi)\end{cases} \quad (3.5.6)$$

Introducând (3.5.6)în (3.5.4) se obține sistemul omogen:

$$\begin{cases}(-J_0 p^2 + k_0)a_1 - ka^2 a_2 = 0\\ -ka^2 a_1 + (-J_0 p^2 + k_0 + ka^2)a_2 - ka^2 a_3 = 0\\ -ka^2 a_2 + (-J_0 p^2 + k_0)a_3 = 0\end{cases} \quad (3.5.7)$$

Condiția ca sistemul (3.5.7) să admită soluții nebanale se scrie:

$$\begin{vmatrix} k_0 - J_0 p^2 & -ka^2 & 0\\ -ka^2 & k_0 + ka^2 - J_0 p^2 & -ka^2\\ 0 & -ka^2 & k_0 - J_0 p^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.5.8)$$

care este echivalent cu ecuația:

$$(k_0 - J_0 p^2)\left[(k_0 - J_0 p^2)^2 + ka^2(k_0 - J_0 p^2) - 2(ka^2)^2\right] = 0 \quad (3.5.9)$$

Rezolvând ecuația (3.5.9) rezultă cele 3 pulsații proprii:

$$p_1 = \sqrt{\frac{k_0 - ka^2}{J_0}} = \sqrt{\frac{g\left(M + \frac{m}{2}\right)}{L\left(M + \frac{m}{3}\right)}} \quad (3.5.10)$$

$$p_2 = \sqrt{\frac{k_0}{J_0}} = \sqrt{\frac{gL\left(M + \frac{m}{2}\right) + ka^2}{L^2\left(M + \frac{m}{3}\right)}} \quad (3.5.11)$$

$$p_3 = \sqrt{\frac{k_0 + 2ka^2}{J_0}} = \sqrt{\frac{gL\left(M + \frac{m}{2}\right) + 3ka^2}{L^2\left(M + \frac{m}{3}\right)}} \quad (3.5.12)$$

Soluțiile corespunzătoare de vibrație modului r ($r=1,2,3$) sunt:

$$\begin{cases}\theta_{1r} = a_{1r} \cos(p_r t - \varphi_r)\\ \theta_{2r} = a_{2r} \cos(p_r t - \varphi_r)\\ \theta_{3r} = a_{2r} \cos(p_r t - \varphi_r)\end{cases} \quad (3.5.13)$$

Coeficienții de distribuție corespunzători modului r de vibrație se determină din primele două ecuații ale sistemului (3.5.7) care se mai scriu:

$$\begin{cases} a_{2r} = \dfrac{-J_0 p_r^2 + k_0}{ka^2} a_{1r} \\ a_{3r} = -a_{1r} + \dfrac{-J_0 p_r^2 + k_0 + ka^2}{ka^2} a_{2r} \end{cases} \tag{3.5.14}$$

- pentru primul mod de vibrație: $p_1^2 = \dfrac{k_0 - ka^2}{J_0}$:

$$\begin{cases} \mu_{11} = \dfrac{a_{11}}{a_{11}} = 1 \\ \mu_{21} = \dfrac{a_{21}}{a_{11}} = \dfrac{k_0 - p_1^2 J_0}{ka^2} = 1 \\ \mu_{31} = \dfrac{a_{31}}{a_{11}} = -1 + \dfrac{k_0 + ka^2 - p_1^2 J_0}{ka^2} \mu_{21} = 1 \end{cases} \tag{3.5.15}$$

- pentru al II lea mod de vibrație: $p_2^2 = \dfrac{k_0}{J_0}$:

$$\begin{cases} \mu_{12} = \dfrac{a_{12}}{a_{12}} = 1 \\ \mu_{22} = \dfrac{a_{22}}{a_{12}} = \dfrac{k_0 - p_2^2 J_0}{ka^2} = 0 \\ \mu_{31} = \dfrac{a_{32}}{a_{12}} = -1 + \dfrac{k_0 + ka^2 - p_2^2 J_0}{ka^2} \mu_{21} = -1 \end{cases} \tag{3.5.16}$$

- pentru al III lea mod de vibrație: $p_3^2 = \dfrac{k_0 + 2ka^2}{J_0}$:

$$\begin{cases} \mu_{13} = \dfrac{a_{13}}{a_{13}} = 1 \\ \mu_{23} = \dfrac{a_{23}}{a_{13}} = \dfrac{k_0 - p_3^2 J_0}{ka^2} = -2 \\ \mu_{33} = \dfrac{a_{33}}{a_{13}} = -1 + \dfrac{k_0 + ka^2 - p_3^2 J_0}{ka^2} \mu_{21} = 1 \end{cases} \tag{3.5.17}$$

Soluția generală se obține ca sumă a celor trei moduri proprii de vibrație:

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_{11} + \theta_{12} + \theta_{13} = a_{11} cos(p_1 t - \varphi_1) + a_{12} cos(p_2 t - \varphi_2) + a_{13} cos(p_3 t - \varphi_3) \\ \theta_2 = \theta_{21} + \theta_{22} + \theta_{23} = \mu_{21} a_{11} cos(p_1 t - \varphi_1) + \mu_{22} a_{12} cos(p_2 t - \varphi_2) + \mu_{23} a_{13} cos(p_3 t - \varphi_3) \\ \theta_3 = \theta_{31} + \theta_{32} + \theta_{33} = \mu_{31} a_{11} cos(p_1 t - \varphi_1) + \mu_{32} a_{12} cos(p_2 t - \varphi_2) + \mu_{33} a_{13} cos(p_3 t - \varphi_3) \end{cases} \tag{3.5.18}$$

Dacă se notează $C_1 = a_{11}; \ \ C_2 = a_{12}; \ \ C_3 = a_{13}$ soluția generală (3.1.18) se mai scrie sub forma:

$$\begin{cases} \theta_1 = C_1 \, cos(p_1 t - \varphi_1) + C_2 \, cos(p_2 t - \varphi_2) + C_3 \, cos(p_3 t - \varphi_3) \\ \theta_2 = C_1 \, cos(p_1 t - \varphi_1) \qquad\qquad\qquad\quad - 2C_3 \, cos(p_3 t - \varphi_3) \\ \theta_3 = C_1 \, cos(p_1 t - \varphi_1) - C_2 \, cos(p_2 t - \varphi_2) + C_3 \, cos(p_3 t - \varphi_3) \end{cases} \qquad (3.5.19)$$

Pentru anumite condiții inițiale se obțin mişcări particulare ale sistemului corespunzătoare celor trei moduri proprii de vibrație (fig. 3.5.2.a,b,c):

- **Modul 1** pentru $t=0$: $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \alpha;$ $\quad \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_3 = 0$ (3.5.20)
  înlocuind în (3.5.18) rezultă: $C_1 = \alpha; \ C_2 = 0; \ C_3 = 0; \ \ \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$ şi se obține:

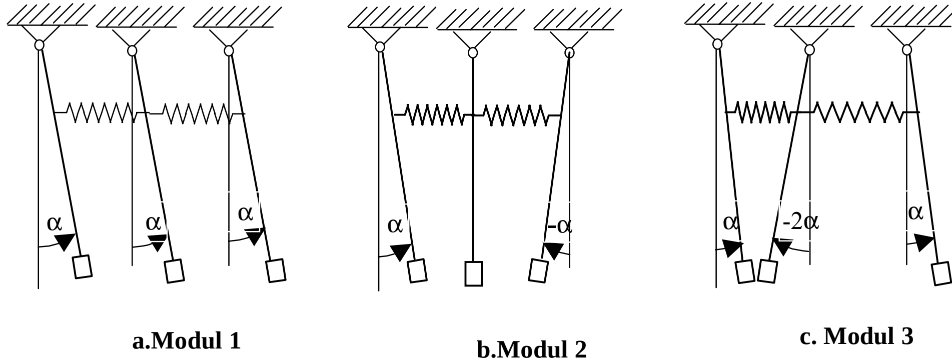
$$\begin{cases} \theta_1 = \alpha \ cos \, p_1 t \\ \theta_2 = \alpha \ cos \, p_1 t \\ \theta_3 = \alpha \ cos \, p_1 t \end{cases} \qquad (3.5.21)$$

- **Modul 2** pentru $t=0$: $\theta_1 = -\theta_3 = \alpha;$ $\quad \theta_2 = 0 \quad \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_2 = 0$ (3.5.22)
  înlocuind în soluția generală (3.5.18) rezultă: $C_1 = C_3 = 0; \ \ C_2 = \alpha; \ \ \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$ deci se obține:

$$\begin{cases} \theta_1 = \alpha \ cos \, p_2 t \\ \theta_2 = 0 \\ \theta_3 = -\alpha \ cos \, p_2 t \end{cases} \qquad (3.5.23)$$

- **Modul 3** pentru $t=0$: $\theta_1 = \theta_3 = \alpha;$ $\quad \theta_2 = -2\alpha \quad \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_2 = 0$ (3.5.24)
  înlocuind în soluția generală (3.5.18) rezultă: $C_1 = C_2 = 0; \ \ C_3 = \alpha; \ \ \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$ deci se obține:

$$\begin{cases} \theta_1 = \alpha \ cos \, p_3 t \\ \theta_2 = -2\alpha \ cos \, p_3 t \\ \theta_3 = \alpha \ cos \, p_3 t \end{cases} \qquad (3.5.25)$$



a.Modul 1 **b.Modul 2** **c. Modul 3**

Fig. 3.5.2

Coordonatele principale se determină din ecuația matriceală:

$$\{q\}=[A]\{\xi\} \tag{3.5.26}$$

unde:

$$\{q\}=\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\end{Bmatrix};\quad \{\xi\}=\begin{Bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{Bmatrix}; \tag{3.5.27}$$

$$[A]=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ \mu_{21}a_{11} & \mu_{22}a_{12} & \mu_{23}a_{13}\\ \mu_{31}a_{11} & \mu_{32}a_{12} & \mu_{33}a_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{11} & 0 & -2a_{13}\\ a_{11} & -a_{12} & a_{13}\end{bmatrix} \tag{3.5.28}$$

Pentru cazul particular al problemei date se scriu:

$$\begin{cases}\theta_1=a_{11}\xi_1+a_{12}\xi_2+a_{13}\xi_3\\ \theta_3=a_{11}\xi_1 \qquad\qquad -2a_{13}\xi_3\\ \theta_3=a_{11}\xi_1-a_{12}\xi_2+a_{13}\xi_3\end{cases}$$

$$\begin{cases}\xi_1=\dfrac{1}{3a_{11}}\left(\theta_1+\theta_2+\theta_3\right)\\ \xi_2=\dfrac{1}{2a_{12}}\left(\theta_1-\theta_3\right)\\ \xi_3=\dfrac{1}{6a_{13}}\left(\theta_1-2\theta_2+\theta_3\right)\end{cases} \tag{3.5.29}$$

Se observă din această relație că expresiile coordonatelor principale au coeficienții condițiilor inițiale corespunzătoare celor trei moduri proprii de vibrație.

3.5.2. Vibrații transversale ale barelor

Se consideră sistemul format dintr-o bară dreaptă de masă neglijabilă, lungime *4L*, rigiditatea la încovoiere *EI* constantă, şi console la capete egale cu *L* situată pe două rezeme A şi B pe care se află montate trei roți de mase $m_1 = m$, $m_2 = 3m$ şi $m_3 = m$ ca în figura 3.5.3. Să se determine pulsațiile şi modurile proprii de vibrație.

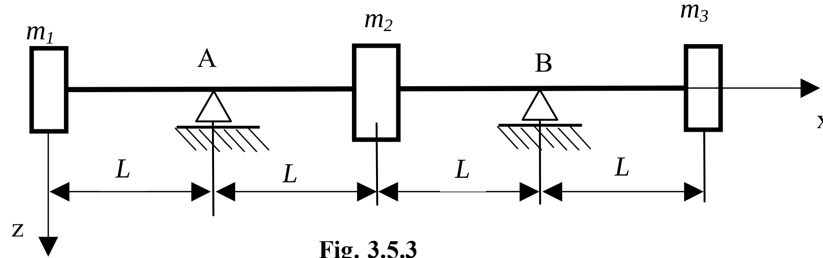


Fig. 3.5.3

Se consideră parametrii mişcării sistemului deplasările roților de mase m_1, m_2 şi m_3 pe direcția *Oz*: x_1, x_2 şi x_3. Se foloseşte metoda coeficienților de influență. Se exprimă deplasările maselor în funcție de forțele de inerție Φ_j şi coeficienții de influență δ_{ij} folosind principiul suprapunerii efectelor:

$$\begin{cases} x_1 = \delta_{11}\Phi_1 + \delta_{12}\Phi_2 + \delta_{13}\Phi_3 \\ x_2 = \delta_{21}\Phi_1 + \delta_{22}\Phi_2 + \delta_{23}\Phi_3 \\ x_3 = \delta_{31}\Phi_1 + \delta_{32}\Phi_2 + \delta_{33}\Phi_3 \end{cases} \tag{3.5.30}$$

unde:

- $\Phi_1 = -m_1\ddot{x}_1; \Phi_2 = -m_2\ddot{x}_2$ *si* $\Phi_3 = -m_3\ddot{x}_3$ sunt forțele de inerție corespunzătoare celor trei mase.
- δ_{11}, δ_{21}, δ_{31} sunt coeficienții de influență (sau deplasările celor trei corpuri) corespunzătoare unei forțe unitare ce acționează în locul corpului 1 (fig.3.5.4.a);
- δ_{12}, δ_{22}, δ_{32} sunt coeficienții de influență corespunzătoare unei forțe unitare ce acționează în locul corpului 2 (fig.3.5.4.b);
- δ_{13}, δ_{23}, δ_{33} sunt coeficienții de influență corespunzătoare unei forțe unitare ce acționează în locul corpului 3 (fig.3.5.4.c):

Înlocuind în relațiile (3.5.30) se obține:

$$\begin{cases} m_1\delta_{11}\ddot{x}_1 + m_2\delta_{12}\ddot{x}_2 + m_3\delta_{13}\ddot{x}_3 + x_1 = 0 \\ m_1\delta_{21}\ddot{x}_1 + m_2\delta_{22}\ddot{x}_2 + m_3\delta_{23}\ddot{x}_3 + x_2 = 0 \\ m_1\delta_{31}\ddot{x}_1 + m_2\delta_{32}\ddot{x}_2 + m_3\delta_{33}\ddot{x}_3 + x_3 = 0 \end{cases} \tag{3.5.31}$$

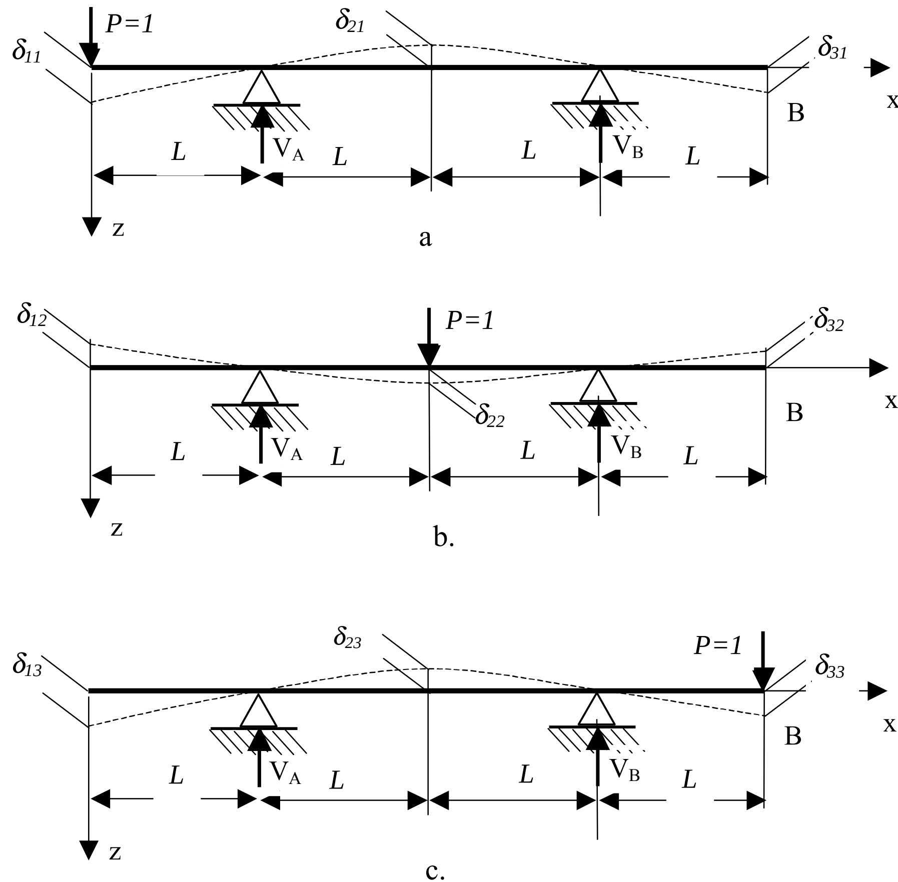


Fig. 3.5.4

Pentru a calcula coeficienții de influență se determină reacțiunile pentru fiecare din cele două cazuri de încărcare:

- cazul 1: $V_{A1} = \frac{3P}{2};\ V_{B1} = -\frac{P}{2}$
- cazul 2: $V_{A2} = \frac{P}{2};\ V_{B2} = \frac{P}{2}$ (3.5.32)
- cazul 3: $V_{A3} = -\frac{P}{2};\ V_{B3} = \frac{3P}{2}$

Cu ajutorul lor se trasează diagramele de momente pentru fiecare din cele trei cazuri (fig.3.5.5).

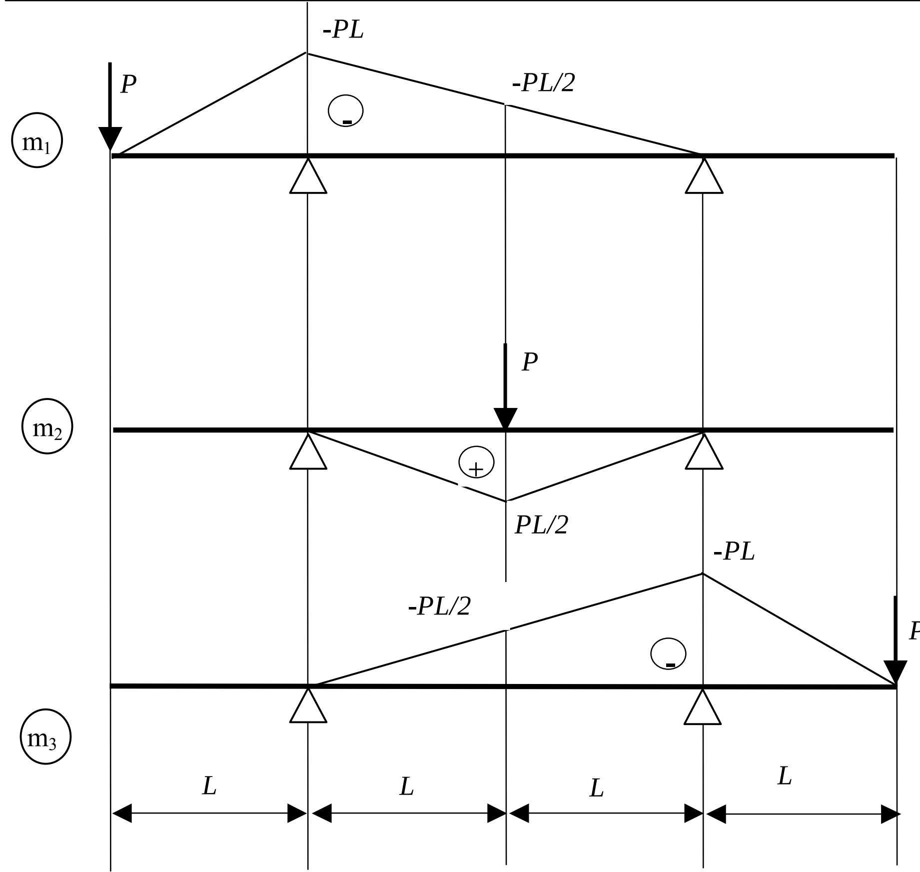


Fig. 3.5.5

Deplasările δ_{11}, $\delta_{21}=\delta_{12}$, δ_{22} se determină cu ajutorul metodei Mohr-Maxwell conform relațiilor:

$$\delta_{11}=\int\frac{m_1 m_1}{EI}dx;\quad \delta_{21}=\delta_{12}=\int\frac{m_1 m_2}{EI}dx;\quad \delta_{22}=\int\frac{m_2 m_2}{EI}dx. \qquad (3.5.33)$$

unde: m_1 este momentul din bară produs de o forță $P=1$ ce acționează în 1

m_2 este momentul din bară produs de o forță $P=1$ ce acționează în 2.

$$\delta_{11}=\frac{L}{6EI}\left[4\left(-\frac{L}{2}\right)\left(-\frac{L}{2}\right)+(-L)\cdot(-L)\right]+\frac{2L}{6EI}\left[(-L)\cdot(-L)+4\left(-\frac{L}{2}\right)\left(-\frac{L}{2}\right)\right]=\frac{L^3}{EI};$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{L}{6EI}\left[4\left(-\frac{3L}{4}\right)\left(\frac{L}{4}\right)+\left(-\frac{L}{2}\right)\cdot\left(\frac{L}{2}\right)\right]+\frac{L}{6EI}\left[\left(-\frac{L}{2}\right)\cdot\left(\frac{L}{2}\right)+4\left(-\frac{L}{4}\right)\left(\frac{L}{4}\right)\right]$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=-\frac{L^3}{4EI};$$

$$\delta_{13}=\delta_{31}=\frac{2L}{6EI}\left[4\left(-\frac{L}{2}\right)\left(-\frac{L}{2}\right)\right]=\frac{L^3}{3EI};$$

$$\delta_{22}=2\frac{L}{6EI}\left[4\left(\frac{L}{4}\right)\left(\frac{L}{4}\right)+\left(\frac{L}{2}\right)\cdot\left(\frac{L}{2}\right)\right]=\frac{L^3}{6EI};$$

$$\delta_{23}=\delta_{32}=\frac{L}{6EI}\left[4\left(-\frac{L}{4}\right)\left(\frac{L}{4}\right)+\left(-\frac{L}{2}\right)\cdot\left(\frac{L}{2}\right)\right]+\frac{L}{6EI}\left[\left(-\frac{L}{2}\right)\cdot\left(\frac{L}{2}\right)+4\left(-\frac{3L}{4}\right)\left(\frac{L}{4}\right)\right]=-\frac{L^3}{4EI};$$

$$\delta_{33}=\frac{2L}{6EI}\left[4\left(-\frac{L}{2}\right)\left(-\frac{L}{2}\right)+(-L)\cdot(-L)\right]+\frac{L}{6EI}\left[(-L)\cdot(-L)+4\left(-\frac{L}{2}\right)\left(-\frac{L}{2}\right)\right]=\frac{L^3}{EI};$$

(3.5.34)

Înlocuind în ecuațiile (3.5.37) valorile obținute se obține:

$$\begin{cases}\frac{mL^3}{EI}\ddot{x}_1-\frac{3}{4}\frac{mL^3}{EI}\ddot{x}_2+\frac{1}{3}\frac{mL^3}{EI}\ddot{x}_3+x_1=0\\ -\frac{1}{4}\frac{mL^3}{EI}\ddot{x}_1+\frac{1}{2}\frac{mL^3}{EI}\ddot{x}_2-\frac{1}{4}\frac{mL^3}{EI}\ddot{x}_3+x_2=0\\ \frac{1}{3}\frac{mL^3}{EI}\ddot{x}_1-\frac{3}{4}\frac{mL^3}{EI}\ddot{x}_2+\frac{mL^3}{EI}\ddot{x}_3+x_3=0\end{cases}\qquad(3.5.35)$$

Notând $\alpha=\frac{mL^3}{EI}$ ecuațiile (3.5.42) se mai scriu:

$$\begin{cases}12\alpha\ddot{x}_1-9\alpha\ddot{x}_2+4\alpha\ddot{x}_3+12x_1=0\\ -3\alpha\ddot{x}_1+6\alpha\ddot{x}_2-3\alpha\ddot{x}_3+12x_2=0\\ 4\alpha\ddot{x}_1-9\alpha\ddot{x}_2+12\alpha\ddot{x}_3+12x_3=0\end{cases}\qquad(3.5.36)$$

Soluțiile ecuațiilor diferențiale (3.5.43) sunt de forma:

$$\begin{cases}x_1=a_1\cos(pt-\varphi)\\ x_2=a_2\cos(pt-\varphi)\\ x_3=a_3\cos(pt-\varphi)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ddot{x}_1=-p^2a_1\cos(pt-\varphi)\\ \ddot{x}_2=-p^2a_2\cos(pt-\varphi)\\ \ddot{x}_3=-p^2a_3\cos(pt-\varphi)\end{cases}\qquad(3.5.37)$$

Înlocuind în sistemul (3.5.27) se obține:

$$\begin{cases}\left(-12\alpha p^2+12\right)a_1+9\alpha p^2a_2-4\alpha p^2a_3=0\\ 3\alpha p^2a_1+\left(-6\alpha p^2+12\right)a_2+3\alpha p^2a_3=0\\ -4\alpha p^2a_1+9\alpha p^2a_2+\left(-12\alpha p^2+12\right)a_3=0\end{cases}\qquad(3.5.38)$$

Ecuația caracteristică a pulsațiilor proprii este:

$$\begin{vmatrix} -12\alpha p^2+12 & 9\alpha p^2 & -4\alpha p^2 \\ 3\alpha p^2 & -6\alpha p^2+12 & 3\alpha p^2 \\ -4\alpha p^2 & 9\alpha p^2 & -12\alpha p^2+12 \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (C_1-C_3) \tag{3.5.39}$$

$$\begin{vmatrix} -8\alpha p^2+12 & 9\alpha p^2 & -4\alpha p^2 \\ 0 & -6\alpha p^2+12 & 3\alpha p^2 \\ 8\alpha p^2-12 & 9\alpha p^2 & -12\alpha p^2+12 \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow 24(2\alpha p^2-3)(7\alpha^2 p^4-44\alpha p^2+24)=0$$

Rădăcinile pozitive ale acestei ecuații sunt pulsațiile proprii:

$$p_1^2=\frac{0{,}603}{\alpha} \Rightarrow p_1=0{,}777\sqrt{\frac{EI}{mL^3}}$$

$$p_2^2=\frac{1{,}5}{\sqrt{\alpha}} \Rightarrow p_2=1{,}225\sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \tag{3.5.40}$$

$$p_3^2=\frac{5{,}682}{\sqrt{\alpha}} \Rightarrow p_3=2{,}384\sqrt{\frac{EI}{mL^3}}$$

Modurile proprii se determină cu ajutorul ecuațiilor :

$$\begin{cases} (-8\alpha p^2+12)a_1 + 9\alpha p^2 a_2 - 4\alpha p^2 a_3 = 0 \\ (-6\alpha p^2+12)a_2 + 3\alpha p^2 a_3 = 0 \\ (8\alpha p^2-12)a_1 + 9\alpha p^2 a_2 + (-12\alpha p^2+12)a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (E_1-E_3) \tag{3.5.41}$$

$$(8\alpha p^2-12)(a_1-a_3)=0 \quad \Rightarrow a_3=a_1;$$

$$a_2=\frac{1}{2}\frac{\alpha p^2}{\alpha p^2-2}a_3 \Rightarrow a_2=\frac{1}{2}\frac{\alpha p^2}{\alpha p^2-2}a_1$$

- **Modul 1 de vibrație** (fig. 3.5.6.a):

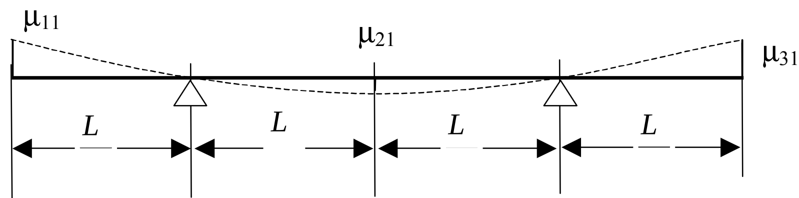
$$\mu_{11}=\mu_{31}=1; \quad \mu_{21}=\frac{a_{21}}{a_{11}}=\frac{1}{2}\frac{\alpha p_1^2}{\alpha p_1^2-2}=-0{,}358 \tag{3.5.42}$$

- **Modul 2 de vibrație** (fig. 3.5.6.b):

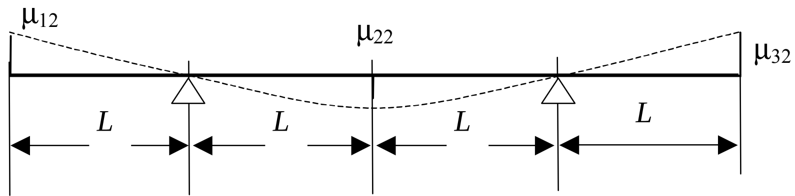
$$\mu_{12}=\mu_{32}=1; \quad \mu_{22}=\frac{a_{22}}{a_{12}}=\frac{1}{2}\frac{\alpha p_2^2}{\alpha p_2^2-2}=-1 \tag{3.5.43}$$

➢ **Modul 3 de vibrație** (fig. 3.5.6.c):

$$\mu_{13} = \mu_{33} = 1; \quad \mu_{23} = \frac{a_{23}}{a_{13}} = \frac{1}{2}\frac{\alpha p_3^2}{\alpha p_3^2 - 2} = 0{,}136 \qquad (3.5.44)$$



a. Modul 1



b. Modul 2

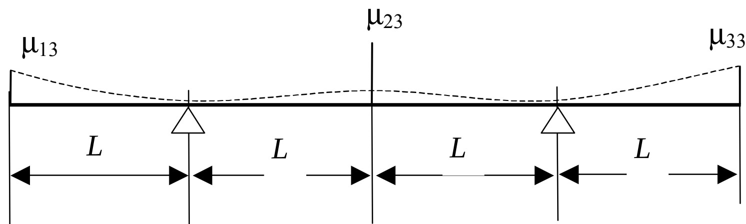


Fig. 3.5.6 **c. Modul 3**

Din forma modurilor proprii de vibrație se observă că simetria sistemului se regăseşte şi în simetria celor trei moduri proprii de vibrație (deoarece $\mu_1 = \mu_3$).

3.5.3. Vibrațiile de răsucire ale arborilor

Se consideră un arbore format din patru tronsoane de lungime L_i şi diametre d_i pe care se află trei volanți (roți dințate au discuri) având momentele de inerție J_i fixat la ambele capete ca în figura 3.5.7. Să se determine pulsațiile proprii şi modurile proprii de vibrație pentru cazul general.

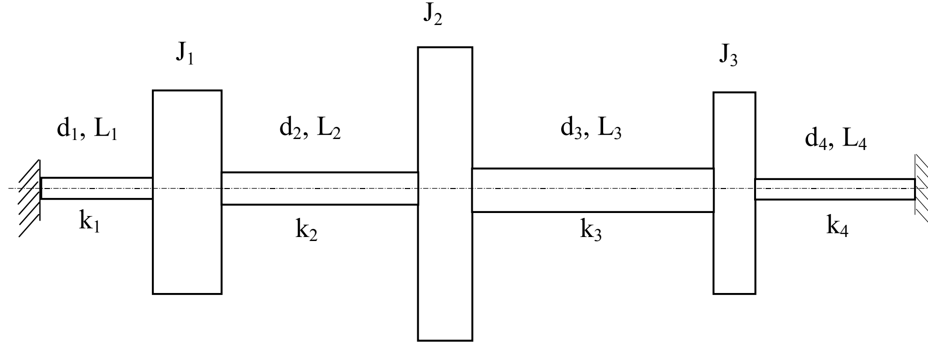


Fig. 3.5.7

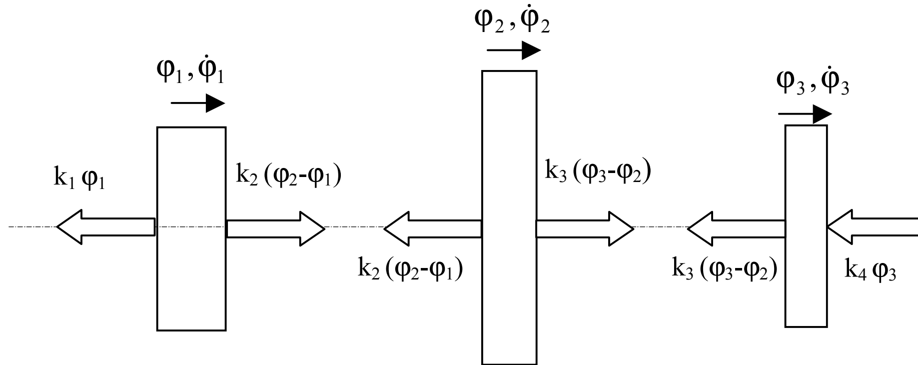


Fig. 3.5.8

Ecuațiile diferențiale ale vibrațiile de răsucire ale arborilor se vor scrie folosind ecuațiile lui Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_i}\right)+\frac{\partial V}{\partial \varphi_i}=0; \qquad i=1,2,3. \tag{3.5.45}$$

unde aşa cum rezultă din figura 3.5.8:

$$\begin{cases} E=\frac{1}{2}J_1\dot{\varphi}_1^2+\frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}_2^2+\frac{1}{2}J_3\dot{\varphi}_3^2 \\ V=\frac{1}{2}k_1\varphi_1^2+\frac{1}{2}k_2(\varphi_2-\varphi_1)^2+\frac{1}{2}k_3(\varphi_3-\varphi_2)^2+\frac{1}{2}k_4\varphi_3^2 \end{cases} \tag{3.5.46}$$

unde constantele elastice sunt:

$$k_1 = \frac{\pi d_1^4 G}{32 L_1};\ k_2 = \frac{\pi d_2^4 G}{32 L_2};\ k_3 = \frac{\pi d_3^4 G}{32 L_3};\ k_4 = \frac{\pi d_4^4 G}{32 L_4}. \qquad (3.5.48)$$

Înlocuind derivatele parțiale se obține sistemul de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} J_1\ddot{\varphi}_1 + k_1\varphi_1 - k_2(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \\ J_2\ddot{\varphi}_2 + k_2(\varphi_2 - \varphi_1) - k_3(\varphi_3 - \varphi_2) = 0 \\ J_1\ddot{\varphi}_3 + k_3(\varphi_3 - \varphi_2) + k_4\varphi_3 = 0 \end{cases} \qquad (3.5.49)$$

Soluțiile vibrațiilor libere sunt de forma:

$$\varphi_i = a_i \cos(pt - \theta_i), \quad i = 1, 2, 3. \qquad (3.5.50)$$

Introducând soluțiile (3.5.50) în (3.5.49) se obține sistemul omogen:

$$\begin{cases} (-J_1p^2 + k_1 + k_2)a_1 - k_2a_2 = 0 \\ -k_2a_1 + (-J_2p^2 + k_2 + k_3)a_2 - k_3a_3 = 0 \\ -k_3a_2 + (-J_2p^2 + k_3 + k_4)a_3 = 0 \end{cases} \qquad (3.5.51)$$

Condiția ca sistemul (3.5.51) să admită soluții nebanale se scrie:

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - J_1p^2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - J_2p^2 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 - J_3p^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.5.52)$$

Se obține ecuația caracteristică de forma:

$$\left(k_1 + k_2 - J_1p^2\right)\left(k_2 + k_3 - J_2p^2\right)\left(k_3 + k_4 - J_3p^2\right) - \\ - k_3^2\left(k_1 + k_2 - J_1p^2\right) - k_2^2\left(k_3 + k_4 - J_3p^2\right) = 0 \qquad (3.5.53)$$

Pentru cazul particular în care arborele este liber la ambele capete *($k_1=k_4=0$)* ecuația (3.5.52) se scrie:

$$\begin{vmatrix} k_2 - J_1p^2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - J_2p^2 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 - J_3p^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.5.54)$$

Însumând liniile 1, 2, 3 se obține determinatul echivalent:

$$\begin{vmatrix} -J_1p^2 & -J_2p^2 & -J_3p^2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - J_2p^2 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 - J_3p^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.5.55)$$

sau dacă se dă factor comun p^2 din prima linie se obține:

$$-p^2\begin{vmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ -k_2 & k_2+k_3-J_2p^2 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3-J_3p^2 \end{vmatrix}=0 \qquad (3.5.56)$$

Prima pulsație proprie este egală cu zero, deci sistemul este de fapt un sistem cu două grade de libertate.

Ecuația (3.5.37) se scrie în acest caz:

$$J_1J_2J_3p^4-p^2\left(k_2J_2J_3+(k_2+k_3)J_1J_3+k_3J_1J_2\right)+k_2k_3(J_1+J_2+J_1)=0$$

$$p^4-p^2\left(\frac{k_2}{J_1}+\frac{k_2+k_3}{J_2}+\frac{k_3}{J_3}\right)+k_2k_3\left(\frac{1}{J_1J_2}+\frac{1}{J_2J_3}+\frac{1}{J_1J_3}\right)=0 \qquad (3.5.57)$$

Dacă se notează:

$$2\alpha=\left(\frac{k_2}{J_1}+\frac{k_2+k_3}{J_2}+\frac{k_3}{J_3}\right); \qquad \beta=k_2k_3\left(\frac{1}{J_1J_2}+\frac{1}{J_2J_3}+\frac{1}{J_1J_3}\right) \qquad (3.5.58)$$

se obțin pulsațiile proprii sub forma:

$$p_{1,2}=\sqrt{\alpha\mp\sqrt{\alpha^2-\beta}} \qquad (3.5.59)$$

Pentru cazul particular din figura 3.5.9 să se determine pulsațiile şi modurile proprii de vibrație. Se cunosc valorile constantei elastice k şi ale momentului de inerție J.

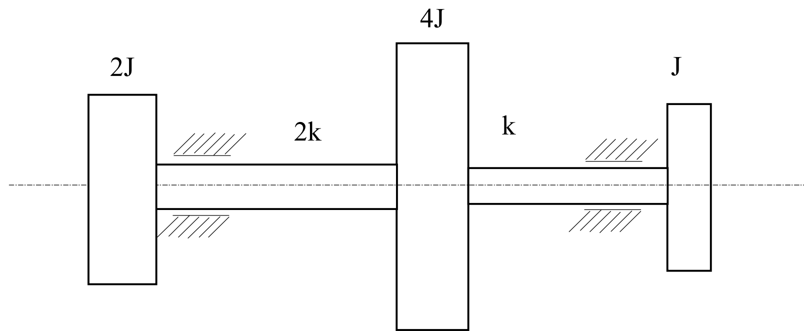


Fig. 3.5.9

Prin identificarea cu sistemul din figura 3.5.7 se obține:

$$k_1=0; \quad k_2=2k; \quad k_3=k; \quad k_3=0; \quad J_1=2J; \quad J_2=4J; \quad J_3=J \qquad (3.5.60)$$

Ecuația pulsațiilor proprii (3.5.57) se scrie:

$$p^4-\frac{11k}{4J}p^2+\frac{7k^2}{4J^2}=0 \qquad (3.5.61)$$

Se obțin pulsațiile proprii: $\begin{cases} p_1=\sqrt{\dfrac{k}{J}}; \quad p_2=1{,}323\sqrt{\dfrac{k}{J}} \end{cases}$ (3.5.62)

Modurile proprii se obțin din prima şi a doua ecuație (3.5.51)

$$a_2 = \frac{-J_1 p^2 + k_1 + k_2}{k_2} a_1 \qquad \Rightarrow \mu_2 = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-Jp^2 + k}{k}$$

$$a_3 = -\frac{k_2}{k_3} a_1 + \frac{-J_2 p^2 + k_2 + k_3}{k_3} a_2 \tag{3.5.63}$$

$$\Rightarrow \mu_3 = \frac{a_3}{a_1} = -2 + \frac{-4Jp^2 + 3k}{k}\frac{a_2}{a_1} = -2 + \frac{-4Jp^2 + 3k}{k}\mu_2$$

- **Modul 1 de vibrație** se obține pentru $p = p_1 = \sqrt{\frac{k}{J}}$ (fig. 3.5.10.a)

$$\mu_{11} = 1$$

$$\mu_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{-Jp_1^2 + k}{k} = 0 \tag{3.5.64}$$

$$\mu_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = -2 + \frac{-4Jp_1^2 + 3k}{k}\mu_{21} = -2$$

- **Modul 2 de vibrație** se obține pentru $p = p_2 = 1{,}323\sqrt{\frac{k}{J}}$ (fig. 3.5.10.b)

$$\mu_{12} = 1$$

$$\mu_{22} = \frac{a_{22}}{a_{12}} = \frac{-Jp_2^2 + k}{k} = -0{,}75 \tag{3.5.65}$$

$$\mu_{32} = \frac{a_{32}}{a_{12}} = -2 + \frac{-4Jp_2^2 + 3k}{k}\mu_{22} = 1$$

Din forma modurilor proprii rezultă că primul mod de vibrație corespunde vibrațiilor în opoziție de fază ale roților 1 şi 3 (roata 2 rămâne in repaus) iar al doilea mod vibrațiilor în fază ale celor două roți (roata 2 în opoziție de fază).

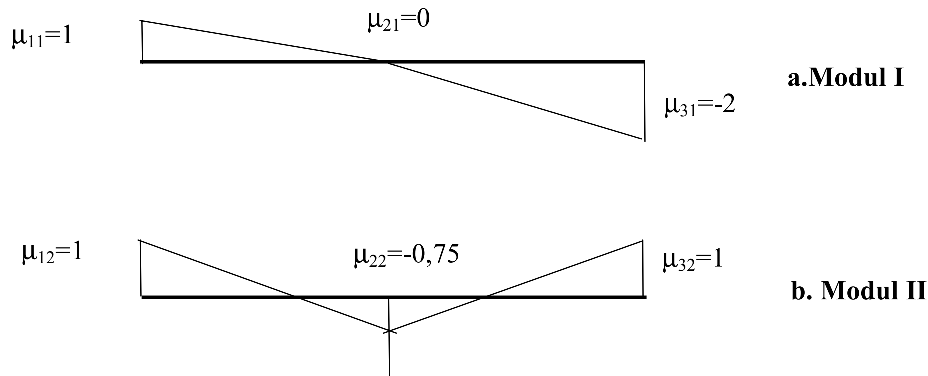


Fig. 3.5.10

3.5.4. Vibrațiile de răsucire ale arborilor angrenajelor

Se consideră angrenajul format din doi arbori de lungimi L_i şi diametre d_i pe care se află montați câte două roți dințate având momentele de inerție J_1 şi J_2 respectiv J'_2 şi J_3 ca în figura 3.5.11. Raportul de transmitere al angrenajului este $i = i_{1-2} = \dfrac{\dot{\varphi}'_2}{\dot{\varphi}_2}$. Să se determine pulsațiile şi modurile proprii de vibrație ale sistemului pentru următoarele valori particulare ale parametrilor:

$J_1=2J$; $J_2=J$; $J'_2=4J$; $J_3=4J$; $k_1=k$; $k_2=4k$; $i=0,5$

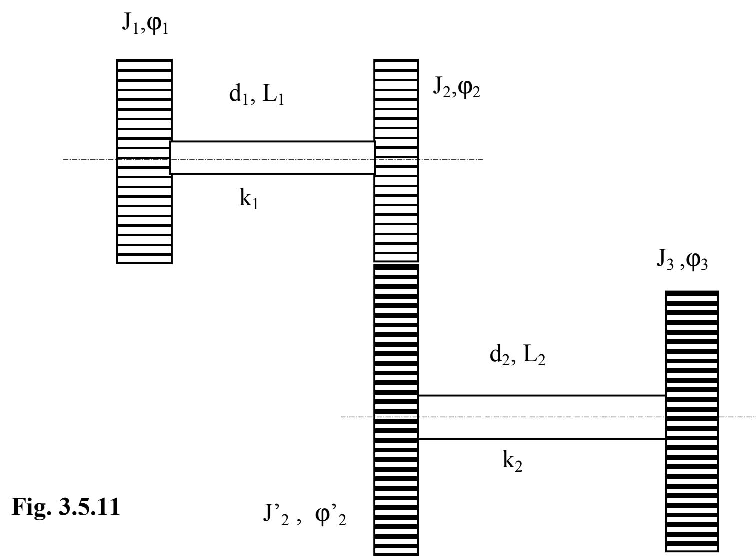


Fig. 3.5.11

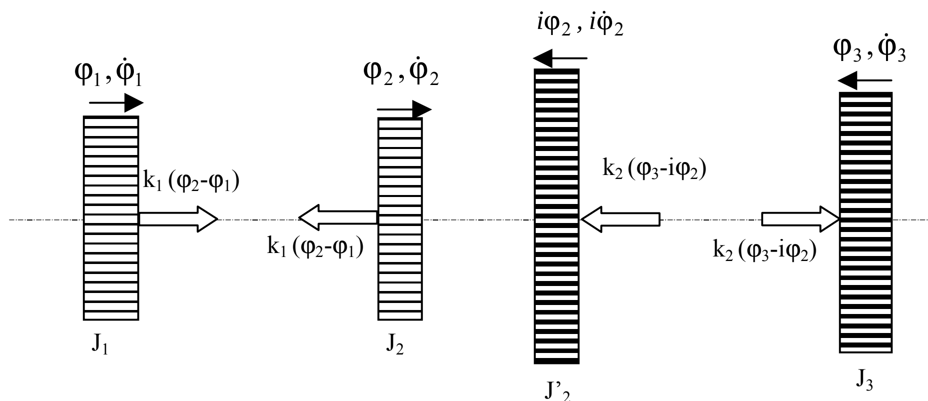


Fig.3.5.12

Acesta este un sistem cu trei grade de libertate. Ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor de răsucire ale celor doi arbori se vor scrie folosind ecuațiile lui Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_i}\right)+\frac{\partial V}{\partial \varphi_i}=0; \qquad i=1,2,3. \tag{3.5.66}$$

unde energia cinetică a sistemului format din cele patru roți şi energia potențială de deformare elastică ale arborilor au expresiile care rezultă din figura 3.5.12:

$$\begin{cases} E=\frac{1}{2}J_1\dot{\varphi}_1^2+\frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}_2^2+\frac{1}{2}J_2'i^2\dot{\varphi}_2^2+\frac{1}{2}J_3\dot{\varphi}_3^2 \\ V=\frac{1}{2}k_1(\varphi_2-\varphi_1)^2+\frac{1}{2}k_2(\varphi_3-i\varphi_2)^2 \end{cases} \tag{3.5.67}$$

unde constantele elastice la răsucire k_1 şi k_2 au expresiile:

$$k_1=\frac{\pi d_1^4 G}{32 L_1};\ k_2=\frac{\pi d_2^4 G}{32 L_2} \tag{3.5.68}$$

Înlocuind derivatele parțiale în sistemul de ecuații (3.5.66) se obține sistemul de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} J_1\ddot{\varphi}_1-k_1(\varphi_2-\varphi_1)=0 \\ \left(J_2+i^2J_2'\right)\ddot{\varphi}_2+k_1(\varphi_2-\varphi_1)-ik_2(\varphi_3-i\varphi_2)=0 \\ J_1\ddot{\varphi}_3+k_2(\varphi_3-i\varphi_2)=0 \end{cases} \tag{3.5.69}$$

Soluțiile vibrațiilor libere sunt de forma:

$$\varphi_i=a_i\cos(pt-\theta_i), \quad i=1,2,3. \tag{3.5.70}$$

Introducând soluțiile (3.5.70) în (3.5.69) se obține sistemul omogen:

$$\begin{cases} (-J_1p^2+k_1)a_1 \quad -k_1a_2 = 0 \\ -k_1a_1+\left[-(J_2+i^2J_2')p^2+k_1+i^2k_2\right]a_2-ik_2a_3=0 \\ \qquad -ik_2a_2+(-J_3p^2+k_2)a_3=0 \end{cases} \tag{3.5.71}$$

Se noteaza $J_2+i^2J_2'=J_0$

Condiția ca sistemul omogen (3.5.71) să admită soluții nebanale se scrie:

$$\begin{vmatrix} k_1-J_1p^2 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+i^2k_2-J_0p^2 & -ik_2 \\ 0 & -ik_2 & k_2-J_3p^2 \end{vmatrix}=0 \tag{3.5.72}$$

Dacă se amplifică ultima linie a determinantului cu i şi se însumează cu celelalte două linii se obține ecuația caracteristică echivalentă cu (3.5.72):

$$\begin{vmatrix} k_1 - J_1 p^2 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + i^2 k_2 - J_0 p^2 & -ik_2 \\ -J_1 p^2 & -J_0 p^2 & -iJ_3 p^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.5.73)$$

Prima pulsație proprie este egală cu zero, deci primul mod de vibrație corespunde unei mişcări de corp rigid (rotație) şi sistemul este sistem cu două grade de libertate. Pentru cazul particular al problemei J_0=2J şi ecuația (3.5.73) se scrie:

$$p^2 \begin{vmatrix} k - 2Jp^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - 2Jp^2 & -k \\ J & 2J & 2J \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -2k + 4Jp^2 & -3k + 4Jp^2 & -2k + 4Jp^2 \\ 2k & 4k - 2Jp^2 & k \\ -2J & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(-3k + 4Jp^2\right)k - \left(4k - 2Jp^2\right)\left(-2k + 4Jp^2\right) = 0 \qquad (3.5.74)$$

Rezultă ecuația de gradul IV: $\quad 8p^4 J^2 - 16p^2 kJ + 5k^2 = 0 \qquad (3.5.75)$

având rădăcinile pozitive:

$$p_{1,2} = \sqrt{\frac{k}{J}\left(1 \mp \sqrt{\frac{3}{8}}\right)} \Leftrightarrow \quad p_1 = 0{,}622\sqrt{\frac{k}{J}}; \quad p_2 = 1{,}270\sqrt{\frac{k}{J}} \qquad (3.5.76)$$

Modurile proprii se obțin din prima şi a doua ecuație (3.5.71)

$$a_2 = \left(\frac{-J_1 p^2}{k_1} + 1\right)a_1 \qquad a_3 = -\frac{k_1}{k_2}a_1 + \frac{-J_0 p^2 + k_1 + i^2 k_2}{ik_2}a_2$$

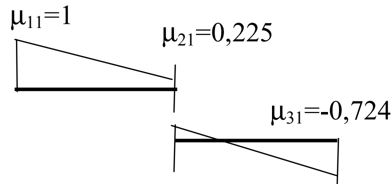
$$\mu_2 = \frac{a_2}{a_1} = \left(1 - \frac{2Jp^2}{k}\right); \quad \mu_3 = \frac{a_3}{a_1} = -1 + 2\mu_2\left(1 - \frac{Jp^2}{k}\right) \qquad (3.5.77)$$

- **Modul 1 de vibrație** se obține pentru $p = p_1 = 0{,}622\sqrt{\frac{k}{J}}$ (fig. 3.5.13.a):

$$\mu_{21} = 0{,}225; \quad \mu_{31} = -0{,}724 \qquad (3.5.78)$$

- **Modul 2 de vibrație** se obține pentru $p = p_2 = 1{,}270\sqrt{\frac{k}{J}}$ (fig. 3.5.13.b):

$$\mu_{22} = -2{,}224; \quad \mu_{32} = 1{,}722 \qquad (3.5.79)$$



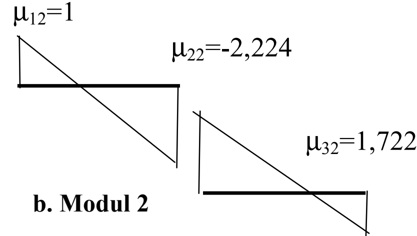


Fig. 3.5.13 **a. Modul 1** **b. Modul 2**

3.6. Moduri complexe de vibrație

În cazul amortizării vâscoase neproporționale nu se poate stabili o relație de ortogonalitate pentru matricea coeficienților de amortizare. Pentru a determina răspunsul unei structuri liniare cu amortizare neproporțională se foloseşte teoria modurilor complexe de vibrație. O formulare generală a problemei se poate face pe baza aşa-numitelor *"matrice lambda"* .

Astfel, în cazul vibrațiilor libere ale unui sistem cu amortizare vâscoasă, înlocuind în sistemul ecuațiilor de mişcare o soluție de forma:

$$\{q(t)\} = \{\psi\} e^{\lambda t}, \qquad (3.6.1)$$

se obține un sistem de N ecuații algebrice omogene, reprezentând o problemă de valori proprii. Ecuația matriceală devine:

$$\left(\lambda^2 [M] + \lambda [C] + [K]\right)\{\psi\} = 0. \qquad (3.6.2)$$

Sistemul de ecuații omogene admite soluții nebanale numai dacă determinantul matricei se anulează:

$$det\left(\lambda^2 [M] + \lambda [C] + [K]\right) = 0. \qquad (3.6.3)$$

Ecuația caracteristică (3.6.3) este o ecuație algebrică de gradul $2N$ în λ.

Rădăcinile ecuației caracteristice (valorile proprii) pot fi:

- rădăcini reale negative care corespund unui sistem de amortizare supracritică, având o mişcare aperiodică de amplitudine descrescătoare;
- rădăcini pur imaginare şi conjugate care corespund sistemelor neamortizate;
- rădăcini complexe conjugate cu parte reală negativă care corespund sistemelor cu amortizare subcritică având o mişcare periodică cu amplitudinea descrescătoare

Fiecărei valori proprii λ_r îi corespunde un vector modal $\left\{\psi^{(r)}\right\}$ cu elemente complexe, definind un *mod complex de vibrație*. Valorile proprii fiind complex-conjugate, rezultă că vectorii modali trebuie să fie de asemenea complex-conjugați. O pereche de vectori modali complex-conjugați înmulțiți cu funcțiile exponențiale dependente de timp pot fi combinați pentru a rezulta o funcție reală ce descrie o mişcare oscilatorie amortizată.

Soluția generală a ecuației diferențiale omogene (3.6.1) se poate scrie ca o combinație liniară a soluțiilor de forma $\left\{\psi^{(r)}\right\} e^{\lambda_r t}$ astfel:

$$\{q(t)\} = [\Psi]\left\{\gamma e^{\lambda_r t}\right\} \qquad (3.6.4)$$

unde s-a notat cu $[\Psi]$ matricea modală formată din vectorii proprii:

$$[\Psi] = \left[\left\{\psi^{(1)}\right\}\left\{\psi^{(2)}\right\}\left\{\psi^{(3)}\right\}..\left\{\psi^{(2N)}\right\}\right] \qquad (3.6.5)$$

iar $\left\{\gamma e^{\lambda_r t}\right\}$ este matricea coloană ce joacă rolul de coordonate principale amortizate.

Un mod complex de vibrație *are caracterul unei unde progresive în lungul structurii* (spre deosebire de caracterul de *undă staționară* al modurilor reale clasice de vibrație) deoarece fiecare element complex al vectorilor modali are alt unghi de fază, deci coordonata corespunzătoare atinge elongația maximă la un moment diferit de celelalte. Modurile complexe sunt mai dificil de măsurat experimental, deoarece mişcarea *deşi este sincronă nu este sinfazică. Nodurile de vibrație* (puntele de amplitudine zero) îşi schimbă continuu poziția în timpul unui ciclu de vibrație, dar poziția în care coordonatele ating valoarea maximă rămâne aceeaşi pentru fiecare ciclu, astfel încât la începutul unui ciclu pozițiile relative sunt aceleaşi ca la începutul circuitului anterior.

În cazul vibrațiilor libere ale sistemelor amortizate amplitudinile descresc exponențial de la un ciclu la altul, spre deosebire de sistemele neamortizate, la care amplitudinile nu scad în timp iar modurile de vibrație sunt staționare.

3.6.1. Vibrații forțate cu amortizare vâscoasă

Deşi teoria generală a vibrațiilor sistemelor cu amortizare neprporțională se poate expune folosind transformata Laplace şi calculul cu matrice lambda, în continuare se utilizează metoda propusă de Frazer, Duncan şi Collar.

Fie ecuația matriceală a vibrațiilor forțate ale unui sistem cu amortizare vâscoasă este:

$$[M]\{\ddot{q}\}+[C]\{\dot{q}\}+[K]\{q\}=\{f\}, \tag{3.6.6}$$

În continuare se consideră că matricea amortizării [C] este simetrică.

Adăugând ecuației (3.6.6) identitatea

$$[M]\{\dot{q}\}-[M]\{\dot{q}\}=\{0\}, \tag{3.6.7}$$

se obține ecuația matriceală de ordinul I:

$$[U]\{\dot{x}\}+[V]\{x\}=\{S\}, \tag{3.6.8}$$

în care:

$$[U]=\begin{bmatrix}[0] & [M]\\ [M] & [C]\end{bmatrix},\quad [V]=\begin{bmatrix}-[M] & [0]\\ [0] & [K]\end{bmatrix}, \tag{3.6.9}$$

sunt matrice pătrate, reale şi simetrice de ordinul *2N,* iar matricele coloană sunt matrice cu 2N elemente:

$$\{x\}=\begin{Bmatrix}\{\dot{q}\}\\ \{q\}\end{Bmatrix},\quad \{S\}=\begin{Bmatrix}\{0\}\\ \{f\}\end{Bmatrix} \tag{3.6.10}$$

În cazul vibrațiilor libere ecuația (3.6.58) se scrie:

$$[U]\{\dot{x}\}+[V]\{x\}=\{0\}. \tag{3.6.11}$$

Aceasta are soluții de forma:

$$\{x\}=\{y\}e^{\sigma t} \tag{3.6.12}$$

unde $\{y\}$ este un vector cu *2N* elemente constante.

Înlocuind (3.6.12) în (3.6.8) se ajunge la problema de valori proprii:

$$\sigma[U]\{y\}+[V]\{y\}=\{0\}, \tag{3.6.13}$$

sau: $$(\sigma[U]+[V])\{y\}=\{0\}$$

Dacă matricea $[V]$ este nesingulară, se poate înmulți ecuația (3.6.13) la stânga cu $[V]^{-1}$ rezultând:

$$\left([D]-\frac{1}{\sigma}[I]\right)\{y\}=0 \tag{3.6.14}$$

unde $[D]$ joacă rolul unei matrice dinamice:

$$[D]=-[V]^{-1}[U]=\begin{bmatrix}[0] & [I] \\ -[K]^{-1}[M] & -[K]^{-1}[C]\end{bmatrix} \tag{3.6.15}$$

Sistemul (3.6.14) are soluții nebanale dacă

$$det\left([D]-\frac{1}{\sigma}[I]\right)=0 \tag{3.6.16}$$

Soluțiile ecuației caracteristice (3.6.66) de gradul *2N* în $(1/\sigma_r)$ sunt tocmai valorile proprii $(1/\sigma_r)$ ale problemei.

Se face presupunerea că cele 2N valori proprii sunt distincte. Fiecărei valori proprii $(1/\sigma_r)$ îi corespunde un vector propriu $\{y^{(r)}\}$ cu *2N* elemente şi satisface ecuația:

$$\left([D]-\frac{1}{\sigma_r}[I]\right)\{y_r\}=\{0\}. \tag{3.6.17}$$

care ținând seama de (3.6.65) se mai scrie:

$$(\sigma_r[U]+[V])\{y^{(r)}\}=0 \tag{3.6.18}$$

Între vectorii proprii $\{y^{(r)}\}$ şi matricele $[U]$ şi $[V]$ sunt valabile următoarele relații de ortogonalitate:

$$\begin{aligned}\{y^{(s)}\}^T[U]\{y^{(r)}\}&=0 \\ \{y^{(s)}\}^T[V]\{y^{(r)}\}&=0 \qquad s\neq r\end{aligned} \tag{3.6.19}$$

Dacă se notează:

$$\begin{aligned}\{y^{(r)}\}^T[U]\{y^{(r)}\}&=u_r \\ \{y^{(r)}\}^T[V]\{y^{(r)}\}&=v_r\end{aligned} \tag{3.6.20}$$

înmulțind la stânga ecuația (3.6.18) cu $\{y^{(r)}\}^T$ se obțin valorile proprii:

$$\sigma_r u_r+v_r=0 \quad\Rightarrow\quad \sigma_r=-\frac{v_r}{u_r} \tag{3.6.21}$$

Vectorii proprii au forma matricelor coloane cu *2N* elemente:

$$\left\{y^{(r)}\right\} = \begin{Bmatrix} \sigma_r \left\{q^{(r)}\right\} \\ \left\{q^{(r)}\right\} \end{Bmatrix}, \tag{3.6.22}$$

La sisteme stabile, pentru moduri cu amortizare subcritică, pulsația σ_r este complexă şi se exprimă de obicei sub forma

$$\sigma_r = -\alpha_r + i\beta_r \tag{3.6.23}$$

unde α_r este un *factor de amortizare* iar β_r este *pseudopulsația.* Se mai definesc:

- *raportul de amortizare:* $$\zeta_r = \frac{2\alpha_r}{p_r} = \frac{2\alpha_r}{\sqrt{\alpha_r^2 + \beta_r^2}} \tag{3.6.24}$$
- *pulsația de rezonanță:* $$p_r = \sqrt{\alpha_r^2 + \beta_r^2}. \tag{3.6.25}$$

În cazul vibrațiilor forțate cu amortizare vâscoasă în vederea decuplării ecuațiilor (3.6.8), se foloseşte transformarea liniară

$$\{x\} = [y]\{\xi\} = \sum_{r=1}^{2N} \left\{y^{(r)}\right\}\xi_r \tag{3.6.26}$$

unde ξ_r este coordonata principală corespunzătoare modului *r*, iar $[y]$ este matricea având drept coloane vectorii proprii:

$$[y] = \left[\left\{y^{(1)}\right\}\left\{y^{(2)}\right\}\ldots\left\{y^{(2N)}\right\}\right] \tag{3.6.27}$$

Înlocuind (3.6.26) în ecuațiile (3.6.8), înmulțind la stânga cu $[y]^T$ şi ținând seama de (3.6.20) rezultă sistemul de ecuații decuplate:

$$[u]^D\{\dot{\xi}\} + [v]^D\{\xi\} = \{R\} \tag{3.6.28}$$

în care s-a notat:

$$\begin{aligned} &[y]^T[U][y] = [u]^D = diag[u_r] \\ &[y]^T[V][y] = [v]^D = diag[v_r] \\ &[y]^T[S] = \{R\} \end{aligned} \tag{3.6.29}$$

Ecuația *r* a sistemului (3.6.28) se scrie:

$$u_r\dot{\xi}_r + v_r\xi_r = R_r \tag{3.6.30}$$

sau folosind (3.6.21) se obține:

$$\dot{\xi}_r - \sigma_r\xi_r = \frac{R_r}{u_r} \tag{3.6.31}$$

Presupunând condițiile inițiale nule, soluția ecuației diferențiale (3.6.31) se poate scrie sub forma integralei de convoluție:

$$\xi_r(t) = \frac{1}{u_r}\int_0^t R_r(\tau)e^{\sigma_r(t-\tau)}d\tau \tag{3.6.32}$$

În cazul unei excitații armonice, considerând regimul staționar:

$$\{f(t)\}=\{\hat{f}\}e^{i\omega t}, \qquad \{q(t)\}=\{\tilde{q}\}e^{i\omega t}, \tag{3.6.33}$$

dacă se notează:

$$\{x(t)\}=\{\tilde{x}\}e^{i\omega t}, \qquad \{S(t)\}=\{\hat{S}\}e^{i\omega t}, \tag{3.6.34}$$
$$\{\xi(t)\}=\{\tilde{\xi}\}e^{i\omega t}, \qquad \{R(t)\}=\{\tilde{R}\}e^{i\omega t},$$

înlocuind în soluțiile de forma (3.6.34) în ecuația (3.6.31), rezultă:

$$\tilde{\xi}_r=\frac{\tilde{R}_r}{u_r(i\omega-\sigma_r)} \tag{3.6.35}$$

sau folosind (3.6.29) rezultă:

$$\tilde{\xi}_r=\frac{\{y^{(r)}\}^T\{\hat{S}\}}{u_r(i\omega-\sigma_r)}. \tag{3.6.36}$$

Înlocuind (3.6.36) în (3.6.26) se obține

$$\{x\}=\sum_{r=1}^{2N}\frac{\{y^{(r)}\}\{y^{(r)}\}^T}{u_r(i\omega-\sigma_r)}\{\hat{S}\} \tag{3.6.37}$$

Din (3.6.10) şi pe baza notațiilor (3.6.33) şi (3.6.34) rezultă:

$$\begin{Bmatrix} i\omega\{\tilde{q}\} \\ \{\tilde{q}\} \end{Bmatrix}=\sum_{r=1}^{2N}\frac{\{y^{(r)}\}\{y^{(r)}\}^T}{u_r(i\omega-\sigma_r)}\begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{\hat{f}\} \end{Bmatrix}, \tag{3.6.38}$$

sau

$$\begin{Bmatrix} i\omega\{\tilde{q}\} \\ \{\tilde{q}\} \end{Bmatrix}=\sum_{r=1}^{2N}\frac{\{y^{(r)}\}^T}{u_r(i\omega-\sigma_r)}\begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{\hat{f}\} \end{Bmatrix}\{y^{(r)}\} \tag{3.6.39}$$

iar pe baza relației (3.6.39) se obține

$$\{\tilde{q}\}=\sum_{r=1}^{2N}\frac{\{q^{(r)}\}^T\{\hat{f}\}}{u_r(i\omega-\sigma_r)}\{q^{(r)}\} \tag{3.6.40}$$

În cazul excitației într-un singur punct l, receptanța de transfer în punctul j are expresia :

$$\overline{\alpha}_{jl}=\frac{\tilde{q}_j}{\hat{f}_l}=\sum_{r=1}^{2N}\frac{q_l^{(r)}q_j^{(r)}}{u_r(i\omega-\sigma_r)}=\sum_{r=1}^{2N}\frac{\delta_{jl}^{(r)}}{u_r(i\omega-\sigma_r)} \tag{3.6.41}$$

unde s-a notat:

$$\delta^{(r)}{}_{jl}=\frac{q_l^{\,r}q_j^{\,r}}{u_r}. \tag{3.6.42}$$

Având în vedere că la sisteme amortizate subcritic valorile proprii σ_r şi vectorii modali $\{q^{(r)}\}$ apar în perechi complex-conjugate, expresia (3.6.41) se mai scrie ca o sumă de N termeni complex conjugați:

$$\overline{\alpha}_{jl}=\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{\delta_{jl}^{(r)}}{i\omega-\sigma_r}-\frac{\delta^*{}_{jl}^{(r)}}{i\omega-\sigma^*{}_r}\right) \tag{3.6.43}$$

3.6.2. Vibrații forțate cu amortizare histeretică

Ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor forțate cu amortizare histeretică pentru un sistem liniar cu *N* grade de libertate se pot scrie matriceal:

$$[M]\{\ddot{q}\}+\frac{1}{\omega}[H]\{\dot{q}\}+[K]\{q\}=\{f\}, \qquad (3.6.44)$$

unde [*H*] este matricea coeficienților de amortizare histeretică .

Dacă se scriu forțele armonice şi soluțiile sub forma:

$$\{f(t)\}=\{\hat{f}\}e^{i\omega t}, \qquad \{q(t)\}=\{\tilde{q}\}e^{i\omega t}, \qquad (3.6.45)$$

unde: $\{\hat{f}\}$ vectorul real al amplitudinilor excitației şi $\{\tilde{q}\}$ este vectorul amplitudinilor complexe ale deplasărilor, se obține:

$$\left(-\omega^2[M]+[K+iH]\right)\{\tilde{q}\}=\{\hat{f}\}, \qquad (3.6.46)$$

matricele [*M*] si [*K*+*iH*] sunt simetrice de ordinul *N*.

Se notează $\omega^2=\lambda$ şi se consideră ecuația omogenă asociată ecuației (3.6.46):

$$\left([K+iH]-\lambda[M]\right)\{\tilde{q}\}=\{0\}. \qquad (3.6.47)$$

Aceasta are soluții nebanale dacă:

$$det\left([K+iH]-\lambda[M]\right)=\{0\}. \qquad (3.6.48)$$

Se poate demonstra că există un sistem de *N* valori proprii $\overline{\lambda}_r$ care sunt soluții complexe ale ecuației (3.6.48) şi *N* vectori proprii complecşi asociați $\{w^{(r)}\}$ care satisfac ecuația omogenă:

$$\left([K+iH]-\overline{\lambda}_r[M]\right)\{w^{(r)}\}=0 \qquad (3.6.49)$$

În continuare, se presupune că cele *N* valori proprii λ_r sunt distincte, iar vectorii modali corespunzători sunt liniar independenți.

Vectorii modali $\{w^{(r)}\}$satisfac condițiile de ortogonalitate

$$\begin{aligned}&\{w^{(s)}\}^T[M]\{w^{(r)}\}=0\\&\{w^{(s)}\}^T[K+iH]\{w^{(r)}\}=0 \qquad r\neq s\end{aligned} \qquad (3.6.50)$$

şi relațiile:

$$\begin{aligned}&\{w^{(s)}\}^T[M]\{w^{(r)}\}=\overline{M}_r\\&\{w^{(s)}\}^T[K+iH]\{w^{(r)}\}=\overline{K}_r \qquad r=s\end{aligned} \qquad (3.6.51)$$

unde $\overline{M}_r$ şi $\overline{K}_r$ sunt masa modală respectiv constanta elastică modală complexă.

Deoarece cei *N* vectori proprii $\{w^{(r)}\}$sunt liniar independenți, orice vector $\{\tilde{q}\}$ poate fi exprimat ca o combinație liniară de forma:

$$\{\tilde{q}\}=\sum_{r=1}^{N}\{w^{(r)}\}\xi_r=[w]\{\xi\} \qquad (3.6.52)$$

Înlocuind (3.6.52) în ecuația (3.6.47) şi folosind relațiile (3.6.10) şi (3.6.51) rezultă:

$$\overline{\xi}_r = \sum_{r=1}^{N} \frac{\left\{w^{(r)}\right\}^T \left\{\hat{f}\right\}}{\overline{K}_r - \omega^2 \overline{M}_r} \tag{3.6.53}$$

Prin urmare, soluția ecuației (3.6.44) este :

$$\left\{\widetilde{q}\right\} = \sum_{r=1}^{N} \frac{\left\{w^{(r)}\right\}^T \left\{\hat{f}\right\}\left\{w^{(r)}\right\}}{\overline{M}_r\left(\overline{\lambda}_r - \omega^2\right)}. \tag{3.6.54}$$

unde: $$\overline{\lambda}_r = \frac{\overline{K}_r}{\overline{M}_r} = \omega_r^{\,2}\left(1 + ig_r\right) \tag{3.6.55}$$

ω_r este pulsația de rezonanță

g_r - factorul de amortizare histeretică corespunzător modului r.

În cazul excitației într-un singur punct, *receptanța de transfer complexă* are expresia:

$$\overline{\alpha}_{jl} = \frac{\widetilde{q}_j}{\hat{f}_l} = \sum_{r=1}^{N} \frac{w_l^{(r)} w_j^{(r)}}{\overline{M}_r \omega_r^{\,2}\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_r^{\,2}} + ig_r\right)} \tag{3.6.56}$$

Dacă se notează:

$$\frac{w_l^{(r)} w_j^{(r)}}{\overline{M}_r \omega_r^{\,2}} = x_j^{(r)} + iy_j^{(r)}, \tag{3.6.57}$$

atunci expresia (3.6.56) devine:

$$\overline{\alpha}_{jl} = \frac{\widetilde{q}_j}{\hat{f}_l} = \sum_{r=1}^{N} \frac{x_j^{(r)} + iy_j^{(r)}}{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{p_r^{\,2}} + ig_r\right)}$$

$$\overline{\alpha}_{jl} = \sum_{r=1}^{N} \frac{x_j^{(r)} + iy_j^{(r)}}{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{p_r^{\,2}} + ig_r\right)} e^{-i\psi_r} \sin\psi_r \tag{3.6.58}$$

unde: $$\psi_r = arctg \frac{g_r}{1 - \dfrac{\omega^2}{p_r^{\,2}}}.$$

3.7. Metode de determinatre a pulsațiilor şi modurilor proprii de vibrație

3.7.1. Metode exacte

Ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor libere ale unui sistem conservativ cu N grade de libertate în raport cu coordonatele generalizate $q_1, q_2.., q_N$ sunt de forma:

$$[M]\{\ddot{q}\}+[K]\{q\}=\{0\} \qquad (3.7.1)$$

Soluțiile sistemului (3.7.1) sunt de forma:

$$\{q\}=\{\psi\}cos\ pt \qquad (3.7.2)$$

Înlocuind soluția (3.7.2) în (3.7.1), rezultă ecuațiile matriceale:

$$\left([K]-p^2[M]\right)\{\psi\}=\{0\} \qquad (3.7.3)$$

Sistemul (3.1.3) are soluții nenule numai dacă :

$$det\left([K]-p^2[M]\right)=0 \qquad (3.7.4)$$

Aceasta este o ecuație algebrică de gradul N în p^2 ale cărei rădăcini $p_1^2, p_2^2,..., p_N^2$ se numesc *valori proprii* iar mărimile $p_1, p_2,..., p_N$ se numesc *pulsații proprii*. Fiecărei valori proprii p_r^2 îi corespunde un *vector propriu* $\{\psi^{(r)}\}$ care satisface ecuația

$$\left([K]-p_r^2[M]\right)\{\psi^{(r)}\}=\{0\} \qquad (3.7.5)$$

sau dacă se înmulțeşte la stânga cu matricea $[M]^{-1}$ se obține forma echivalentă:

$$\left([M]^{-1}[K]-p_r^2[I]\right)\{\psi^{(r)}\}=\{0\} \iff [M]^{-1}[K]\{\psi^{(r)}\}=p^2\{\psi^{(r)}\} \qquad (3.7.6)$$

care reprezintă o problemă de valori şi vectori proprii.

Sistemul de ecuații (3.7.6) admite soluții nebanale dacă:

$$det([M]^{-1}[K]-p^2[I]_n)=0 \iff det([D]-\lambda[I]_n)=0 \qquad (3.7.7)$$

unde s-a notat cu [D] matricea dinamică a sistemului: $[D]=[M]^{-1}[K]$ şi $\lambda=p^2$.

Detreminantul caracteristic al matricei [D] se notează cu:

$$D(\lambda)=det([D]-\lambda I_n)=\begin{vmatrix} d_{11}-\lambda & d_{12} & ... & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22}-\lambda & ... & d_{2n} \\ . & . & ... & . \\ d_{n1} & d_{n2} & ... & d_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \qquad (3.7.8)$$

a. Metoda Krîlov

Această metodă se datorează lui Krîlov şi constă în următoarele etape:

1. se alege un vector inițial $\{Y\}^{(0)}$
2. se calculează prin iterație vectorii lui Krîlov conform relațiilor:

$$\begin{aligned} &\{Y\}^{(1)}=[D]\{Y\}^{(0)};\\ &\{Y\}^{(2)}=[D]\{Y\}^{(1)},\\ &\{Y\}^{(3)}=[D]\{Y\}^{(2)},\\ &.........................\\ &\{Y\}^{(n)}=[D]\{Y\}^{(n-1)} \end{aligned} \qquad (3.7.9)$$

3. se rezolvă sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{bmatrix} y_1^{(n-1)} & y_1^{(n-2)} & . & . & y_1^{(1)} & y_1^{(0)} \\ y_2^{(n-1)} & y_2^{(n-2)} & . & . & y_2^{(1)} & y_2^{(0)} \\ y_3^{(n-1)} & y_3^{(n-2)} & . & . & y_3^{(1)} & y_3^{(0)} \\ . & . & . & . & . & . \\ y_n^{(n-1)} & y_n^{(n-2)} & . & . & y_n^{(1)} & y_n^{(0)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ ... \\ p_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1^{(n)} \\ y_2^{(n)} \\ y_3^{(n)} \\ ... \\ y_n^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (3.7.10)$$

4. Cu ajutorul coeficienților $p_1, p_2, ..., p_n$ se obține polinomul caracteristic:

$$D(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + ... + p_n \quad (3.7.11)$$

ale cărui rădăcini sunt tocmai valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ... \lambda_n$ ale matricii $[D]$.

Determinantul caracteristic al matricii $[D]$ se scrie sub forma:

$$D(\lambda) = det(\lambda[I]_n - [D]) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + ... + p_n \quad (3.7.12)$$

Se poate demonstra (identitatrea Hamilton-Cayley) că matricea $[D]$ anulează polinomul său caracteristic, adică există relația matriceală:

$$[D]^n + p_1[D]^{n-1} + p_2[D]^{n-2} + ... + p_n[I]_n = 0 \quad (3.7.13)$$

Se consideră un vector oarecare $\{Y\}^{(0)}$ cu care se multiplică ecuația (3.7.13):

$$[D]^n\{Y\}^{(0)} + p_1[D]^{n-1}\{Y\}^{(0)} + p_2[D]^{n-2}\{Y\}^{(0)} + ... + p_n\{Y\}^{(0)} = 0 \quad (3.7.14)$$

Dacă se notează:

$$[D]^k\{Y\}^{(0)} = \{Y\}^{(k)} \quad (3.7.15)$$

Relația (3.7.14) se mai scrie sub forma:

$$p_1\{Y\}^{(n-1)} + p_2\{Y\}^{(n-3)} + ... + p_n\{Y\}^{(0)} = -\{Y\}^{(n)} \quad (3.7.16)$$

Ecuația (3.7.16) este echivalentă cu sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} p_1 y_1^{(n-1)} + p_2 y_1^{(n-2)} + p_3 y_1^{(n-3)} + ... + p_n y_1^{(0)} = -y_1^{(n)} \\ p_1 y_2^{(n-1)} + p_2 y_2^{(n-2)} + p_3 y_2^{(n-3)} + ... + p_n y_2^{(0)} = -y_2^{(n)} \\ .... \\ p_1 y_n^{(n-1)} + p_2 y_n^{(n-2)} + p_3 y_n^{(n-3)} + ... + p_n y_n^{(0)} = -y_n^{(n)} \end{cases} \quad (3.7.17)$$

Acesta este un sistem liniar având ca necunoscute coeficienții $p_1, p_2, ..., p_n$.

Coeficienții $y_i^{(k)}$ sunt elementele matricelor coloană (3.7.9) care se determină iterativ plecând de la un vector arbitrar inițial $\{Y\}^{(0)}$:

$$\begin{aligned} &\{Y\}^{(1)} = [D]\{Y\}^{(0)}; \\ &\{Y\}^{(2)} = [D]\{Y\}^{(1)} = [D]^2\{Y\}^{(0)}; \\ &... \\ &\{Y\}^{(n)} = [D]\{Y\}^{(n-1)} = [D]^k\{Y\}^{(0)} \end{aligned} \quad (3.7.18)$$

sau care se mai scriu:

$$\begin{cases} y_i^{(1)} = d_{i1}y_1^{(0)} + d_{i2}y_1^{(0)} + d_{i3}y_1^{(0)} + \ldots + d_{in}y_1^{(0)} \\ y_i^{(2)} = a_{i1}y_1^{(1)} + a_{i2}y_1^{(1)} + a_{i3}y_1^{(1)} + \ldots + d_{in}y_1^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_i^{(n)} = d_{i1}y_1^{(n-1)} + d_{i2}y_1^{(n-1)} + d_{i3}y_1^{(n-1)} + \ldots + d_{in}y_1^{(n-1)} \end{cases} \tag{3.7.19}$$

$$i = 1,2,3,\ldots,n$$

Se consideră că rădăcinile polinomului caracteristic calculate conform algoritmului de mai sus sunt distincte $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \ldots \neq \lambda_n$.

Dacă vectorul inițial $\{Y\}^{(0)}$ se scrie sub forma unei combinații liniare a vectori proprii $\{\psi\}^{(i)}$ ai matricei [D]

$$\{Y\}^{0)} = \sum_{i=1}^{n} C_i \{\psi\}^{(i)} \tag{3.7.20}$$

ținând seama de proprietățile vectorilor proprii:

$$\begin{cases} [D]\{\psi\}^{(i)} = \lambda_i \{\psi\}^{(i)} \\ [D]^2 \{\psi\}^{(i)} = \lambda_i^2 \{\psi\}^{(i)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [D]^n \{\psi\}^{(i)} = \lambda_i^n \{\psi\}^{(i)} \end{cases} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{3.7.21}$$

rezultă următorul sistem liniar de ecuații matriceale :

$$\begin{cases} \{Y\}^{(0)} = C_1\{\psi\}^{(1)} + C_2\{\psi\}^{(2)} + \ldots + C_n\{\psi\}^{(n)} \\ \{Y\}^{(1)} = C_1\lambda_1\{\psi\}^{(1)} + C_2\lambda_2\{\psi\}^{(2)} + \ldots + C_n\lambda_n\{\psi\}^{(n)} \\ \{Y\}^{(2)} = C_1\lambda_1^2\{\psi\}^{(1)} + C_2\lambda_2^2\{\psi\}^{(2)} + \ldots + C_n\lambda_n^2\{\psi\}^{(n)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \{Y\}^{(n-1)} = C_1\lambda_1^{n-1}\{\psi\}^{(1)} + C_2\lambda_2^{n-1}\{\psi\}^{(2)} + \ldots + C_n\lambda_n^{n-1}\{\psi\}^{(n)} \end{cases} \tag{3.7.22}$$

Dacă se consideră funcția polinomială $\varphi_i(\lambda)$ de grad n-1 definită astfel:

$$\varphi_i(\lambda) = \lambda^{n-1} + q_{1i}\lambda^{n-2} + \ldots + q_{n-2,i}\lambda + q_{n-1,i}, \qquad i=1,2,3,\ldots n \tag{3.7.23}$$

Înmulțind ecuațiile (3.7.23) respectiv cu coeficienții $q_{n-1,i},\ q_{n-2,i},\ \ldots,\ q_{2,i},\ q_{1,i}, 1$ şi însumând membru cu membru se obține:

$$\begin{aligned} &\{Y\}^{(n-1)} + q_{1i}\{Y\}^{(n-2)} + \ldots + q_{n-1,i}\{Y\}^{(0)} = \\ &= c_1\varphi_i(\lambda_1)\{\psi\}^{(1)} + c_2\varphi_i(\lambda_2)\{\psi\}^{(2)} + \ldots + c_n\varphi_i(\lambda_n)\{\psi\}^{(n)} \end{aligned} \tag{3.7.24}$$

Considerând că funcția polinomială $\varphi_i(\lambda)$ are aceleaşi rădăcini cu ecuația caracteristică mai puțin rădăcina λ_i adică :

$$\varphi_i(\lambda) = \frac{D(\lambda)}{\lambda - \lambda_i}, \qquad \lambda \neq \lambda_i \tag{3.7.25}$$

atunci sunt evidente proprietățile:

$$\begin{aligned} &\varphi_i(\lambda_j) = 0 \quad \textit{pentru } i \neq j \\ &\varphi_i(\lambda_i) \neq 0 \end{aligned} \tag{3.7.26}$$

Ținând seama de proprietățile (3.7.38) relația (3.7.37) se scrie:

$$c_i \varphi_i(\lambda_i)\{\psi\}^{(i)} = \{Y\}^{(n-1)} + q_{1i}\{Y\}^{(n-2)} + \ldots + q_{n-1,i}\ \{Y\}^{(0)}, \qquad i = 1,2,3,\ldots n \tag{3.7.27}$$

deci vectorii proprii ai matricei [D] se pot scrie sub forma unor combinații liniare ale vectorilor Krîlov: $\{Y\}^{(n-1)}, \{Y\}^{(n-2)}, \ldots, \{Y\}^{(0)}$.

Coeficienții $q_{j,i}$ ($j=1,2,\ldots, n-1$) se determină prin identificarea relației (3.7.23) cu relația (3.7.27) şi cu ajutorul schemei lui Horner:

$$q_{0i}\lambda^{n-1} + q_{1i}\lambda^{n-2} + \ldots + q_{n-2,i}\lambda + q_{n-1,i} = \frac{\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n}{\lambda - \lambda_i} \tag{3.7.28}$$

rezultă:
$$\begin{cases} q_{0i} = 1 \\ q_{ji} = \lambda_i q_{j-1,i} + p_j \end{cases} \qquad j = 1,2,3,\ldots,n \tag{3.7.29}$$

Exemplu

Folosind Metoda Krîlov să se determine valorile proprii şi vectorii proprii ai matricei dinamice definite prin:

$$[D] = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \tag{3.7.30}$$

Se pleacă de la vectorul inițial $\{Y\}^{(0)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ şi se determină următorii trei vectori Krîlov:

$$\{Y\}^{(1)} = [D]\{Y\}^{(0)} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{Y\}^{(2)} = [D]\{Y\}^{(1)} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 53 \\ -26 \\ 4 \end{Bmatrix} \tag{3.7.31}$$

$$\{Y\}^{(3)} = [D]\{Y\}^{(2)} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 53 \\ -26 \\ 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 423 \\ -270 \\ 72 \end{Bmatrix}$$

Ecuația (3.7.30) se scrie:

$$p_1\{Y\}^{(2)} + p_2\{Y\}^{(1)} + p_3\{Y\}^{(0)} = -\{Y\}^{(3)} \tag{3.7.32}$$

sau matriceal:

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 53 \\ 0 & -2 & -26 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 423 \\ -270 \\ 72 \end{Bmatrix} \qquad (3.7.33)$$

Rezultă valorile coeficienților ecuației caracteristice:

$$p_2 = -18\,, \quad p_1 = 99, \quad p_0 = -162 \qquad (3.7.34)$$

Deci ecuația caracteristică se scrie:

$$\lambda^3 - 18\,\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0 \qquad (3.7.35)$$

Soluțiile ecuației (3.7.45) sunt valorile proprii ale matricei [D]:

$$\lambda_1 = 3; \qquad \lambda_2 = 6; \qquad \lambda_3 = 9. \qquad (3.7.36)$$

Pentru a determina vectorii proprii ai lui [D] se folosesc relațiile (3.7.27) care se scriu :

$$c_i \varphi_i(\lambda_i)\{\psi\}^{(i)} = \{Y\}^{(2)} + q_{1i}\{Y\}^{(1)} + q_{2i}\,\{Y\}^{(0)}, \qquad i = 1,2,3. \qquad (3.7.37)$$

Expresiile funcțiilor $\varphi_i(\lambda) = q_{0i}\lambda^2 + q_{1i}\lambda + q_{2i}$ sunt:

$$\begin{cases} \varphi_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = \lambda^2 - 15\lambda + 54; & \varphi_1(\lambda_1) = 18 \\ \varphi_2(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_3) = \lambda^2 - 12\lambda + 27; & \varphi_2(\lambda_2) = -9 \\ \varphi_3(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - 9\lambda + 18; & \varphi_3(\lambda_3) = 18 \end{cases} \qquad (3.7.38)$$

Relațiile (3.7.47) devin: (3.7.39)

$$\begin{cases} c_1\varphi_1(\lambda_1)\{\psi\}^{(1)} = \{Y\}^{(2)} + q_{11}\{Y\}^{(1)} + q_{21}\,\{Y\}^{(0)} = \{Y\}^{(2)} - 15\{Y\}^{(1)} + 54\{Y\}^{(0)} \\ c_2\varphi_2(\lambda_2)\{\psi\}^{(2)} = \{Y\}^{(2)} + q_{12}\{Y\}^{(1)} + q_{22}\,\{Y\}^{(0)} = \{Y\}^{(2)} - 12\{Y\}^{(1)} + 27\{Y\}^{(0)} \\ c_3\varphi_3(\lambda_3)\{\psi\}^{(3)} = \{Y\}^{(2)} + q_{13}\{Y\}^{(1)} + q_{23}\,\{Y\}^{(0)} = \{Y\}^{(2)} - 9\{Y\}^{(1)} + 18\{Y\}^{(0)} \end{cases}$$

Înlocuind expresiile (3.7.27) ale vectorilor Krîlov se obțin vectorii proprii ai matricei [d]:

$$18c_1\{\psi\}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{Bmatrix}, \quad pentru \quad c_1 = \frac{1}{9} \quad \Rightarrow \{\psi\}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$-9c_2\{\psi\}^{(2)} = \begin{Bmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{Bmatrix}, \quad pentru \quad c_2 = \frac{2}{9} \quad \Rightarrow \{\psi\}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{Bmatrix} \qquad (3.7.40)$$

$$18c_3\{\psi\}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{Bmatrix}, \quad pentru \quad c_3 = \frac{2}{9} \quad \Rightarrow \{\psi\}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

b. Metoda Leverrier

Această metodă se bazează pe dezvoltarea polinomului caracteristic cu ajutorul formulelor lui Newton pentru sumele puterilor rădăcinilor unei ecuații algebrice. Determinantul caracteristic al matricei [*D*] se scrie sub forma:

$$D(\lambda)=det([D]-\lambda[I]_n)=\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+p_2\lambda^{n-2}+...+p_n \qquad (3.7.41)$$

Suma puterilor de ordinul *k* ale rădăcinilor polinomului (3.7.41) se notează cu:

$$s_k=\lambda_1^k+\lambda_2^k+...+\lambda_n^k, \qquad k=1,2,3,...,n \qquad (3.7.42)$$

Pentru $k \le n$ sunt valabile formulele lui Newton:

$$s_k+p_1s_{k-1}+p_2s_{k-2}+...+p_{k-1}s_1=-kp_k \qquad k=1,2,3,...,n \qquad (3.7.43)$$

Deci dacă se cunosc sumele s_k ale puterilor rădăcinilor de ordinul *k*, atunci din sistemul (3.7.43) se obțin imediat coeficienții ecuației caracteristice:

$$\begin{cases} p_1=-s_1 \\ p_2=-\frac{1}{2}(s_2+p_1s_1) \\ p_3=-\frac{1}{3}(s_3+p_1s_2+p_2s_1) \\ .... \\ p_n=-\frac{1}{n}(s_n+p_1s_{n-1}+p_2s_{n-1}+...+p_ns_1) \end{cases} \qquad (3.7.44)$$

Sumele s_k ale puterilor rădăcinilor de ordinul *k* se pot determina astfel:

$$s_k=\lambda_1^k+\lambda_2^k+...+\lambda_n^k=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^{(k)} \qquad (3.7.45)$$

unde $a_{ii}^{(k)}$ reprezintă termenii de pe diagonala matricii $[A]^k$:

$$\begin{aligned} &[D]^k=\left[a_{ij}^{(k)}\right] \\ &[D]^k=[D]^{k-1}[D] \qquad k=2,3,...,n \end{aligned} \qquad (3.7.46)$$

Deci problema se reduce la calculul primelor *n* puteri ale matricii [*A*] şi a sumelor termenilor de pe diagonala principală (urma matricei).

Exemplu

Folosind Metoda Leverrier să se determine valorile proprii ale matricei

$$[D]=\begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \qquad (3.7.47)$$

Se calculează primele 3 puteri ale matricei [*D*]

$$[D]^2 = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53 & -26 & 4 \\ -26 & 44 & -22 \\ 4 & -22 & 29 \end{bmatrix}$$

$$[D]^3 = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 53 & -26 & 4 \\ -26 & 44 & -22 \\ 4 & -22 & 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 423 & -270 & 72 \\ -270 & 360 & -198 \\ 72 & -198 & 189 \end{bmatrix} \tag{3.7.48}$$

Sumele s_k ale puterilor rădăcinilor de ordinul k sunt:

$$\begin{cases} s_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \sum_{i=1}^{3} a_{ii}^{(1)} = 18 \\ s_2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \sum_{i=1}^{3} a_{ii}^{(2)} = 126 \\ s_3 = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 = \sum_{i=1}^{3} a_{ii}^{(3)} = 972 \end{cases} \tag{3.7.49}$$

Folosind relațiile (3.7.44)

$$\begin{cases} p_1 = -s_1 = -18 \\ p_2 = -\frac{1}{2}\left(s_2 + p_1 s_1\right) = 99 \\ p_3 = -\frac{1}{3}\left(s_3 + p_1 s_2 + p_2 s_1\right) = -162 \end{cases} \tag{3.7.50}$$

Deci se obține ecuația caracteristică:

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0 \tag{3.7.51}$$

şi valorile proprii ale matricei [D]:

$$\lambda_1 = 3; \qquad \lambda_2 = 6; \qquad \lambda_3 = 9. \tag{3.7.52}$$

3.7.2. Metode aproximative

a. Metoda iterației matriceale

Această metodă se foloseşte pentru calculul valorii proprii maxime şi a vectorului propriu corespunzător.

Fie ecuația caracteristică a matricei [D]:

$$D(\lambda) = det([D] - \lambda[I]) \tag{3.7.53}$$

Se consideră că printre valorile proprii (rădăcinile ecuației caracteristice) există o singură valoare maximă în modul care este prima valoare proprie λ_1:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > ... > |\lambda_n| \tag{3.7.54}$$

Se consideră un vector $\{Y\}^{(0)}$ arbitrar care se poate scrie ca o combinație de vectori proprii $\{\psi\}_j$ ai matricei [D]:

$$\{Y\}^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} c_j \{\psi\}_j \tag{3.7.55}$$

Înmulțind relația (3.7.55) la stânga cu matricea [D] se obține:

$$\{Y\}^{(1)} = [D]\{Y\}^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} c_j [D]\{\psi\}_j = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j \{\psi\}_j \tag{3.7.56}$$

Dacă se repetă acest algoritm se obține succesiv:

$$\{Y\}^{(2)} = [D]\{Y\}^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j [D]\{\psi\}_j = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^2 \{\psi\}_j$$

$$\{Y\}^{(3)} = [D]\{Y\}^{(2)} = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^2 [D]\{\psi\}_j = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^3 \{\psi\}_j \tag{3.7.57}$$

....

$$\{Y\}^{(n)} = [D]\{Y\}^{(n-1)} = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^{n-1} [D]\{\psi\}_j = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^n \{\psi\}_j$$

Dacă se consideră în *spațiul vectorial n-dimensional E_n* o bază de vectori independenți $\{e\}_i$ $i = 1,2,3,...,n$, atunci vectorii proprii $\{\psi\}_i$ se pot exprima în această bază sub forma:

$$\{\psi\}_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \{e\}_i \tag{3.7.58}$$

Relația generală: $\{Y\}^{(m)} = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^m \{\psi\}_j$ se scrie:

$$\{Y\}^{(m)} = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^m \{\psi\}_j = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^m \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \{e\}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^m x_{ij} \right) \{e\}_i = \sum_{i=1}^{n} y_i^{(m)} \{e\}_i \tag{3.7.59}$$

S-a notat cu: $y_i^{(m)} = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^m x_{ij}$ valoarea care reprezintă coordonata i a

vectorului $\{Y\}^{(m)}$ în spațiul vectorial *n-dimensional* E_n.

În mod analog se poate exprima coordonata i a vectorului $\{Y\}^{(m+1)}$ în spațiul vectorial *n-dimensional* E_n:

$$y_i^{(m+1)} = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^{m+1} x_{ij} \tag{3.7.60}$$

Împărțind cele două relații se obține:

$$\frac{y_i^{(m+1)}}{y_i^{(m)}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^{m+1} x_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^{m} x_{ij}} = \lambda_1 \frac{1 + \frac{c_2 x_{i2}}{c_1 x_{i1}}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{m+1} + \frac{c_3 x_{i3}}{c_1 x_{i1}}\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^{m+1} + \ldots + \frac{c_n x_{in}}{c_1 x_{i1}}\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{m+1}}{1 + \frac{c_2 x_{i2}}{c_1 x_{i1}}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{m} + \frac{c_3 x_{i3}}{c_1 x_{i1}}\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^{m} + \ldots + \frac{c_n x_{in}}{c_1 x_{i1}}\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{m}} \tag{3.7.61}$$

Ținând seama de proprietatea valorilor proprii (3.7.54) se observă că toate parantezele din relația (3.7.61) sunt subunitare, deci pentru un număr suficient de mare de iterații m acestea se pot neglija:

$$\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^m \approx 0; \qquad \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^{m+1} \approx 0 \tag{3.7.62}$$

Deci prima valoare proprie se poate determina ca raport al coordonatei i corespunzătoare iterațiilor $m+1$ şi m:

$$\frac{y_i^{(m+1)}}{y_i^{(m)}} \cong \lambda_1 \tag{3.7.63}$$

Pentru a detremina vectorul propriu se foloseşte relația (3.7.59) :

$$\{Y\}^{(m)} = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^m \{\psi\}_j = c_1 \lambda_1^m \{\psi\}_1 + c_2 \lambda_2^m \{\psi\}_2 + \ldots + c_n \lambda_n^m \{\psi\}_n$$

$$\{Y\}^{(m)} = c_1 \lambda_1^m \left(\{\psi\}_1 + \frac{c_2}{c_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^m \{\psi\}_1 + \ldots + \frac{c_n}{c_1}\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^m \{\psi\}_n \right) \tag{3.7.64}$$

Aplicând aceeaşi aproximare (3.7.62) se obține:

$$\{Y\}^{(m)} \cong c_1 \lambda_1^m \{\psi\}_1 \tag{3.7.65}$$

adică forma modului propriu corespunzător primei valori proprii λ_1 este aceeaşi cu a vectorului $\{Y\}^{(m)}$ obținut după ierația m, cu diferența de o cvonstantă. Valoarea constantei este aleatoare, ea se poate lua astfel încât să se obțină valori normalizate ale vectorului propriu $\{\psi\}_1$:

$$c_1 = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i^{(m)}\right)^2}}{\lambda_1^m} \tag{3.7.66}$$

Exemplu

Se consideră sistemul mecanic format din trei corpuri de mase *m, 2m* şi *m* leate între ele şi cu baza cu elemente elastice (arcuri) având toate aceeaşi rigiditate *k* ca în figura 3.7.2. Să se determine valoarea pulsației proprii maxime şi valoarea pulsației proprii fudamentale folosind metoda iterației matriceale.

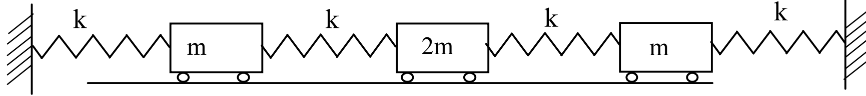


Fig.3.7.2

Pentru a rezolva această problemă se exprimă energia cinetică a sistemului format din cele trei corpuri şi energia potenială elastică a arcurilor în funcție de coordonatele generalizate q_1, q_2 şi q_3(deplasările celor trei corpuri):

$$E=\frac{1}{2}\left(m\dot{q}_1^2+2m\dot{q}_2^2+m\dot{q}_3^2\right)$$
$$V=\frac{1}{2}\left(kq_1^2+k(q_1-q_2)^2+k(q_2-q_3)^2+kq_3{}^2\right) \tag{3.7.67}$$

Se scriu ecuațiile lui Lagrange pentru fiecare din cele trei coordonate generalizate şi se obține:

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1+2kq_1-kq_2=0 \\ m\ddot{q}_2-kq_1+2kq_2-kq_3=0 \\ m\ddot{q}_3-kq_2+2kq_3=0 \end{cases} \tag{3.7.68}$$

Sistemul (3.7.68) se scrie matriceal:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.7.69}$$
$$[M]\{\ddot{q}\}+[K]\{q\}=\{0\}$$

Soluția acestei ecuații diferențiale este o soluție armonică de forma:

$$\{q\}=\{a\}cos(pt-\varphi) \tag{3.7.70}$$

Înlocuind în ecuația (3.7.69) se obține ecuația matriceală:

$$\left(-p^2[M]+[K]\right)\{a\}=\{0\} \quad \Leftrightarrow \quad [K]\{a\}=p^2[M]\{a\} \tag{3.7.71}$$

Înmulțind la stânga relația (3.7.71) cu matricea $[M]^{-1}$ se obține ecuația matriceală de valori proprii:

$$[M]^{-1}[K]\{a\}=p^2[M]^{-1}[M]\{a\} \quad \Leftrightarrow \quad [M]^{-1}[K]\{a\}=p^2\{a\} \tag{3.7.72}$$

Folosind metoda iterației matriceale determină valoarea proprie maximă $\lambda_1=p_1^2$ şi valoarea cea mai mare a pulsației proprii.

Înmulțind la stânga relația (3.7.71) cu matricea $[K]^{-1}$ se obține ecuația matriceală de valori proprii:

$$[K]^{-1}[K]\{a\}=p^2[K]^{-1}[M]\{a\} \quad \Leftrightarrow \quad [K]^{-1}[M]\{a\}=\frac{1}{p^2}\{a\} \qquad (3.7.73)$$

Folosind metoda iterației matriceale determină pentru acest caz valoarea proprie maximă $\lambda_1^* = \frac{1}{p_1^{*2}}$ şi valoarea cea mai mică a pulsației proprii (pulsația fundamentală).

➢ *Determinarea pulsației maxime* p_{max}:

Se notează cu $[D]=[M]^{-1}[K]$ unde:

$$[M]=m\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow[M]^{-1}=\frac{1}{m}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$
$$[K]=k\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}\Rightarrow[K]^{-1}=\frac{1}{k}\begin{bmatrix}3/4&1/2&1/4\\1/2&1&1/2\\1/4&1/2&3/4\end{bmatrix} \qquad (3.7.74)$$

rezultă:

$$[D]=[M]^{-1}[K]=\frac{k}{m}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}=\frac{k}{m}\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1/2&1&-1/2\\0&-1&2\end{bmatrix} \qquad (3.7.75)$$

Se foloseşte pentru început vectorul aleator: $\{Y\}^{(0)}=\{1 \quad 0 \quad 1\}^T$ şi se calculează ceilalți vectorii prin iterație:

$$\{Y\}^{(m+1)}=[D]\{Y\}^{(m)} \qquad (3.7.76)$$

Se obține succesiv:

$$\{Y\}^{(1)}=\frac{k}{m}\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1/2&1&-1/2\\0&-1&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\0\\1\end{Bmatrix}=\frac{k}{m}\begin{Bmatrix}2\\-1\\2\end{Bmatrix}$$
$$\{Y\}^{(2)}=\left(\frac{k}{m}\right)^2\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1/2&1&-1/2\\0&-1&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}2\\-1\\2\end{Bmatrix}=\left(\frac{k}{m}\right)^2\begin{Bmatrix}5\\-3\\5\end{Bmatrix}$$
$$\{Y\}^{(3)}=\left(\frac{k}{m}\right)^3\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1/2&1&-1/2\\0&-1&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}5\\-3\\5\end{Bmatrix}=\left(\frac{k}{m}\right)^3\begin{Bmatrix}13\\-8\\13\end{Bmatrix} \qquad (3.7.77)$$
$$\{Y\}^{(4)}=\left(\frac{k}{m}\right)^3\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1/2&1&-1/2\\0&-1&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}5\\-3\\5\end{Bmatrix}=\left(\frac{k}{m}\right)^3\begin{Bmatrix}13\\-8\\13\end{Bmatrix}$$

$$\{Y\}^{(5)}=\left(\frac{k}{m}\right)^4\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1/2 & 1 & -1/2\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}13\\ -8\\ 13\end{Bmatrix}=\left(\frac{k}{m}\right)^4\begin{Bmatrix}34\\ -21\\ 34\end{Bmatrix}$$

$$\{Y\}^{(6)}=\left(\frac{k}{m}\right)^5\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1/2 & 1 & -1/2\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}34\\ -21\\ 34\end{Bmatrix}=\left(\frac{k}{m}\right)^5\begin{Bmatrix}89\\ -55\\ 89\end{Bmatrix}$$

$$\{Y\}^{(7)}=\left(\frac{k}{m}\right)^6\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1/2 & 1 & -1/2\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}89\\ -55\\ 89\end{Bmatrix}=\left(\frac{k}{m}\right)^6\begin{Bmatrix}233\\ -144\\ 233\end{Bmatrix}$$

Iterația se opreşte la $m=7$ deoarece raportul elementelor corespunzătoare vectorilor $\{Y\}^{(7)}$ şi $\{Y\}^{(6)}$ diferă la a patra zecimală:

$$\frac{y_1^{(7)}}{y_1^{(6)}}=\frac{y_2^{(7)}}{y_2^{(6)}}=\frac{y_3^{(7)}}{y_3^{(6)}}=2{,}618\frac{k}{m}; \qquad (3.7.78)$$

Deci prima valoare proprie este:

$$\lambda_1=2{,}618\frac{k}{m} \qquad \Rightarrow \ p_{max}=\sqrt{2{,}618\frac{k}{m}}=1{,}618\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (3.7.79)$$

Vectorul propriu corespunzător lui p_{max} se obține normalizând elementele vectorului $\{Y\}^{(7)}$:

$$\{\psi\}_{max}=\frac{1}{359{,}6}\begin{Bmatrix}233\\ -144\\ 233\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0{,}648\\ -0{,}4\\ 0{,}648\end{Bmatrix} \qquad (3.7.80)$$

➢ *Determinarea pulsației fundamentale* p_{min} *:*

Se notează cu $[B]=[K]^{-1}[M]$:

$$[B]=[K]^{-1}[M]=\frac{m}{k}\begin{bmatrix}3/4 & 1/2 & 1/4\\ 1/2 & 1 & 1/2\\ 1/4 & 1/2 & 3/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$[\mathrm{B}]=\frac{m}{k}\begin{bmatrix}3/4 & 1 & 1/4\\ 1/2 & 2 & 1/2\\ 1/4 & 1 & 3/4\end{bmatrix} \qquad (3.7.81)$$

Se foloseşte pentru început vectorul oarecare: $\{Y\}^{(0)}=\{1\ \ 1\ \ 1\}^t$ (3.7.82)

şi se calculează ceilalți vectori cu ajutorul formulei de iterație:

$$\{Y\}^{(m+1)}=[B]\{Y\}^{(m)} \qquad (3.7.83)$$

Se obțin succesiv vectorii:

$$\{Y\}^{(1)}=\frac{m}{k}\begin{bmatrix}3/4 & 1 & 1/4\\ 1/2 & 2 & 1/2\\ 1/4 & 1 & 3/4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}=\frac{m}{k}\begin{Bmatrix}2\\3\\2\end{Bmatrix}$$

$$\{Y\}^{(2)}=\left(\frac{m}{k}\right)^2\begin{bmatrix}3/4 & 1 & 1/4\\ 1/2 & 2 & 1/2\\ 1/4 & 1 & 3/4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}2\\3\\2\end{Bmatrix}=\left(\frac{m}{k}\right)^2\begin{Bmatrix}5\\8\\5\end{Bmatrix}$$

$$\{Y\}^{(3)}=\left(\frac{m}{k}\right)^3\begin{bmatrix}3/4 & 1 & 1/4\\ 1/2 & 2 & 1/2\\ 1/4 & 1 & 3/4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}5\\8\\5\end{Bmatrix}=\left(\frac{m}{k}\right)^3\begin{Bmatrix}13\\21\\13\end{Bmatrix}$$

$$\{Y\}^{(4)}=\left(\frac{m}{k}\right)^3\begin{bmatrix}3/4 & 1 & 1/4\\ 1/2 & 2 & 1/2\\ 1/4 & 1 & 3/4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}13\\21\\13\end{Bmatrix}=\left(\frac{m}{k}\right)^3\begin{Bmatrix}34\\55\\34\end{Bmatrix} \qquad (3.7.84)$$

$$\{Y\}^{(5)}=\left(\frac{m}{k}\right)^4\begin{bmatrix}3/4 & 1 & 1/4\\ 1/2 & 2 & 1/2\\ 1/4 & 1 & 3/4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}34\\55\\34\end{Bmatrix}=\left(\frac{m}{k}\right)^4\begin{Bmatrix}89\\144\\89\end{Bmatrix}$$

$$\{Y\}^{(6)}=\left(\frac{m}{k}\right)^5\begin{bmatrix}3/4 & 1 & 1/4\\ 1/2 & 2 & 1/2\\ 1/4 & 1 & 3/4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}89\\144\\89\end{Bmatrix}=\left(\frac{m}{k}\right)^5\begin{Bmatrix}233\\377\\233\end{Bmatrix}$$

Iterația se opreşte la $m=6$ deoarece raportul elementelor corespunzătoare diferă la a patra zecimală:

$$\frac{y_1^{(6)}}{y_1^{(5)}}=\frac{y_3^{(6)}}{y_3^{(5)}}=2{,}618\frac{m}{k};\quad \frac{y_2^{(6)}}{y_2^{(5)}}=2{,}618\frac{m}{k} \qquad (3.7.84)$$

Deci prima valoare proprie şi pulsația fundamentală este:

$$\lambda_1=2{,}618\frac{m}{k}$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{p_{min}}=\sqrt{2{,}618\frac{m}{k}} \qquad (3.7.85)$$

$$\Rightarrow p_{min}=0{,}618\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Vectorul propriu corespunzător pulsației fundamentale p_{min} se obține normalizând elementele vectorului $\{Y\}^{(6)}$:

$$\{\psi\}_{min}=\frac{1}{500{,}7}\begin{Bmatrix}233\\377\\233\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0{,}465\\0{,}753\\0{,}465\end{Bmatrix}. \qquad (3.7.86)$$

b. Metoda Rayleigh

Această metodă permite determinarea pulsaţiilor proprii atunci când se cunosc modurile proprii (vectorul coeficienţilor de influenţă $\{\mu^{(r)}\}$) corespunzător modului r.

Ecuaţiile diferenţiale ale vibraţiilor libere ale unui sistem conservativ cu N grade de libertate se scriu sub formă matriceală:

$$[M]\{\ddot{q}\}+[K]\{q\}=\{0\} \tag{3.7.87}$$

Dacă sistemul vibrează după modul propriu r atunci deplasările şi vitezele corespunzătoare acestui mod se scriu în funcţie de vectorul coeficienţilor de influenţă astfel:

$$\begin{aligned}\{q^{(r)}\}&=\{\mu^{(r)}\}a_1^{(r)}\cos(p_r t-\varphi_r)\\ \{\dot{q}^{(r)}\}&=-\{\mu^{(r)}\}p_r a_1^{(r)}\sin(p_r t-\varphi_r)\end{aligned} \tag{3.7.88}$$

Energia cinetică şi potenţială a sistemului corespunzătoare modului propriu r sunt:

$$\begin{aligned}E^{(r)}&=\frac{1}{2}\{\dot{q}^{(r)}\}^T[M]\{\dot{q}^{(r)}\}=\frac{1}{2}\{\mu^{(r)}\}^T[M]\{\mu^{(r)}\}\left(p_r a_1^{(r)}\right)^2\sin^2(p_r t-\varphi_r)\\ V^{(r)}&=\frac{1}{2}\{q^{(r)}\}^T[K]\{q^{(r)}\}=\frac{1}{2}\{\mu^{(r)}\}^T[K]\{\mu^{(r)}\}\left(a_1^{(r)}\right)^2\cos^2(p_r t-\varphi_r)\end{aligned} \tag{3.7.89}$$

Se observă din expresiile energiei cinetice şi potenţiale că atunci când prima este maximă, cealată este nulă. Expresiile corespunzătoare Energiei cinetice şi potenţiale maxime sunt:

$$\begin{aligned}E_{max}^{(r)}&=\frac{1}{2}\{\mu^{(r)}\}^T[M]\{\mu^{(r)}\}\left(p_r a_1^{(r)}\right)^2\\ V_{max}^{(r)}&=\frac{1}{2}\{\mu^{(r)}\}^T[K]\{\mu^{(r)}\}\left(a_1^{(r)}\right)^2\end{aligned} \tag{3.7.90}$$

Principiul lui Rayleigh afirmă că *energia cinetică maximă corespunzătoare mişcării sistemului după unul din modurile proprii de vibraţie este egală cu energia potenţială maximă.*

$$E_{max}^{(r)}=V_{max}^{(r)} \iff \frac{1}{2}\{\mu^{(r)}\}^T[M]\{\mu^{(r)}\}\left(p_r a_1^{(r)}\right)^2=\frac{1}{2}\{\mu^{(r)}\}^T[K]\{\mu^{(r)}\}\left(a_1^{(r)}\right)^2 \tag{3.7.91}$$

Folosind acest principiu se deduce valoarea pulsaţiei prorii p_r:

$$p_r^2=\frac{\{\mu^{(r)}\}^T[K]\{\mu^{(r)}\}}{\{\mu^{(r)}\}^T[M]\{\mu^{(r)}\}} \tag{3.7.92}$$

În general, modurile proprii de vibraţie (caracterizate prin vectorii coeficienţilor de influenţă) nu sunt cunoscute.

Pentru calculul pulaţiei fundamentale *se aproximează modul propriu fundamental cu forma de echilibru static* al sistemului de corpuri aflat în câmp gravitaţional: $\{\mu^{(1)}\}=\{f\}_{st}$ (3.7.93)

În cazul sistemelor formate din elemente elastice şi corpuri în câmp gravitaţional, pentru echilibrul static forţele generalizate sunt nule:

$$Q_i = m_i g - \left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{q_i = f_i} = 0 \quad \Rightarrow m_i g = \left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{q_i = f_i} \tag{3.7.94}$$

Ținând seama de expresia energiei potențiale a sistemului:

$$V = \frac{1}{2}\{q\}^T [K]\{q\} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} k_{ij} q_i q_j \tag{3.7.95}$$

derivatele parțiale din relația (3.7.94) se scriu:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{q_i = f_i} = \sum_{j=1}^{N} k_{ij} f_i \quad \Rightarrow \quad m_i g = \sum_{j=1}^{N} k_{ij} f_j \quad i = 1,2,...N \tag{3.7.96}$$

Dacă se înmulțeşte fiecare din ecuațiile $m_i g = \sum_{j=1}^{N} k_{ij} f_i$ respectiv cu f_i şi se însumează membru cu membru se obține:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} k_{ij} f_i f_j = g\sum_{i=1}^{N} m_i f_i \tag{3.7.97}$$

Ținând seama că aceste sisteme sunt în general sisteme decuplate dinamic ($m_{ij}=0$) expresia (3.7.92) se scrie:

$$p_1^2 = \frac{\{\mu^{(1)}\}^T [K]\{\mu^{(1)}\}}{\{\mu^{(1)}\}^T [M]\{\mu^{(1)}\}} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} k_{ij} f_i f_j}{\sum_{i=1}^{N} m_i f_i^2} \tag{3.7.98}$$

Ținând seama de relația (3.7.97) se obține următoarea relație pentru pulsația findamentală

$$p_1 = \sqrt{\frac{g\sum_{i=1}^{N} m_i f_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i f_i^2}} \tag{3.7.99}$$

Exemplu

Se consideră sistemul format dintr-o bară dreaptă de lungime $4L$ situată pe două rezeme A şi B având console la capete egale de lungime L , rigiditatea la încovoiere EI constantă pe care se află montate trei roți de mase $m_1 = m$, $m_2 = 3m$ şi $m_3 = m$ ca în figura 3.7.3. Folosind metoda Rayleigh să se determine pulsația fundamentală p_1 a vibrațiilor flexionale ale barei.

Pentru determinarea deformațiilor statice f_i se foloseşte metoda coeficienților de influență şi principiul suprapunerii efectelor:

$$\begin{cases} f_1 = \delta_{11} mg + \delta_{12}\cdot 3mg + \delta_{13} mg \\ f_2 = \delta_{21} mg + \delta_{22}\cdot 3mg + \delta_{23} mg \\ f_3 = \delta_{31} mg + \delta_{32}\cdot 3mg + \delta_{33} mg \end{cases} \tag{3.7.100}$$

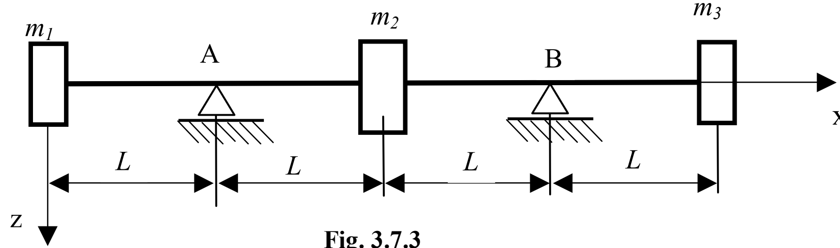


Fig. 3.7.3

unde coeficienții de influență au fost determinați la paragraful 3.7.b

$$\delta_{11} = \frac{L^3}{EI};\quad \delta_{12} = -\frac{L^3}{8EI};\quad \delta_{13} = \frac{L^3}{3EI};$$

$$\delta_{21} = -\frac{L^3}{8EI};\quad \delta_{12} = \frac{L^3}{24EI};\quad \delta_{13} = -\frac{L^3}{8EI}; \tag{3.7.101}$$

$$\delta_{11} = \frac{L^3}{3EI};\quad \delta_{12} = -\frac{L^3}{8EI};\quad \delta_{13} = \frac{L^3}{EI};$$

Rezultă:

$$\begin{cases} f_1 = f_3 = \dfrac{23}{24}\dfrac{mgL^3}{EI} \\ f_2 = -\dfrac{1}{8}\dfrac{mgL^3}{EI} \end{cases} \tag{3.7.102}$$

Introducând în relația (3.7.99) se obține pulsația fundamentală:

$$p_1 = \sqrt{\frac{g\left(m f_1 + 3m f_2 + m f_3\right)}{m f_1^2 + 3m f_2^2 + m f_3^2}}$$

$$p_1 = 0{,}904\sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \tag{3.7.103}$$

Valoarea exactă calculată la paragraful 3.7.b este:

$$p_1 = 0{,}843\sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \tag{3.7.104}$$

Eroarea calculată față de valoarea exactă este:

$$\varepsilon = 7{,}3\% . \tag{3.7.105}$$

3.8. Probleme propuse

3.8.1. Se consideră sistemul format din trei discuri omogene de raza R şi mase m_1 m_2 şi m_3 legate între ele prin elementele elastice de rigidități k_1, k_2 , k_3 respectiv k_4 ca în fig. 3.8.1. Se cere să se determine (folosind metoda iterației matriciale) prima şi a treia pulsație proprie a sistemului elastic şi modurile proprii de vibrație corespunzătoare. Date numerice: $m_1 = m_3 = 1$kg; $m_2=3$ kg; $k_1 = k_4 = 50$ N/mm; $k_2 = k_3 = 100$ N/mm .

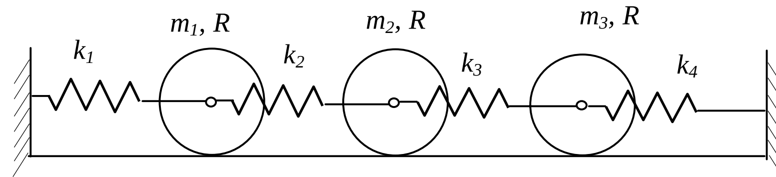


Fig. 3.8.1

3.8.2. Se consideră pendulul triplu, format din trei bare de lungime *L* de mase *m* la capetele cărora se găsesc trei mase *M*, legate între ele prin intermediul unor arcuri de rigiditate *k* aflate la distanța *a* de articulații, ca în fig. 3.8.2. Să se determine pulsațiile şi modurile proprii de vibrație coresunzătoare ale acestui sistem. Date numerice: *m=1 kg; L= 500 mm; a = 100 mm; k = 50 N/mm;* $g=10\ m/s^{-2}$

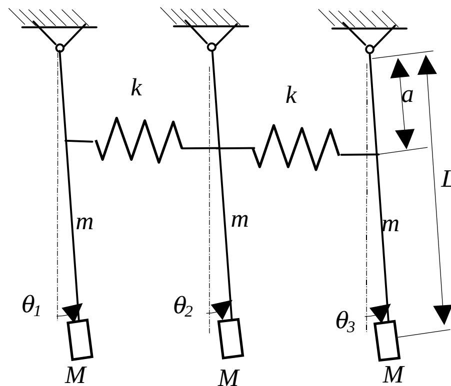


Fig. 3.8.2

3.8.3. Se consideră sistemul format dintr-un arbore de rigiditate constantă şi masă neglijabilă de diametru *d*, pe care se află montate trei roți de mase *m, 2m* şi *m* ; arborele este rezemat la capete ca în fig. 3.8.3. Să se determine (folosind metoda coeficienților de influență şi a iterației matriciale) prima şi a treia pulsație proprie a sistemului elastic şi modurile proprii de vibrații flexionale corespunzătoare.

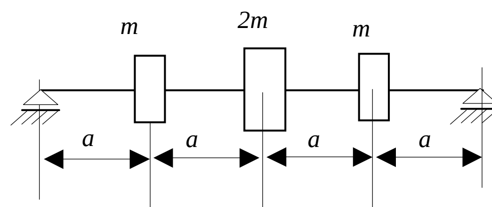


Fig.3.8.3

Date numerice: $m = 2$ kg; a = 100 mm; E = 2,1 10^5 N/mm^2 ; d =50mm ; g =10 m/s^{-2}

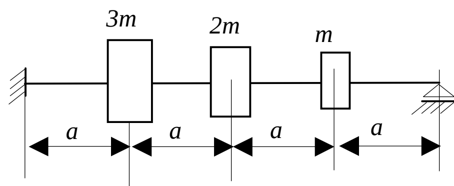


Fig. 3.8.4

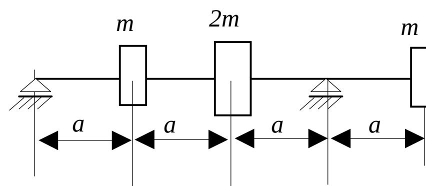


Fig.3.8.5

3.8.4. Se consideră sistemul format dintr-o bară de rigiditate constantă şi masă neglijabilă, având secţiunea circulară de diametru *d*, pe care se află trei mase: *3m*, *2m* şi *m* , bara fiind încastrată la un capăt şi rezemată la celălalt ca în fig. 3.8.4. Să se determine (folosind metoda coeficienţilor de influenţă şi a iteraţiei matriciale) prima şi a treia pulsaţie proprie a sistemului elastic şi modurile proprii de vibraţii flexionale corespunzătoare. Date numerice: *m* =2 kg; a = 100 mm; E = 2,1 10^5 N/mm^2; d =50mm ; g =10 m/s^{-2}.

3.8.5. Se consideră sistemul format dintr-un arbore de masă neglijabilă şi rigiditate constantă, având diametrul *d*, pe care se află montaţi trei roţi de mase *m*, *2m* şi *m* , având legăturile cu mediul fix ca în fig. 3.8.5. Să se determine (folosind metoda coeficienţilor de influenţă şi a iteraţiei matriciale) prima şi a treia pulsaţie proprie a sistemului elastic şi modurile proprii de vibraţii flexionale corespunzătoare. Date numerice: *m* =2 kg; a = 100 mm; E = 2,1 10^5 N/mm^2; d =50mm ; g =10 m/s^{-2}

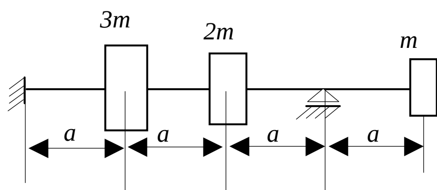


Fig.3.8.6

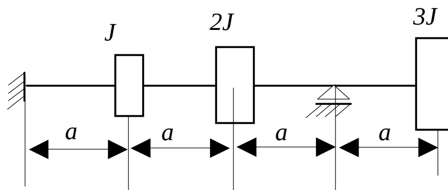


Fig.3.8.7

3.8.6. Se consideră sistemul format dintr-un arbore de masă neglijabilă şi rigiditate constantă, având diametrul *d*, pe care se află montaţi trei roţi de mase *m*, *2m* şi *m* , având legăturile cu mediul fix ca în fig. 3.8.6. Să se determine folosind metoda coeficienţilor de influenţă şi a iteraţiei matriciale prima şi a treia pulsaţie proprie a sistemului elastic şi modurile proprii de vibraţii flexionale corespunzătoare. Date numerice: *m* =2 kg; a = 100 mm; E = 2,1 10^5 N/mm^2; d =50mm ; g =10 m/s^{-2}

3.8.7. Se consideră sistemul format dintr-un arbore de masă neglijabilă şi rigiditate constantă GI_p *(*având diametrul constant *d)* , pe care se află montaţi trei volanţi având momentele de inerţie *J* , *2J* şi *3J* ca în fig. 3.8.7. Să se determine (folosind metoda iteraţiei matriciale) prima şi a treia pulsaţie proprie a sistemului elastic şi modurile proprii de vibraţie corespunzătoare. Date numerice: *J =50 kgm*^{2}*; a = 100 mm; d=60mm; G =* $85\cdot 10^3$ *N/mm*^{2}

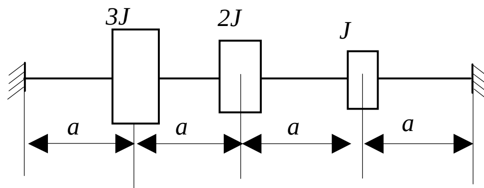


Fig. 3.8.8

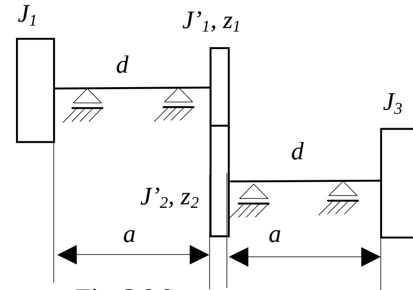


Fig. 3.8.9

3.8.8. Se consideră sistemul format dintr-un arbore de masă neglijabilă şi rigiditate constantă GI_p *(*având diametrul constant *d)* , pe care se află montaţi trei volanţi de momente de inerţie *3J, 2J* şi *J* , având legăturile cu mediul fix ca în fig. 3.8.8. Să se determine (folosind metoda iteraţiei matriciale) prima şi a treia pulsaţie proprie a sistemului elastic şi modurile proprii de vibraţie corespunzătoare. Date numerice: $J = 50\ kgm^2$; $a = 100\ mm$; $d = 60 mm$; $G = 85\cdot 10^3\ N/mm^2$

3.8.9. Se consideră sistemul format din cei doi arbori de masă neglijabilă şi rigiditate constantă *(*având diametrele *d)* , pe care se află montaţi doi volanţi de momente de inerţie J_1 şi J_3 , şi roţile dinţate de momente de inerţie J'_1 şi J'_2 ca în fig. 3.8.9. Să se determine pulsaţiile şi modurile proprii pentru vibraţiile torsionale ale acestui sistem.Date numerice: $J_1 = J_3 = 100\ kgm^2$; $2J'_1 = J'_2 = 40\ kgm^2$; $a = 100\ mm$; $d = 60 mm$; $G = 85\cdot 10^3\ N/mm^2$; $i = z_2/z_1 = 2$

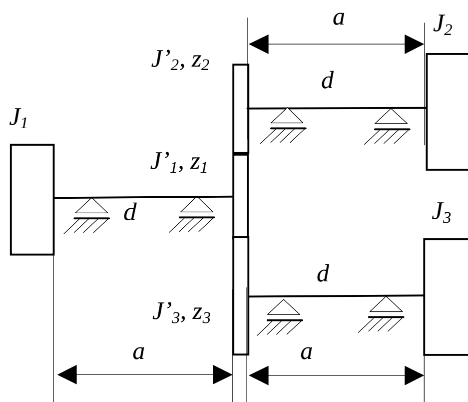


Fig. 3.8.10

3.8.10. Se consideră sistemul format din cei trei arbori de masă neglijabilă şi rigiditate constantă *(*având diametrele *d)* , pe care se află montaţi trei volanţi de momente de inerţie J_1 J_2 şi J_3 , şi roţile dinţate de momente de inerţie neglijabile J'_1 J'_2 şi J'_2 ca în fig. 3.8.10. Să se determine pulsaţiile şi modurile proprii pentru vibraţiile torsionale ale acestui sistem.

Date numerice: $J_1 = J_2 = J_3 = 100\ kgm^2$; $a = 100\ mm$; $d = 50 mm$; $G = 85\cdot 10^3\ N/mm^2$; $i_1 = z_2/z_1 = 1{,}5$; $i_2 = z_3/z_1 = 2$

CAPITOLUL IV
VIBRAȚIILE SISTEMELOR CONTINUE

Introducere

Sistemele mecanice cu număr finit de grade de libertate sunt modele discrete pentru studiul sistemelor formate dintr-un număr de corpuri legate intre ele prin elemente elastice sau de amortizare de mase neglijabile ce pot fi asimilate cu puncte materiale. În cele mai multe cazuri însă mişcarea vibratorie a sistemelor continue nu se poate studia folosind astfel de modele discrete.

Unele sisteme continue pot fi studiate folosind modele teoretice cu parametrii distribuiți (masa, elasticitatea, amortizarea) în tot volumul ocupat de corp. Deplasarea unui astfel de sistem este exprimată printr-o funcție continuă pe ddomeniul ocupat de corp şi variabilă în timp. Sistemul are un număr infinit de grade de libertate. Astfel de sisteme care permit o modelare matematică sunt: firele, barele şi plăcile.

4.1. Vibrațiile transversale ale firelor

Se consideră un fir omogen de secțiune constantă, flexibil şi inextensibil tensionat la capete (de exemplu un cablu de transport energie electrică) şi un element din acest fir de lungime ds. Asupra acestui element acționează forța distribuită *f(x,t)* după o direcție perpendiculară pe axa Ox precum şi forțele de legătură *H, V, H+dH,* respectiv *V+dV* ca în figura 4.1.1.a,b.

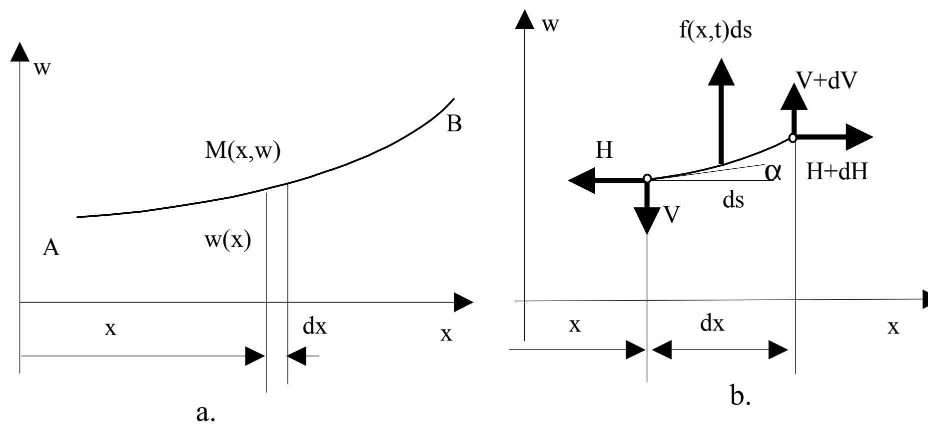


Fig. 4.1.1

Conform principiului lui d'Alembert, ecuațiile de echilibru dinamic ale forțelor care acționează asupra elementului de lungime *ds* sunt (fig. 4.1.1.b):

$$\begin{cases} -H + H + dH = 0 \\ -\ddot{w}dm + f(x,t)ds - V + V + dV = 0 \end{cases} \tag{4.1.1}$$

Deoarece în fir nu se produc decât eforturi axiale de întindere, între cele două forțe de legătură H şi V există relația:

$$V = H\,tg\alpha \quad sau \quad V = H\frac{\partial w}{\partial x} \tag{4.1.2}$$

Din prima ecuație a sistemului (4.1.1) rezultă:

$$dH = 0 \quad \Rightarrow \quad H = ct \tag{4.1.3}$$

Elementul de fir are masa $dm = \gamma ds$ unde γ este masa specifică liniară (pe unitatea de lungime) a firului. Pentru deplasări mici se poate considera că $ds \cong dx$ şi ecuația a doua a sistemului (4.1.1) se scrie:

$$\frac{\partial V}{\partial x} + f(x,t) = \gamma\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{4.1.4}$$

Ținând seama de relația (4.1.2) ecuația (4.1.4) se scrie:

$$H\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \gamma\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + f(x,t) = 0$$

sau:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{f(x,t)}{H} = 0 \tag{4.1.5}$$

unde s-a notat: $c = \sqrt{H/\gamma}$ (4.1.6)

Ecuația diferențială (4.1.5) reprezintă forma generală a ecuațiilor ce caracterizează vibrațiile transversale ale firelor.

4.1.1. Vibrațiile transversale libere

În acest caz forța distribuită este nulă: *f(x,t)=0* şi ecuația (4.1.5) se scrie:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{4.1.7}$$

Condițiile inițiale ale mişcării sunt:

$$t = 0 \;\Rightarrow\; w(x,t)\big|_{t=0} = g_1(x) \qquad si \qquad \left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = g_2(x) \tag{4.1.8}$$

Soluția generală a acestei ecuații a fost dată de d'Alembert şi se scrie:

$$w(x,t) = w_1(x - ct) + w_2(x + ct) \qquad (4.1.9)$$

Forma funcțiilor w_1 şi w_2 se determină din condițiile inițiale (4.1.8):

$$\begin{cases} w_1(x-ct) + w_2(x+ct)\big|_{t=0} = g_1(x) \\ \left.\dfrac{\partial w_1(x-ct)}{\partial x} + \dfrac{\partial w_2(x+ct)}{\partial x}\right|_{t=0} = g_2(x) \end{cases} \qquad (4.1.10)$$

Funcția *w(x)* care satisface condițiile (4.1.8) este de forma:

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left[g_1(x-ct) + g_1(x+ct)\right] + \int_{x-ct}^{x+ct} g_2(\xi)d\xi \qquad (4.1.11)$$

Se observă din forma soluției (4.1.9) că aceasta este formată din suprapunerea a două unde: *unda directă* $w_1(x+ct)$ şi *unda inversă* $w_2(x-ct)$. Constanta c reprezintă viteza de deplasare a celor două unde dea lungul axei Ox pozitive (unda directă), respectiv axei Ox negative (unda inversă).

Dacă se consideră condițiile inițiale cu viteză nulă:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad w(x,t)\big|_{t=0} = g_1(x) \quad si \quad \left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \qquad (4.1.12)$$

atunci: $w_1(x-ct) = \dfrac{1}{2}g_1(x-ct) \;\; si \;\; w_2(x+ct) = \dfrac{1}{2}g_1(x+ct)$ (4.1.13)

adică perturbația inițială se împarte în două componente egale una deplasându-se spre stânga (unda indirectă) iar cealaltă spre dreapta (unda directă).

Dacă se consideră firul de lungime L fixat la ambele capete având următoarele condiții inițiale:

$$\begin{aligned} t = 0 \;\Rightarrow\; & w(x,t)\big|_{t=0} = g_1(x) \\ & \left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \end{aligned} \qquad (4.1.14)$$

şi se alege originea axei Ox în capătul din stânga al firului (pentru $x \in [0,L]$) atunci din condițiile la limită ($x=0$ şi $x=L$) se obține:

$$\begin{aligned} w(0,t) &= \frac{1}{2}\left[g_1(-ct) + g_1(ct)\right] = 0 \;\Rightarrow\; g_1(-ct) = -g_1(ct) \\ w(L,t) &= \frac{1}{2}\left[g_1(L-ct) + g_1(L+ct)\right] = 0 \;\Rightarrow\; g_1(L-ct) = -g_1(L+ct) \end{aligned} \qquad (4.1.15)$$

deci este nevoie de o prelungire a funcției $g_1(x)$ pentru valori negative ale lui x respective pentru valori mai mari decât $x=L$. Ținând seama că funcția $g_1(x)$ este simetrică față de origine rezultă:

$$g_1(L-ct)=-g_1(L+ct)=g_1(-L-ct) \tag{4.1.16}$$

deci funcția prelungită $g_1(x)$ în afara domeniului $x\in[0,L]$ este o funcție periodică de perioadă $\lambda=2L$.

Se consideră în continuare funcția $g_1(x)$ pentru $x\in[0,L]$ de forma sinusoidei:

$$g_1(x)=sin\frac{4\pi x}{L} \tag{4.1.17}$$

care satisface condițiile la limită:

$$\begin{gathered} g_1(0)=0; \quad g_1(L/4)=0; \quad g_1(L/2)=0; \\ g_1(3L/4)=0; \quad g_1(L)=0 \end{gathered} \tag{4.1.18}$$

Funcția prelungită în afara domeniului $x\in[0,L]$ este simetrică față de origine şi periodică de perioadă $\lambda=L/2$.

Soluția mişcării (4.1.11) se scrie pentru acest caz:

$$\begin{gathered} w(x,t)=\frac{1}{2}\left[g_1(x-ct)+g_1(x+ct)\right]=\frac{1}{2}\left(sin\frac{4\pi(x-ct)}{L}+sin\frac{4\pi(x+ct)}{L}\right) \\ \Rightarrow \quad w(x,t)=sin\frac{4\pi x}{L}\cdot cos\frac{4\pi ct}{L} \end{gathered} \tag{4.1.19}$$

Se observă că soluția mişcării satisface condițiile la limită (4.1.8) pentru orice moment t al mişcării. Punctele *x=0, x=L/4, x=L/2, x=3L/4 şi , x=L* se numesc noduri, iar undele respective se numesc unde staționare.

Soluția ecuației diferențiale (4.1.7) se obține şi prin metoda separării variabilelor (Bernoulli-Fourier) şi se scrie sub forma:

$$w(x,t)=Y(x)cos(pt-\varphi) \tag{4.1.20}$$

Derivând în raport cu t şi cu x se obține:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}cos(pt-\varphi); \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=-p^2 Y cos(pt-\varphi) \tag{4.1.21}$$

Înlocuind în ecuația diferențială (4.1.7) se obține:

$$\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}+\frac{p^2}{c^2}Y\right)cos(pt-\varphi)=0 \tag{4.1.22}$$

Deoarece $cos(pt-\varphi)$ este o funcție de timp rezultă ecuația diferențială:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}+\frac{p^2}{c^2}Y=0 \tag{4.1.23}$$

care are soluții de forma: $Y(x)=B\cos\left(\frac{p}{c}x\right)+D\sin\left(\frac{p}{c}x\right)$ (4.1.24)

Constantele A şi B se determină din condițiile la limită ale problemei:

$$\begin{cases} w(0,t)=Y(0)\cos(pt-\varphi)=0 \\ w(L,t)=Y(L)\cos(pt-\varphi)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y(0)=0 \\ Y(L)=0 \end{cases} \tag{4.1.25}$$

Rezultă: $B=0$ şi $D\sin\left(\frac{p}{c}L\right)=0 \Rightarrow \frac{p_n}{c}L=n\pi$ (4.1.26)

şi soluția ecuației (4.1.23) se scrie sub forma:

$$Y_n(x)=D_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{4.1.27}$$

Din relația (4.1.26) rezultă pulsațiile proprii ale firului: $p_n=\frac{n\pi c}{L}$ iar din relația (4.1.27) expresiile $\psi_n(x)=\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ se numesc funcții proprii corespunzătoare modului propriu *n* de vibrație.

Soluția problemei corespunzătoare modului *n* de vibrație se scrie:

$$w_n(x,t)=D_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos(p_nt-\varphi_n) \tag{4.1.28}$$

Soluția generală va fi suma tuturor modurilor proprii de vibrație:

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}w_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos(p_nt-\varphi_n) \tag{4.1.29}$$

Constantele de integrare $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots\ \varphi_1, \varphi_1, \varphi_3, \ldots, \varphi_n, \ldots$ se determină din condițiile inițiale (4.1.8): $w(x,0)=g_1(x)$ *si* $\left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=g_2(x)$, sau:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos(\varphi_n)=g_1(x) \\ \sum_{n=1}^{\infty}p_nD_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin(\varphi_n)=g_2(x) \end{cases} \tag{4.1.30}$$

Se înmulțesc ecuațiile (4.1.30) cu $sin\frac{m\pi x}{L}$, se integrează pe intervalul [*0, L*] şi se ține seama de ortogonalitatea modurilor proprii de vibrație:

$$\int_0^L sin\frac{n\pi x}{L} sin\frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0 & daca \quad m \neq n \\ L/2 & daca \quad m = n \end{cases} \tag{4.1.31}$$

obținându-se:

$$\begin{cases} D_m\, cos(\varphi_m) = \frac{2}{L}\int_0^L g_1(x) sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx \\ p_m D_m\, sin(\varphi_m) = \frac{2}{L}\int_0^L g_2(x) sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx \end{cases} \tag{4.1.32}$$

$m = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$

Rezultă imediat constantele de integrare $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots\ \varphi_1, \varphi_1, \varphi_3, \ldots, \varphi_n, \ldots$:

$$tg(\varphi_m) = \frac{1}{p_m}\frac{\int_0^L g_2(x) sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx}{\int_0^L g_1(x) sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx}$$

$$D_m = \frac{2}{L\,cos(\varphi_m)}\int_0^L g_1(x) sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx \tag{4.1.33}$$

$m = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$

4.1.2. Vibrațiile transversale forțate

În acest caz forța distribuită are forma armonică:

$$f(x,t) = f_0(x) cos\,\omega t \tag{4.1.34}$$

şi ecuația (4.1.5) se scrie:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{f_0(x)}{H} cos\,\omega t \tag{4.1.35}$$

Condițiile inițiale ale mişcării sunt:

$$w(x,t)\big|_{t=0} = g_1(x) \qquad si \qquad \frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = g_2(x) \tag{4.1.36}$$

Soluția particulară (staționară) a acestei ecuații este de forma:

$$w(x,t) = Z(x) cos\,\omega t \tag{4.1.37}$$

Derivând în raport cu *t* şi cu *x* se obține:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\cos\omega t;\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=-\omega^2 Z\cos\omega t \tag{4.1.38}$$

Înlocuind în ecuația diferențială (4.1.7) se obține:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}+\frac{\omega^2}{c^2}Z=-\frac{f_0(x)}{H} \tag{4.1.39}$$

Soluția acestei ecuații diferențiale se poate exprima printr-o dezvoltare în serie de funcții proprii a funcției $Z(x)$ care verifică condițiile la limită ale problemei:

$$Z(x)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\psi_n(x) \tag{4.1.40}$$

unde:

$$\psi_n(x)=\sin\frac{p_n x}{c} \tag{4.1.41}$$

Derivând expresia (4.1.40) rezultă:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}p_n^2 D_n\psi_n(x) \tag{4.1.42}$$

Înlocuind în (4.1.39) rezultă:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n^2-\omega^2}{c^2}D_n\psi_n(x)=\frac{f_0(x)}{H} \tag{4.1.43}$$

Se înmulțeşte ecuația (4.1.43) cu $\psi_m(x)=\sin\frac{p_m x}{c}$, se integrează pe intervalul [$0, L$] şi se ține seama de ortogonalitatea modurilor proprii de vibrație:

$$\int_0^L \sin\frac{p_n x}{c}\sin\frac{p_m x}{c}dx=\begin{cases}0 & daca\quad m\neq n\\ L/2 & daca\quad m=n\end{cases} \tag{4.1.44}$$

obținându-se constantele de integrare D_m:

$$D_m=\frac{2c^2}{LH(p_m^2-\omega^2)}\int_0^L f_0(x)\psi_m(x)dx \tag{4.1.45}$$

Înlocuind în expresia (4.1.40) se obține:

$$Z(x)=\frac{2c^2}{LH}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\psi_m(x)}{p_m^2-\omega^2}\int_0^L f_0(x)\psi_m(x)dx \tag{4.1.46}$$

deci soluția staționară (4.1.37) se scrie:

$$w(x,t)=\frac{2c^2\cos\omega t}{LH}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\psi_m(x)}{p_m^2-\omega^2}\int_0^L f_0(x)\psi_m(x)dx \tag{4.1.47}$$

Se observă că dacă pulsația forței perturbatoare devine egală cu una din pulsațiile proprii p_n se obține fenomenul de rezonanță $w(x,t)\to\infty$.

Dacă forța perturbatoare este o forță concentrată în punctual $x_0 \in [0,L]$ atunci se înlocuieşte în expresia (4.1.47):

$$f_0(x) = F_0 \cdot \delta(x - x_0) \tag{4.1.48}$$

unde δ este funcția Dirac având proprietățile:

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 1 & daca \quad x = x_0 \\ 0 & daca \quad x \neq x_0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \delta(x)dx = 1 \tag{4.1.49}$$

rezultă:

$$\int_0^L f_0(x)dx = F_0; \qquad \int_0^L f_0(x)\psi_m(x)dx = F_0\psi_m(x_0) \tag{4.1.50}$$

soluția în acest caz se scrie:

$$w(x,t) = \frac{2F_0c^2 \cos\omega t}{LH} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\psi_m(x)\psi_m(x_0)}{p_m^2 - \omega^2} \tag{4.1.51}$$

4.2. Vibrațiile longitudinale ale firelor

Se consideră un fir omogen de secțiune constantă, flexibil şi inextensibil tensionat la capete şi un element din acest fir de lungime *dx.* Asupra acestui element acționează forța distribuită *f(x,t)* pe direcția axei Ox precum şi forțele de legătură *H, H+dH,* ca în figura 4.2.1.a,b.

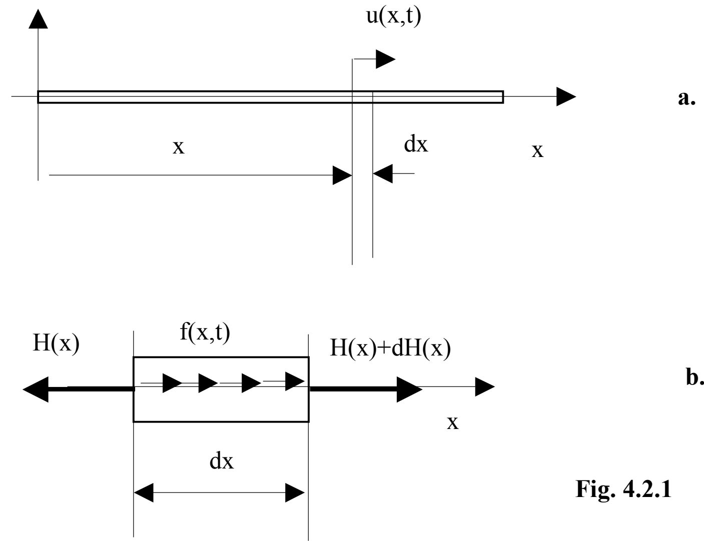


Fig. 4.2.1

Conform principiului d'Alembert, ecuația de echilibru dinamic a forțelor care acționează asupra elementului de lungime *dx* este (fig. 4.2.1.b):

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dm + f(x,t)dx - H + H + dH = 0 \qquad (4.2.1)$$

Ținând seama că $dm = \rho A \cdot dx$ şi diferențiala efortului axial *H* se scrie:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x}dx \qquad (4.2.2)$$

şi relația dintre efortul axial tensiune şi deplasare se scrie:

$$H = A\sigma = EA\varepsilon = EA\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (4.2.3)$$

înlocuind în ecuația (4.2.1) se obține:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{f(x,t)}{EA} \qquad (4.2.4)$$

unde s-a notat $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

S-a obținut așadar o ecuație diferențială de aceeași formă cu cea de la vibrațiile transversale (4.1.5).

Pentru vibrațiile libere și pentru condițiile inițiale:

$$u(x,t)\big|_{t=0} = g_1(x) \tag{4.2.5}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = g_2(x) \tag{4.2.6}$$

soluția prin metoda d'Alembert este de forma:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[g_1(x-ct) + g_1(x+ct)\right] + \int_{x-ct}^{x+ct} g_2(\xi)d\xi \tag{4.2.7}$$

iar prin metoda Bernoulli-Fourier de forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(p_n t - \varphi_n) \tag{4.2.8}$$

unde B_n și φ_n se determină din condițiile inițiale iar p_n sunt pulsațiile proprii:

$$p_n = \frac{n\pi c}{L} \tag{4.2.9}$$

În cazul vibrațiilor forțate cu forțe perturbatoare armonice distribuite se obține soluția staționară de forma:

$$u(x,t) = \frac{2c^2 \cos\omega t}{L\ EA} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\psi_m(x)}{p_m^2 - \omega^2} \int_0^L f_0(x)\psi_m(x)dx \tag{4.2.10}$$

În cazul vibrațiilor forțate cu forțe perturbatoare armonice concentrate se obține soluția staționară de forma:

$$u(x,t) = \frac{2F_0 c^2 \cos\omega t}{L\ EA} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\psi_m(x)\psi_m(x_0)}{p_m^2 - \omega^2} \tag{4.2.11}$$

4.3. Vibrațiile longitudinale ale barelor

Se consideră o bară omogenă de secțiune constantă şi un element din această bară de lungime *dx*. Asupra acestui element acționează forța distribuită *f(x,t)* pe direcția axei Ox precum şi forțele de legătură *N*, *N+dN*, astfel încât acesta se deplasează pe direcția axei Ox cu cu *u(x,t)* ca în figura 4.3.1.a,b.

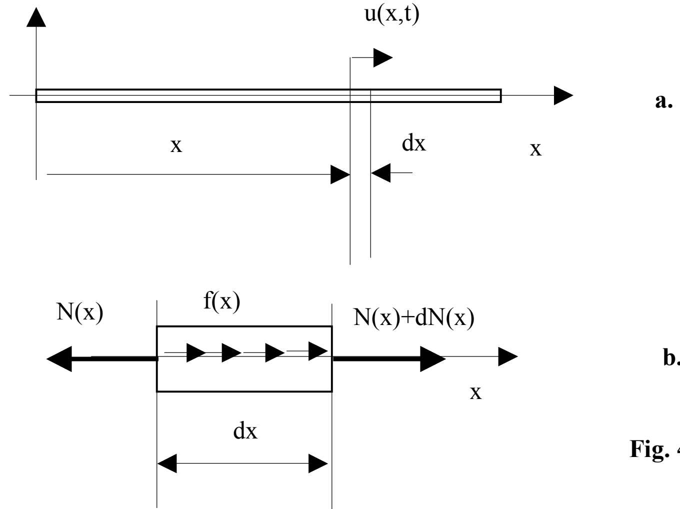


Fig. 4.3.1

Conform principiului d'Alembert, ecuația de echilibru dinamic a forțelor care acționează asupra elementului de lungime *dx* este (fig. 4.3.1.b):

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dm + f(x,t)dx - N + N + dN = 0 \qquad (4.3.1)$$

Ținând seama că $dm = \rho A \cdot dx$ şi de faptul că diferențiala efortului axial *N* este:

$$dN = \frac{\partial N}{\partial x}dx \qquad (4.3.2)$$

iar relația dintre efortul axial *N*, tensiunea σ şi deplasarea *u(x,t)* se poate scrie sub forma:

$$N = A\sigma = EA\varepsilon = EA\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (4.3.3)$$

înlocuind în ecuația (4.3.1) se obține:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{f(x,t)}{EA} \qquad (4.3.4)$$

unde s-a notat $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

S-a obținut aşadar o ecuație diferențială de aceeaşi formă cu cea de la vibrațiile longitudinale ale firului.

4.3.1. Vibrații longitudinale libere

Condițiile inițiale se scriu:

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = g_1(x) \tag{4.3.5}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = g_2(x) \tag{4.3.6}$$

soluția prin metoda d'Alembert este de forma:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[g_1(x-ct) + g_1(x+ct)\right] + \int_{x-ct}^{x+ct} g_2(\xi)d\xi \tag{4.3.7}$$

iar prin metoda Bernoulli-Fourier:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(p_n t - \varphi_n) \tag{4.3.8}$$

unde B_n și φ_n se determină din condițiile inițiale iar p_n sunt pulsațiile proprii.

Pentru bara fixată la ambele capete pulsațiile proprii sunt de forma:

$$p_n = \frac{n\pi c}{L} \tag{4.3.9}$$

Dacă se consideră că o bară vibrează după un singur mod de vibrație atunci:

$$\begin{cases} u(x,t) = Y(x)\cos(pt-\varphi) \quad \Leftrightarrow \\ u(x,t) = \left(B\cos\frac{p}{c}x + D\sin\frac{p}{c}x\right)\cos(pt-\varphi) \end{cases} \tag{4.3.10}$$

iar efortul axial se scrie:

$$\begin{cases} N(x,t) = EA\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = EA\cdot Y'(x)\cos(pt-\varphi) \\ N(x,t) = \frac{p}{c}EA\left(-B\sin\frac{p}{c}x + D\cos\frac{p}{c}x\right)\cos(pt-\varphi) \end{cases} \tag{4.3.11}$$

Condițiile la limită la capete se pot scrie:

- pentru deplasări:

$$\begin{cases} x = 0 \quad \Rightarrow \quad u(0,t) = u_1\cos(pt-\varphi) \\ x = L \quad \Rightarrow \quad u(L,t) = u_2\cos(pt-\varphi) \end{cases} \tag{4.3.12}$$

- pentru eforturile axiale:

$$\begin{cases} x = 0 & \Rightarrow \quad N(0,t) = F_1 \cos(pt - \varphi) \\ x = L & \Rightarrow \quad N(L,t) = F_2 \cos(pt - \varphi) \end{cases} \tag{4.3.13}$$

Înlocuind condițiile la limită (4.3.12) în expresiile deplasării (4.3.10) şi condițiile la limită (4.3.13) în expresiile eforturilor (4.3.11) se obține:

$$\begin{cases} B = u_1 \\ D = \dfrac{c}{EAp} F_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 \cos\left(\dfrac{pL}{c}\right) + F_1 \dfrac{c}{EAp} \sin\left(\dfrac{pL}{c}\right) = u_2 \\ -u_1 \dfrac{EAp}{c} \sin\left(\dfrac{pL}{c}\right) + F_1 \cos\left(\dfrac{pL}{c}\right) = F_2 \end{cases} \tag{4.3.14}$$

Relațiile de legătură dintre valorile amplitudinilor deplasărilor şi eforturilor axiale de la capetele unui tronson (4.3.14) se mai scriu matriceal sub forma:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\dfrac{pL}{c}\right) & \dfrac{c}{EAp} \sin\left(\dfrac{pL}{c}\right) \\ -\dfrac{EAp}{c} \sin\left(\dfrac{pL}{c}\right) & \cos\left(\dfrac{pL}{c}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ F_1 \end{Bmatrix} \tag{4.3.15}$$

Acestea sunt relații generale pentru rezolvarea unei probleme de vibrații longitudinale ale unei bare de secțiune constantă sau variabilă în trepte, cu sau fără mase concentrate.

Exemplul 1.

Să se determine pulsațiile şi modurile proprii de vibrații longitudinale ale unei bare de lungime L fixată la ambele capete, având secțiunea constantă, modulul de elasticitate E şi densitatea ρ cunoscute (fig. 4.3.2).

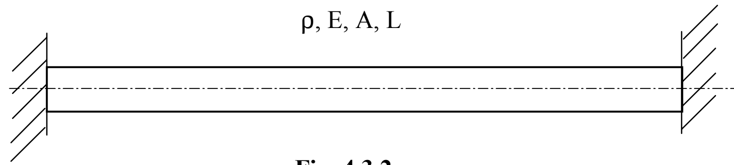


Fig. 4.3.2

Ecuația vibrațiilor longitudinale după un mod de vibrație este:

$$u(x,t) = \left(B \cos\frac{p}{c} x + D \sin\frac{p}{c} x \right) \cos(pt - \varphi) \tag{4.3.16}$$

Introducând condițiile la limită ale problemei se obține:

$$\begin{cases} u(0,t) = B \cos(pt - \varphi) = 0 & \Rightarrow B = 0 \\ u(L,t) = D \sin\left(\dfrac{p}{c} L\right) \cos(pt - \varphi) = 0 & \Rightarrow \dfrac{p_n}{c} L = n\pi \end{cases} \tag{4.3.17}$$

deci pulsațiile şi modurile proprii sunt: $p_n = \dfrac{n\pi c}{L} = \dfrac{n\pi}{L}\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$ (4.3.18)

$$u(x,t) = D \cdot sin\left(\frac{p_n}{c}x\right)cos(pt-\varphi) \qquad (4.3.19)$$

Exemplul 2.

Să se determine pulsațiile şi modurile proprii de vibrații longitudinale ale unei bare de lungime *L* fixată la unul din capete iar la celălat capăt liberă, având secțiunea constantă, modulul de elasticitate *E* şi densitatea ρ cunoscută (fig. 4.3.4).

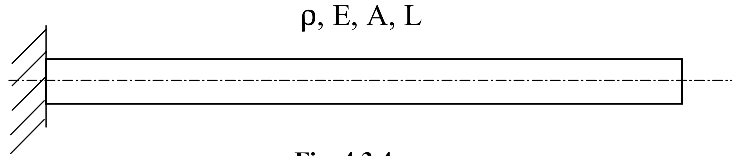


Fig. 4.3.4

Ecuația vibrațiilor longitudinale după un mod de vibrație este:

$$u(x,t) = \left(B cos\frac{p}{c}x + D sin\frac{p}{c}x\right)cos(pt-\varphi) \qquad (4.3.20)$$

Introducând condițiile la limită ale problemei se obține:

$$\begin{cases} u(0,t) = B cos(pt-\varphi) = 0 \qquad \Rightarrow B = 0 \\ N(L,t) = EA\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=L} = EA \cdot D\dfrac{p}{c}cos\left(\dfrac{p}{c}L\right)cos(pt-\varphi) = 0 \end{cases} \qquad (4.3.21)$$

$$\Rightarrow \frac{p_n}{c}L = (2n-1)\frac{\pi}{2}, \qquad n = 1,\ 2, 3,...$$

deci pulsațiile şi modurile proprii de vibrație ale barei sunt:

$$p_n = (2n-1)\frac{\pi}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (4.3.22)$$

$$u(x,t) = D \cdot sin\left(\frac{p_n}{c}x\right)cos(pt-\varphi) \qquad (4.3.23)$$

Exemplul 3.

Să se determine pulsațiile şi modurile proprii de vibrații longitudinale ale unei bare de lungime *L* fixată la unul din capete iar la celălat capăt liberă, având secțiunea în trepte, modulul de elasticitate *E* şi densitatea ρ cunoscută (fig. 4.3.5).

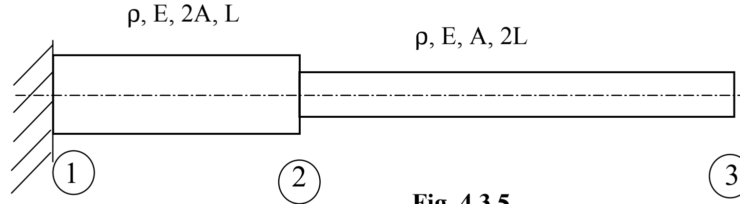


Fig. 4.3.5

Ecuația vibrațiilor longitudinale după un mod de vibrație pentru fiecare din cele două tronsoane este:

$$u(x,t)=\begin{cases}\left(B_1\cos\frac{p}{c}x+D_1\sin\frac{p}{c}x\right)\cos(pt-\varphi) & pentru\;\; x\in[0,L]\\ \left(B_2\cos\frac{p}{c}x+D_2\sin\frac{p}{c}x\right)\cos(pt-\varphi) & pentru\;\; x\in[L,3L]\end{cases} \tag{4.3.24}$$

Condițiile la limită ale problemei sunt:

$$\begin{cases}u(0,t)=u_1=0 \quad u(L,t)=u_2 \quad u(3L,t)=u_3\\ N(0,t)=N_1 \quad N(L,t)=N_2 \quad N(3L,t)=N_3=0\end{cases} \tag{4.3.25}$$

Ecuațiile de legătură (4.3.15) dintre valorile amlitudinilor deplasărilor şi eforturilor axiale la capetele fiecărui tronson se scriu:

- pentru primul tronson (1-2):

$$\begin{Bmatrix}u_2\\F_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{pL}{c}\right) & \frac{c}{2EAp}\sin\left(\frac{pL}{c}\right)\\ -\frac{2EAp}{c}\sin\left(\frac{pL}{c}\right) & \cos\left(\frac{pL}{c}\right)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\F_1\end{Bmatrix} \tag{4.3.26}$$

- pentru al doilea tronson (2-3):

$$\begin{Bmatrix}u_3\\0\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{2pL}{c}\right) & \frac{c}{EAp}\sin\left(\frac{2pL}{c}\right)\\ -\frac{EAp}{c}\sin\left(\frac{2pL}{c}\right) & \cos\left(\frac{2pL}{c}\right)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_2\\F_2\end{Bmatrix} \tag{4.3.27}$$

Din cele două ecuații (4.3.26) şi (4.3.26) se obține următoarea ecuație :

$$\begin{Bmatrix}u_3\\0\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{2pL}{c}\right) & \frac{c}{EAp}\sin\left(\frac{2pL}{c}\right)\\ -\frac{EAp}{c}\sin\left(\frac{2pL}{c}\right) & \cos\left(\frac{2pL}{c}\right)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{c}{2EAp}\sin\left(\frac{2pL}{c}\right)\\ \cos\left(\frac{2pL}{c}\right)\end{Bmatrix}F_1 \tag{4.3.28}$$

A doua ecuație a sistemului matrieal (4.3.28) se scrie:

$$0=\left[-\frac{1}{2}sin\left(\frac{2pL}{c}\right)sin\left(\frac{pL}{c}\right)+cos\left(\frac{2pL}{c}\right)cos\left(\frac{pL}{c}\right)\right]F_1$$
$$\Leftrightarrow \quad tg\left(\frac{2pL}{c}\right)tg\left(\frac{pL}{c}\right)=2 \qquad (4.3.29)$$

Se rezolvă ecuația (4.3.29) reprezentând grafic cele două funcții:

$$f(x)=tg(2x) \;\; si \;\; g(x)=\frac{2}{tg(x)}, \qquad x=\frac{pL}{c} \qquad (4.3.30)$$

apoi se determină cu ajutorul programului Mathcad intervalele pentru rădăcinile ecuației *f(x)=g(x)* ce corespund intersecțiilor celor două grafice din figura 4.3.6.

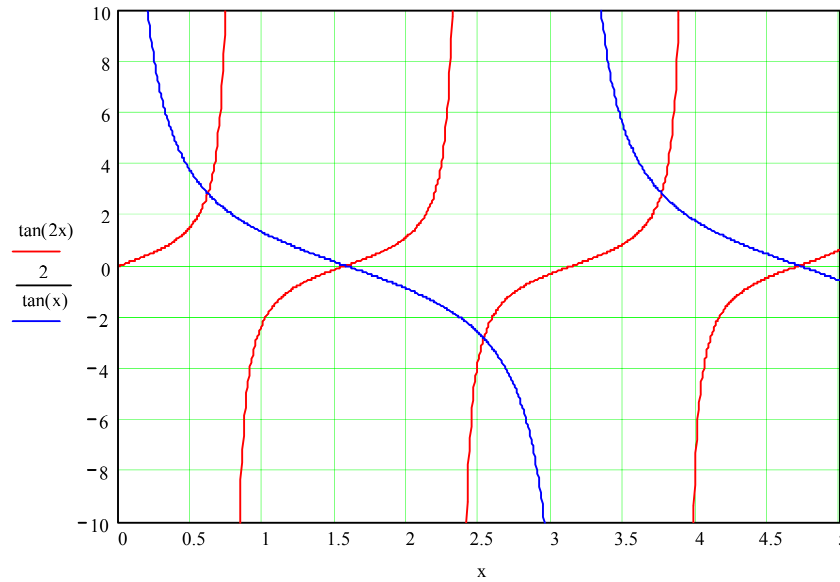


Fig. 4.3.6. Obținerea soluțiilor pentru primele 4 pulsații proprii

Se obțin astfel primele patru rădăcini:

$$\mathrm{root}\left(\tan(2x)-\frac{2}{\tan(x)},x,0.5,0.7\right)=0.615 \qquad \mathrm{root}\left(\tan(2x)-\frac{2}{\tan(x)},x,1.5,1.7\right)=1.571$$

$$\mathrm{root}\left(\tan(2x)-\frac{2}{\tan(x)},x,2.5,2.7\right)=2.526 \qquad \mathrm{root}\left(\tan(2x)-\frac{2}{\tan(x)},x,3.5,3.8\right)=3.757$$

Deci primele patru pulsații proprii sunt:

$$p_1=\frac{0,615}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}};\;\; p_2=\frac{1,571}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}};\;\; p_3=\frac{2,256}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}};\;\; p_4=\frac{3,757}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}. \qquad (4.3.31)$$

Exemplul 4.

Să se determine pulsațiile şi modurile proprii de vibrații longitudinale ale unei bare de lungime *L* de secțiunea constantă, modulul de elasticitate *E* şi densitatea *ρ,* fixată la unul din capete iar la celălalt capăt liber având o masă concentrată m (fig. 4.3.7).

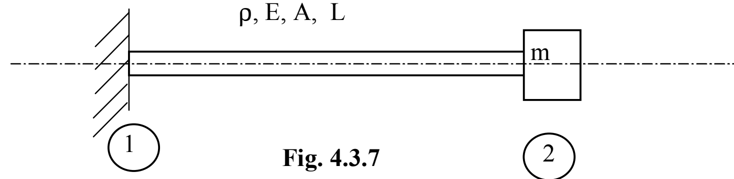


Fig. 4.3.7

Ecuația vibrațiilor longitudinale după un mod de vibrație este:

$$u(x,t)=\left(B\cos\frac{p}{c}x+D\sin\frac{p}{c}x\right)\cos(pt-\varphi) \qquad (4.3.32)$$

Condițiile la limită ale problemei se scriu:

$$\begin{cases} u(0,t)=B\cos(pt-\varphi)=0 & \Rightarrow B=0 \\ N(L,t)=EA\left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}=-m\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=mp^2u(L,t) \end{cases} \qquad (4.3.33)$$

Ecuațiile de legătură (4.3.15) dintre valorile amplitudinilor deplasărilor şi eforturilor axiale la capetele tronsonului (1-2) se scriu:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ mp^2u_2 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\left(\dfrac{pL}{c}\right) & \dfrac{c}{EAp}\sin\left(\dfrac{pL}{c}\right) \\ -\dfrac{EAp}{c}\sin\left(\dfrac{pL}{c}\right) & \cos\left(\dfrac{pL}{c}\right) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ F_1 \end{Bmatrix} \qquad (4.3.33)$$

care este echivalentă cu:

$$\begin{cases} u_2=\dfrac{cF_1}{EAp}\sin\left(\dfrac{pL}{c}\right) \\ mp^2u_2=F_1\cos\left(\dfrac{pL}{c}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \quad \frac{1}{mp^2}=\frac{c}{EAp}tg\left(\frac{pL}{c}\right) \qquad (4.3.34)$$

$$sau: \qquad \frac{pL}{c}\cdot\ tg\left(\frac{pL}{c}\right)=\frac{m_b}{m}; \quad m_b=\rho AL$$

Pentru cazul $\dfrac{m_b}{m}=\dfrac{1}{2}$ se obține ecuația pulsațiilor proprii:

$$tg(x)=\frac{1}{2x}$$

care se rezolvă grafic si numeric cu ajutorul programului Mathcad (fig. 4.3.8). Se obțin astfel primele patru rădăcini:

$$\mathrm{root}\left(\tan(x)-\frac{1}{2\cdot x},x,0.5,1\right)=0.653 \qquad \mathrm{root}\left(\tan(x)-\frac{1}{2\cdot x},x,3,4\right)=3.292$$

$$\mathrm{root}\left(\tan(x)-\frac{1}{2\cdot x},x,6,7\right)=6.362 \qquad \mathrm{root}\left(\tan(x)-\frac{1}{2\cdot x},x,9,10\right)=9.477$$

Deci primele patru pulsații proprii sunt:

$$p_1=\frac{0{,}653}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}};\ \ p_2=\frac{3{,}292}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}};$$
$$p_3=\frac{6{,}362}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}};\ \ p_4=\frac{9{,}477}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}. \tag{4.3.35}$$

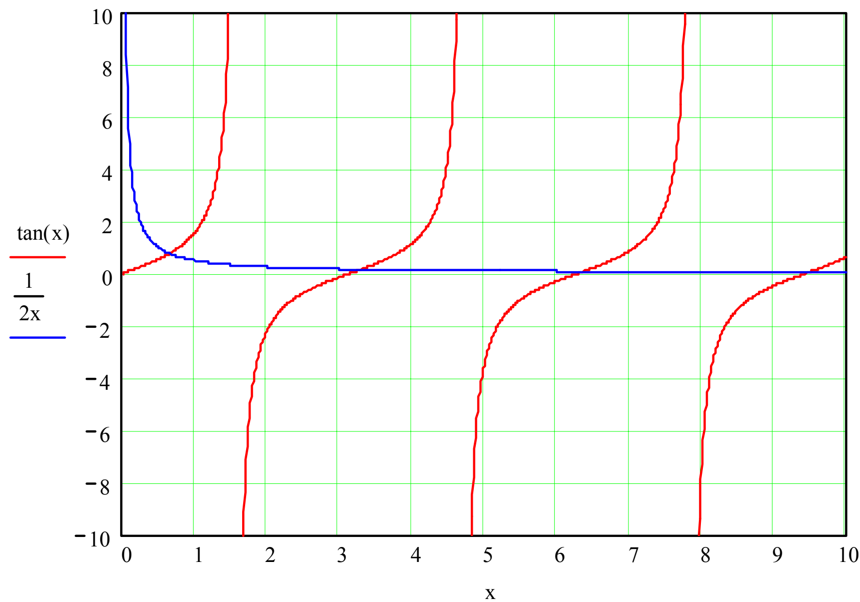


Fig. 4.3.8. Obținerea soluțiilor pentru primele 4 pulsații proprii

4.3.2. Vibrații longitudinale forțate

În cazul vibrațiilor forțate cu forțe perturbatoare armonice distribuite de forma $f(x,t)=f_0(x)cos\,\omega t$ soluția staționară se obține în acelaşi mod ca şi în cazul vibrațiilor firelor şi este de forma (4.2.10):

$$u(x,t)=\frac{2c^2 cos\,\omega t}{L\;EA}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\psi_m(x)}{p_m^2-\omega^2}\int_0^L f_0(x)\psi_m(x)dx \qquad (4.3.36)$$

În cazul vibrațiilor forțate cu forțe perturbatoare armonice concentrate în x_0 de forma $F=F_0\,cos\,\omega t$ se obține soluția staționară de forma (4.2.11):

$$u(x,t)=\frac{2F_0c^2 cos\,\omega t}{L\;EA}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\psi_m(x)\psi_m(x_0)}{p_m^2-\omega^2} \qquad (4.3.37)$$

Exemplu

Să se determine pulsațiile şi modurile proprii de vibrații longitudinale ale unei bare de lungime L având secțiunea constantă, modulul de elasticitate E şi densitatea ρ cunoscute, fixată la unul din capete iar la celălat capăt acționează o forță armonică concentrată $F=F_0\,cos\,\omega t$ (fig. 4.3.9).

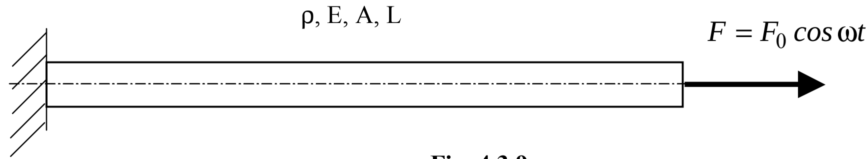


Fig. 4.3.9

Funcțiile proprii şi pulsațiile proprii determinate conform (4.3.22) şi (4.3.23) sunt: $p_m=(2m-1)\frac{\pi c}{2L}$ respectiv: $\psi_m(x)=sin\frac{(2m-1)\pi}{2L}x$, $m=1, 2,..$

Valoarea în punctual $x_0=L$ a funcțiilor proprii $\psi_m(x)$ este:

$$\psi_m(x_0)=sin\frac{(2n+1)\pi}{2L}L=(-1)^m \qquad (4.3.38)$$

Soluția staționară a vibrațiilor conform (4.3.37) va fi:

$$u(x,t)=\frac{2F_0c^2 cos\,\omega t}{L\;EA}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{p_m^2-\omega^2}sin\frac{(2m-1)\pi}{2L}x \qquad (4.3.39)$$

4.4. Vibrațiile torsionale ale barelor de secțiune circulară sau inelară

Se consideră o bară omogenă de secțiune circulară sau inelară şi un element din această bară de lungime *dx*. Asupra acestui element acționează un cuplu torsional distribuit $m_t(x,t)$ pe direcția axei Ox precum şi momentele de legătură din capete M_t, M_t+dM_t, astfel încât acesta se roteşte în jurul axei Ox cu cu $\theta(x,t)$ ca în figura 4.4.1.a,b.

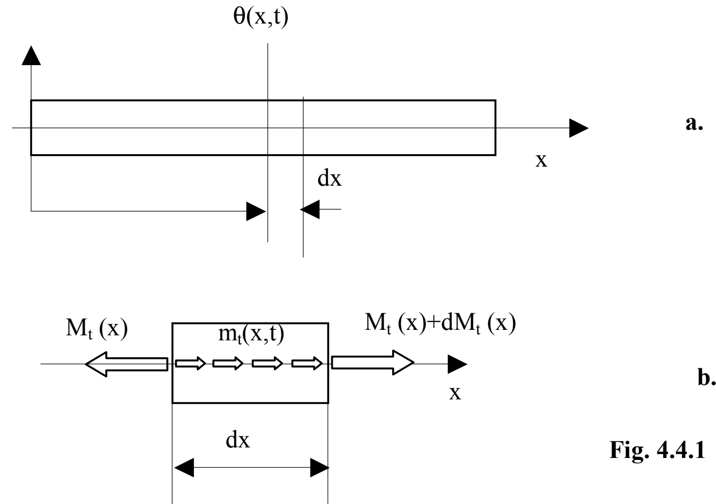


Fig. 4.4.1

Conform principiului d'Alembert, ecuația de echilibru dinamic a momentelor care acționează asupra elementului de lungime *dx* este (fig. 4.4.1.b):

$$-\rho I_p \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}dx + m_t(x,t)dx - M_t + M_t + dM_t = 0 \qquad (4.4.1)$$

Ținând seama că diferențiala efortului torsional dM_t se scrie:

$$dM_t = \frac{\partial M_t}{\partial x}dx \qquad (4.4.2)$$

şi relația dintre efortul torsional M_t şi rotirea $\theta(x,t)$ se scrie:

$$M_t = GI_p\frac{\partial\theta}{\partial x} \qquad (4.4.3)$$

înlocuind în ecuația (4.4.1) se obține:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = -\frac{m_t(x,t)}{GI_p} \qquad (4.4.4)$$

unde s-a notat $c = \sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$

S-a obținut aşadar o ecuație diferențială de aceeaşi formă cu cea de la vibrațiile longitudinale ale firelor şi barelor.

4.4.1. Vibrații torsionale libere

Ecuația diferențială a vibrațiilor torsionale (4.4.4) se scrie:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=0 \qquad (4.4.5)$$

Condițiile inițiale se scriu:

$$\theta(x,t)\Big|_{t=0}=g_1(x) \qquad (4.4.6)$$

$$\left.\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=g_2(x) \qquad (4.4.7)$$

soluția prin metoda d'Alembert este de forma:

$$\theta(x,t)=\frac{1}{2}\left[g_1(x-ct)+g_1(x+ct)\right]+\int_{x-ct}^{x+ct}g_2(\xi)d\xi \qquad (4.4.8)$$

iar prin metoda Bernoulli-Fourier:

$$\theta(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(p_nt-\varphi_n) \qquad (4.4.9)$$

unde D_n şi φ_n se determină din *condițiile inițiale* iar p_n sunt pulsațiile proprii.

Dacă se consideră că bara vibrează după un singur mod de vibrație, rotirea se scrie:

$$\begin{cases}\theta(x,t)=Y(x)\cos(pt-\varphi) \qquad \Leftrightarrow\\ \theta(x,t)=\left(B\cos\frac{p}{c}x+D\sin\frac{p}{c}x\right)\cos(pt-\varphi)\end{cases} \qquad (4.4.10)$$

iar efortul axial de torsiune se scrie:

$$\begin{cases}M_t(x,t)=GI_p\dfrac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}=GI_p\cdot Y'(x)\cos(pt-\varphi)\\ M_t(x,t)=\dfrac{p}{c}GI_p\left(-B\sin\dfrac{p}{c}x+D\cos\dfrac{p}{c}x\right)\cos(pt-\varphi)\end{cases} \qquad (4.4.11)$$

Condițiile la limită la capete se scriu:

- pentru deplasări:

$$\begin{cases}x=0 \quad \Rightarrow \quad \theta(0,t)=\theta_1\cos(pt-\varphi)\\ x=L \quad \Rightarrow \quad \theta(L,t)=\theta_2\cos(pt-\varphi)\end{cases} \qquad (4.4.12)$$

- pentru eforturile axiale:

$$\begin{cases} x = 0 \quad \Rightarrow \quad M_t(0,t) = M_1 \cos(pt - \varphi) \\ x = L \quad \Rightarrow \quad M_t(L,t) = M_2 \cos(pt - \varphi) \end{cases} \tag{4.4.13}$$

Înlocuind condițiile la limită (4.4.12) și (4.4.13) în expresiile rotirii (4.4.10) și ale eforturilor torsionale (4.4.11) se obține:

$$\begin{cases} B = \theta_1 \\ D = \dfrac{c}{GI_p p} M_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 \cos\left(\dfrac{pL}{c}\right) + M_1 \dfrac{c}{GI_p p} \sin\left(\dfrac{pL}{c}\right) = \theta_2 \\ -\theta_1 \dfrac{GI_p p}{c} \sin\left(\dfrac{pL}{c}\right) + M_1 \cos\left(\dfrac{pL}{c}\right) = M_2 \end{cases} \tag{4.4.14}$$

Relațiile de legătură dintre valorile amplitudinilor deplasărilor și eforturilor axiale de la capetele unui tronson (4.4.14) se mai scriu matriceal sub forma:

$$\begin{Bmatrix} \theta_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\dfrac{pL}{c}\right) & \dfrac{c}{EAp} \sin\left(\dfrac{pL}{c}\right) \\ -\dfrac{EAp}{c} \sin\left(\dfrac{pL}{c}\right) & \cos\left(\dfrac{pL}{c}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} \tag{4.4.15}$$

Acestea sunt relații generale pentru rezolvarea unei probleme de vibrații torsionale ale unei bare de secțiune circulară constantă sau variabilă în trepte, cu sau fără mase concentrate.

Exemplul 1.

Bara liberă la ambele capete (fig. 4.4.2)



Fig. 4.4.2

condițiile la limită sunt: $M_1 = 0;\ M_2 = 0$ și relația (4.4.14) devine:

$$-\theta_1 \frac{GI_p p}{c} \sin\frac{pL}{c} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_n L}{c} = n\pi \quad \Rightarrow \quad p_n = \frac{n\pi c}{L} \tag{4.4.16}$$

Din relația (4.4.11) se obține:

$$M_t(0,t) = \frac{p}{c} GI_p D \cos(pt - \varphi) = 0 \Rightarrow D = 0 \tag{4.4.17}$$

Funcțiile proprii corespunzătoare sunt:

$$\begin{gathered} \theta(x,t) = \left(B_n \cos\frac{p_n}{c} x\right) \cos(pt - \varphi) \Rightarrow \\ \psi_n = \cos\frac{p_n}{c} x \quad \Rightarrow \quad \psi_n = \cos\frac{n\pi}{L} x \end{gathered} \tag{4.4.18}$$

Exemplul 2.

Bara fixată la ambele capete (fig. 4.4.3)

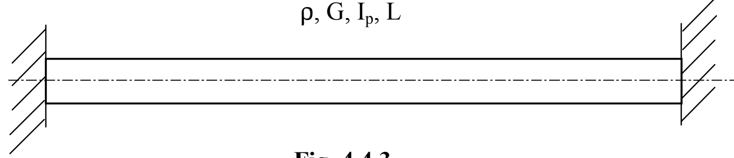


Fig. 4.4.3

Condițiile la limită sunt $\theta_1 = 0;\ \theta_2 = 0$ şi relația (4.4.14) devine:

$$M_1 \frac{c}{GI_p p} sin \frac{pL}{c} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_n L}{c} = n\pi \quad \Rightarrow \quad p_n = \frac{n\pi c}{L} \qquad (4.4.19)$$

Din relația (4.4.10) se obține:

$$\theta(0,t) = B cos(pt - \varphi) = 0 \Rightarrow B = 0 \qquad (4.4.20)$$

Funcțiile proprii corespunzătoare sunt:

$$\theta(x,t) = \left(D_n sin \frac{p_n}{c} x \right) cos(pt - \varphi) \Rightarrow$$

$$\psi_n = sin \frac{p_n}{c} x \quad \Rightarrow \quad \psi_n = sin \frac{n\pi}{L} x \qquad (4.4.21)$$

Exemplul 3.

Bara fixată la un capăt şi liberă la celălalt (fig. 4.4.4)

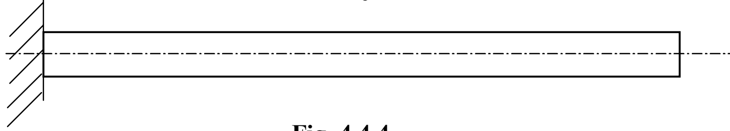


Fig. 4.4.4

condițiile la limită sunt: $\theta_1 = 0;\ M_2 = 0$ şi relația (4.4.14) devine:

$$M_1 cos \frac{pL}{c} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_n L}{c} = \frac{2n-1}{2}\pi \quad \Rightarrow \quad p_n = \frac{(2n-1)\pi c}{2L} \qquad (4.4.22)$$

Din relația (4.4.11) se obține: $\theta(0,t) = B cos(pt - \varphi) = 0 \Rightarrow B = 0$ (4.4.23)

Funcțiile proprii corespunzătoare sunt:

$$\theta(x,t) = \left(D_n sin \frac{p_n}{c} x \right) cos(pt - \varphi) \Rightarrow$$

$$\psi_n = sin \frac{p_n}{c} x \quad \Rightarrow \quad \psi_n = sin \frac{(2n-1)\pi}{2L} x \qquad (4.4.24)$$

Exemplul 4.

Bara fixată la unul din capete iar la celălalt capăt liberă, având secțiunea în trepte (fig. 4.3.5).

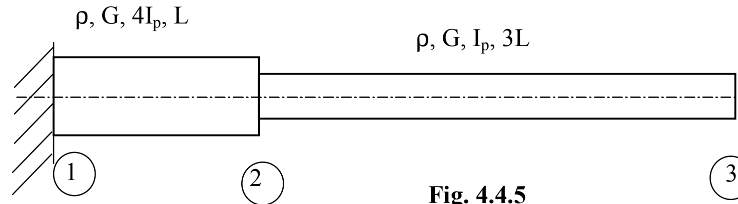


Fig. 4.4.5

Condițiile la limită sunt:

$\theta_1 = 0;\ M_3 = 0$ şi relația (4.4.14) se scrie:

$$\begin{aligned}
&tronson\ 1-2: \begin{cases} M_1 \dfrac{c}{GI_{p1}p} sin\left(\dfrac{pL_1}{c}\right) = \theta_2 \\ M_1 cos\left(\dfrac{pL_1}{c}\right) = M_2 \end{cases} \\
&tronson\ 2-3: \begin{cases} \theta_2 cos\left(\dfrac{pL_2}{c}\right) + M_2 \dfrac{c}{GI_{p2}p} sin\left(\dfrac{pL_2}{c}\right) = \theta_3 \\ -\theta_2 \dfrac{GI_{p2}p}{c} sin\left(\dfrac{pL_2}{c}\right) + M_2 cos\left(\dfrac{pL_2}{c}\right) = 0 \end{cases}
\end{aligned} \qquad (4.4.25)$$

Din primele două ecuații şi din ecuația a patra (4.4.25) rezultă:

$$\begin{cases} \dfrac{c}{GI_{p1}p} tg \dfrac{pL_1}{c} = \dfrac{\theta_2}{M_2} \\ \dfrac{\theta_2}{M_2} \dfrac{GI_{p2}p}{c} tg \dfrac{pL_2}{c} = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad tg \frac{pL_1}{c} tg \frac{pL_2}{c} = \frac{I_{p1}}{I_{p2}} \qquad (4.4.26)$$

Pentru cazul particular din figura 4.3.5 *($L_1=L$, $L_2=3L$, $I_{p1}=4I_p$, $I_{p1}=I_p$)* se obține ecuația transcendentă:

$$4\ tg3x = \frac{1}{tgx}, \qquad x = \frac{pL}{c} \qquad (4.4.27)$$

iar soluțiile ecuației (4.4.27) se determină grafic din fig. 4.4.6 cu ajutorul programului Mathcad:

$$\mathrm{root}\left(4\tan(3x)-\frac{1}{\tan(x)},x,0.1,0.4\right)=0.255 \qquad \mathrm{root}\left(4\tan(3x)-\frac{1}{\tan(x)},x,1,1.3\right)=1.09$$

$$\mathrm{root}\left(4\tan(3x)-\frac{1}{\tan(x)},x,2,2.2\right)=2.051 \qquad \mathrm{root}\left(4\tan(3x)-\frac{1}{\tan(x)},x,2.8,3\right)=2.887$$

$$\mathrm{root}\left(4\tan(3x)-\frac{1}{\tan(x)},x,3.3,3.4\right)=3.396 \qquad \mathrm{root}\left(4\tan(3x)-\frac{1}{\tan(x)},x,4,4.5\right)=4.232$$

Se obțin astfel primele 6 pulsații proprii:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{0{,}255}{L}\sqrt{\frac{G}{\rho}}; \quad p_2 = \frac{1{,}09}{L}\sqrt{\frac{G}{\rho}}; \quad p_3 = \frac{2{,}051}{L}\sqrt{\frac{G}{\rho}}; \\ p_4 &= \frac{2{,}887}{L}\sqrt{\frac{G}{\rho}}; \quad p_5 = \frac{3{,}396}{L}\sqrt{\frac{G}{\rho}}; \quad p_6 = \frac{4{,}232}{L}\sqrt{\frac{G}{\rho}}. \end{aligned} \tag{4.4.28}$$

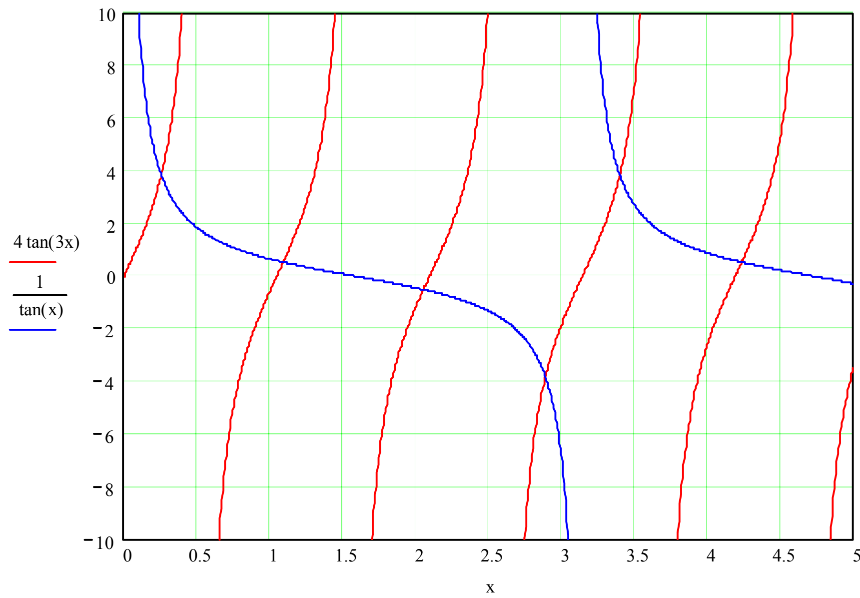


Fig. 4.4.6. Obținerea soluțiilor pentru primele 6 pulsații proprii

Exemplul 5.

Bara liberă având la capete doi volanți de momente de inerție J_1 şi J_2 (fig. 4.4.7) condițiile la limită rezultă din egalitatea dintre amplitudinile momentelor M_1 şi M_2 şi cuplurile de inerție corespunzătoare ale celor doi volanți:

$$M_1 = -J_1 \left.\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}\right|_{x=0} = p^2 J_1 \theta_1; \quad M_2 = -J_2 \left.\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}\right|_{x=L} = p^2 J_2 \theta_2 \qquad (4.4.29)$$

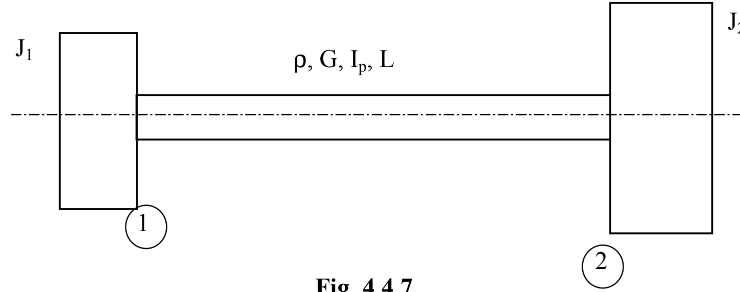


Fig. 4.4.7

şi relația (4.4.14) se scrie:

$$\begin{cases} \theta_1 \cos\left(\frac{pL}{c}\right) + \theta_1 \frac{J_1 cp}{GI_p} \sin\left(\frac{pL}{c}\right) = \theta_2 \\ -\theta_1 \frac{GI_p p}{c} \sin\left(\frac{pL}{c}\right) + \theta_1 p^2 J_1 \cos\left(\frac{pL}{c}\right) = p^2 J_2 \theta_2 \end{cases} \qquad (4.4.30)$$

Ecuațiile (4.4.30) se mai scriu:

$$\begin{cases} \theta_1 \cos\left(\frac{pL}{c}\right) + \theta_1 \frac{J_1 cp}{GI_p} \sin\left(\frac{pL}{c}\right) = \theta_2 \\ -\theta_1 \frac{GI_p}{J_2 cp} \sin\left(\frac{pL}{c}\right) + \theta_1 \frac{J_1}{J_2} \cos\left(\frac{pL}{c}\right) = \theta_2 \end{cases} \Rightarrow \qquad (4.4.30)$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{J_1}{J_2}\right) \cos\left(\frac{pL}{c}\right) + \left(\frac{J_1 cp}{GI_p} + \frac{GI_p}{J_2 cp}\right) \sin\left(\frac{pL}{c}\right) = 0$$

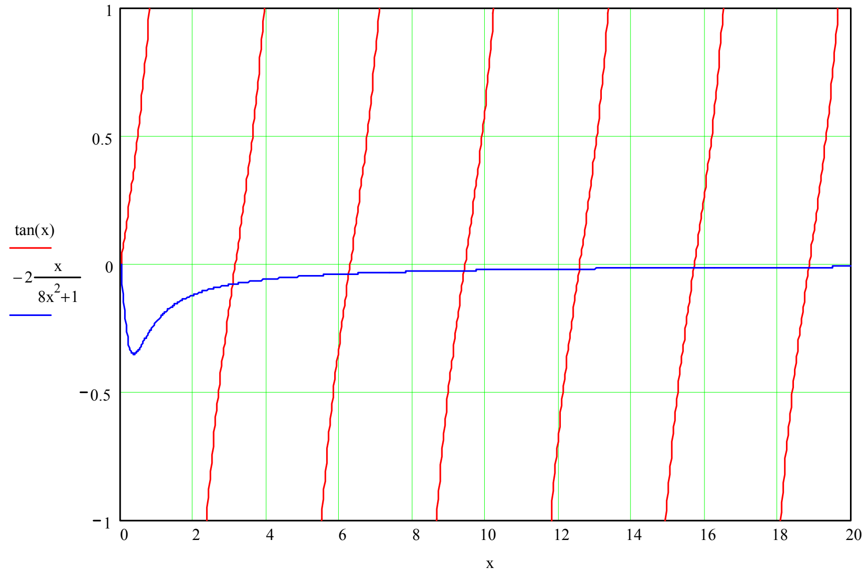
Dacă se notează: $J_b = \rho I_p L$ momentul de inerție al barei de secțiune circulară atunci ecuația (4.4.30) se mai scrie:

$$\begin{gathered} \left(1 - \frac{J_1}{J_2}\right) \cos x + \left(\frac{J_1}{J_b} x + \frac{J_b}{J_2} \frac{1}{x}\right) \sin x = 0 \iff \\ \left(\frac{J_1}{J_b} x + \frac{J_b}{J_2} \frac{1}{x}\right) = \left(\frac{J_1}{J_2} - 1\right) \frac{1}{tgx}, \qquad x = \frac{pL}{c} \end{gathered} \qquad (4.4.31)$$

Pentru cazul particular $J_b = J$, $J_1 = 2J$, $J_2 = 4J$ se obține ecuația transcendentă a pulsațiilor proprii:

$$2x + \frac{1}{4x} = -\frac{1}{2 \cdot tgx} \quad \Leftrightarrow \quad tgx = -\frac{2x}{8x^2 + 1} \tag{4.4.32}$$

iar soluțiile ecuației (4.4.32) se determină grafic din fig. 4.4.8 cu ajutorul programului Mathcad:



$$\text{root}\left(\tan(x) + 2\frac{x}{8x^2 + 1}, x, 2.8, 3.2\right) = 3.061 \qquad \text{root}\left(\tan(x) + 2\frac{x}{8x^2 + 1}, x, 6, 7\right) = 6.243$$

$$\text{root}\left(\tan(x) + 2\frac{x}{8x^2 + 1}, x, 9, 10\right) = 9.398 \qquad \text{root}\left(\tan(x) + 2\frac{x}{8x^2 + 1}, x, 12, 13\right) = 12.546$$

Fig. 4.4.8. Obținerea soluțiilor pentru primele 6 pulsații proprii

Se obțin astfel primele 6 pulsații proprii:

$$p_1 = \frac{3{,}061}{L}\sqrt{\frac{G}{\rho}}; \quad p_2 = \frac{6{,}243}{L}\sqrt{\frac{G}{\rho}};$$
$$p_3 = \frac{9{,}398}{L}\sqrt{\frac{G}{\rho}}; \quad p_4 = \frac{12{,}546}{L}\sqrt{\frac{G}{\rho}}; \tag{4.4.33}$$

Pentru n ≥ 4 se poate aproxima: $p_n = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{G}{\rho}}$

4.4.2. Vibrații torsionale forțate

În cazul vibrațiilor forțate cu momente perturbatoare armonice distribuite $m_t = m_{t0}\cos\omega t$ soluția staționară se obține în același mod ca la vibrațiile longitudinale şi este de forma:

$$\theta(x,t) = \frac{2c^2\cos\omega t}{L\,GI_p}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\psi_m(x)}{p_m^2-\omega^2}\int_0^L m_{t0}(x)\psi_m(x)dx \qquad (4.4.34)$$

În cazul vibrațiilor forțate cu momente perturbatoare armonice concentrate în x_0 de forma $M_t = M_{t0}\cos\omega t$ se obține soluția staționară de forma:

$$\theta(x,t) = \frac{2M_{t0}c^2\cos\omega t}{L\,GI_p}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\psi_m(x)\psi_m(x_0)}{p_m^2-\omega^2} \qquad (4.4.35)$$

Exemplu

Să se determine pulsațiile şi modurile proprii de vibrații longitudinale ale unei bare de lungime L având secțiunea constantă, modulul de elasticitate E şi densitatea ρ cunoscute, fixată la unul din capete iar la celălat capăt acționează o forță armonică concentrată $F = F_0\cos\omega t$ (fig. 4.4.9).

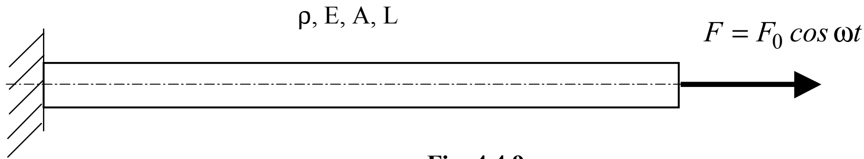


Fig. 4.4.9

Funcțiile proprii şi pulsațiile proprii determinate conform (4.4.22) şi (4.4.23) sunt:

$$p_m = (2m-1)\frac{\pi c}{2L} \quad \text{respectiv:} \qquad (4.4.36)$$

$$\psi_m(x) = \sin\frac{(2m-1)\pi}{2L}x\,,\ \ m=1,\,2,.. \qquad (4.4.37)$$

Valoarea în punctual $x_0 = L$ a funcțiilor proprii $\psi_m(x)$ este:

$$\psi_m(x_0) = \sin\frac{(2n+1)\pi}{2L}L = (-1)^m \qquad (4.4.38)$$

Soluția staționară a vibrațiilor conform (4.4.37) va fi:

$$u(x,t) = \frac{2F_0c^2\cos\omega t}{L\,EA}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{p_m^2-\omega^2}\sin\frac{(2m-1)\pi}{2L}x \qquad (4.4.39)$$

4.5. Vibrațiile transversale ale barelor drepte

Se consideră o bară omogenă prismatică cu un plan de simetrie şi un element din această bară de lungime *dx* situat la distața x de capătul barei. Se notează cu *w(x,t)* deplasările secțiunii față de poziția de echilibru. Asupra acestui element acționează o forță perturbatoare distribuită *f(x,t)* pe direcția axei Oz ca în figura 4.5.1.a,b.

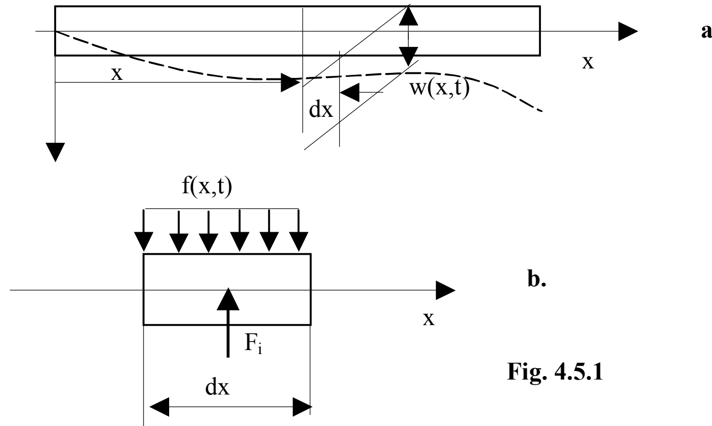


Fig. 4.5.1

Se ține seama de relația dintre efortul încovoietor $M_i(x)$ corespunzător secțiunii aflată la distanța x de capătul barei şi deplasarea *w(x)* pentru încovoierea barelor drepte care are forma:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{M_i}{EI} \qquad (4.5.1)$$

şi de relația dintre efortul încovoietor M_i şi sarcina distribuită *q(x):*

$$\frac{\partial^2 M_i}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial x} = -q(x) \qquad (4.5.2)$$

Forța elementară distribuită *dF=q(x)dx* se poate exprima ca suma dintre forța perturbatoare ce acționează asupra elementului şi forța de inerție corespunzătoare (fig. 4.5.1.b):

$$q(x,t)dx = f(x,t)dx - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dm \qquad (4.5.3)$$

Derivând de două ori relația (4.5.1) şi înlocuind în relația (4.5.2) şi apoi în relația (4.5.3) se obține:

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dm + f(x,t)dx = EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \qquad (4.5.4)$$

Ținând seama că $dm = \rho A dx$ şi notând $\frac{\rho A}{EI} = \beta^2$ se obține ecuația diferențială a vibrațiilor transversale a barelor prismatice:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\beta^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{f(x,t)}{EI} \tag{4.5.5}$$

4.5.1. Vibrațiile transversale libere

Ecuația diferențială a vibrațiilor transversale libere se scrie:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\beta^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{4.5.6}$$

având soluții de forma (prin metoda Bernoulli Fourier):

$$w(x,t)=Y(x)cos(pt-\varphi) \tag{4.5.7}$$

Înlocuind în ecuația (4.5.7) se obține:

$$\left[\frac{\partial^4 Y(x)}{\partial x^4}-\beta^2 p^2 Y(x)\right]cos(pt-\varphi)=0 \tag{4.5.8}$$

rezultă așadar o ecuație diferențială de o singură variabilă , omogenă de ordinul IV:

$$\frac{\partial^4 Y(x)}{\partial x^4}-\beta^2 p^2 Y(x)=0 \tag{4.5.9}$$

Ecuația caracteristică corespunzătoare este:

$$r^4-\alpha^4=0; \tag{4.5.10}$$

unde: $\alpha^4=\beta^2 p^2$ (4.5.11)

cu rădăcinile:

$$\begin{aligned} &r_{1,2}=\pm\alpha;\\ &r_{3,4}=\pm i\alpha;\quad (i=\sqrt{-1}) \end{aligned} \tag{4.5.12}$$

Soluțiile sunt de forma:

$$Y(x)=A_1ch(\alpha x)+A_2sh(\alpha x)+A_3\,cos(\alpha x)+A_4\,sin(\alpha x). \tag{4.5.13}$$

sau de forma:

$$Y(x)=C_1f_1(x)+C_2f_2(x)+C_3f_3(x)+C_4f_4(x) \tag{4.5.14}$$

unde $f_1(\alpha x),\ f_2(\alpha x),\ f_3(\alpha x),\ f_4(\alpha x)$ sunt funcțiile lui Krîlov definite astfel:

$$\begin{cases} f_1(\alpha x)=\frac{1}{2}(ch\alpha x+cos\alpha x)\\ f_2(\alpha x)=\frac{1}{2}(sh\alpha x+sin\alpha x)\\ f_3(\alpha x)=\frac{1}{2}(ch\alpha x-cos\alpha x)\\ f_4(\alpha x)=\frac{1}{2}(sh\alpha x-sin\alpha x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1'(\alpha x)=\frac{1}{2}\alpha(sh\alpha x-sin\alpha x)=\alpha f_4(\alpha x)\\ f_2'(\alpha x)=\frac{1}{2}(ch\alpha x+cos\alpha x)=\alpha f_1(\alpha x)\\ f_3'(\alpha x)=\frac{1}{2}(sh\alpha x+sin\alpha x)=\alpha f_2(\alpha x)\\ f_4'(\alpha x)=\frac{1}{2}(ch\alpha x-cos\alpha x)=\alpha f_3(\alpha x) \end{cases} \tag{4.5.15}$$

Constantele de integrare $C_1, \dots C_4$ se determină din condițiile la limită care se pot scrie de exemplu în capătul din stânga al barei ($x=0$) astfel:

$$\begin{cases} Y(0)=C_1 f_1(0)+C_2 f_2(0)+C_3 f_3(0)+C_4 f_4(0)=C_1 \\ Y'(0)=\alpha C_1 f_4(0)+\alpha C_2 f_1(0)+\alpha C_3 f_2(0)+\alpha C_3 f_3(0)=\alpha C_2 \\ Y''(0)=\alpha^2 C_1 f_3(0)+\alpha^2 C_2 f_4(0)+\alpha^2 C_3 f_1(0)+\alpha^2 C_3 f_2(0)=\alpha^2 C_3 \\ Y'''(0)=\alpha^3 C_1 f_2(0)+\alpha^3 C_2 f_3(0)+\alpha^3 C_3 f_4(0)+\alpha^3 C_3 f_1(0)=\alpha^3 C_4 \end{cases} \quad (4.5.16)$$

$$\Rightarrow C_1 = Y(0); \; C_2 = \frac{1}{\alpha}Y'(0); \; C_3 = \frac{1}{\alpha^2}Y''(0); \; C_4 = \frac{1}{\alpha^3}Y'''(0)$$

Soluția ecuației diferențiale (4.5.10) se poate scrie în funcție de aceste condiții sub forma:

$$Y(x)=Y(0)f_1(\alpha x)+\frac{1}{\alpha}Y'(0)f_2(\alpha x)+\frac{1}{\alpha^2}Y''(0)f_3(\alpha x)+\frac{1}{\alpha^3}Y'''(0)f_4(\alpha x) \quad (4.5.17)$$

Aceste condiții la limită ($x=0$) precum şi cele corespunzătoare capătului din dreapta al barei ($x=L$), conform soluției generale (4.5.8), se referă la:

- amplitudinile deplasărilor la capetele barei: $w_1 = Y(0), \quad w_2 = Y(L)$;
- amplitudinile rotirilor la capetele barei: $\varphi_1 = Y'(0), \quad \varphi_2 = Y'(L)$;
- amplitudinile eforturilor M_i la capetele barei:

  $M_1 = -EI \cdot Y''(0); \qquad M_2 = -EI \cdot Y''(L)$;
- amplitudinile eforturilor T_i la capetele barei:

  $T_1 = -EI \cdot Y'''(0); \qquad T_2 = -EI \cdot Y'''(L)$;

Rezultă un sistem de ecuații omogen având ca necunoscute constantele de integrare $C_1, \dots C_4$ care admite soluții diferite de cea banală dacă determinantul său este nul. Se obține astfel o ecuație transcendentă în α care reprezintă ecuația pulsațiilor proprii $\left(p_n = \frac{\alpha_n^2}{\beta} \right)$.

După ce se determină constantele de integrare $C_1, \dots C_4$ şi se introduc pulsațiile proprii p_n determinate mai sus, se obțin modurile proprii de vibrație:

$$w_n(x,t)=\psi_n(x)cos(p_n t-\varphi_n) \quad (4.5.18)$$

Soluția generală a ecuație vibrațiilor transversale se scrie:

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} D_n \psi_n \, cos(p_n t-\varphi_n) \quad (4.5.19)$$

unde constantele: $D_1, D_2, \dots D_n, \dots$ şi $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n, \dots$ se determină din condițiile inițiale (la $t=0$):

$$\begin{cases} w(x,0) = g_1(x) \\ \left.\dfrac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = g_2(x) \end{cases} \tag{4.5.20}$$

Înlocuind (4.5.19) în (4.5.20) rezultă

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} D_n \psi_n \cos(\varphi_n) = g_1(x) \\ \sum_{n=1}^{\infty} p_n D_n \psi_n \sin(\varphi_n) = g_2(x) \end{cases} \tag{4.5.21}$$

Se înmulțesc ecuațiile (4.5.21) cu ψ_m, se integrează pe intervalul [*0, L*] şi se ține seama de ortogonalitatea modurilor proprii de vibrație:

$$\int_0^L \psi_n \psi_m \, dx = \begin{cases} 0 & daca \quad m \neq n \\ \lambda_m & daca \quad m = n \end{cases} \tag{4.5.22}$$

obținându-se:

$$\begin{cases} \lambda_m D_m \cos(\varphi_m) = \int_0^L g_1(x)\psi_m dx \\ \lambda_m p_m D_m \sin(\varphi_m) = \int_0^L g_2(x)\psi_m dx \end{cases} \tag{4.5.23}$$

$$m = 1, 2, 3, ..., n, ...$$

Rezultă imediat constantele de integrare $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$ $\varphi_1, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$:

$$tg(\varphi_m) = \frac{1}{p_m} \frac{\int_0^L g_2(x)\psi_m dx}{\int_0^L g_1(x)\psi_m dx}; \quad D_m = \frac{1}{\lambda_m \cos(\varphi_m)} \int_0^L g_1(x)\psi_m dx \tag{4.5.24}$$

$$m = 1, 2, 3, ..., n, ...$$

Din expresiile deplasării, rotirilor, eforturilor încovoietoare şi tăietoare rezultă că acestea sunt sincrone şi în fază:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= Y(x)\cos(pt - \varphi) \\ \varphi(x,t) &= Y'(x)\cos(pt - \varphi) \\ M(x,t) &= -EI \cdot Y''(x)\cos(pt - \varphi) \\ T(x,t) &= -EI \cdot Y'''(x)\cos(pt - \varphi) \end{aligned} \tag{4.5.25}$$

Amplitudinile acestor funcții la capetele barei conform (4.5.25) se scriu:

- pentru capătul din stânga ($x=0$):

$$\begin{cases} w(0,t) = w_1 \cos(pt-\varphi) \\ \varphi(0,t) = \varphi_1 \cos(pt-\varphi) \\ M(0,t) = M_1 \cos(pt-\varphi) \\ T(0,t) = T_1 \cos(pt-\varphi) \end{cases} \qquad (4.5.26)$$

- pentru capătul din dreapta ($x=L$):

$$\begin{cases} w(L,t) = w_2 \cos(pt-\varphi) \\ \varphi(L,t) = \varphi_2 \cos(pt-\varphi) \\ M(L,t) = M_2 \cos(pt-\varphi) \\ T(L,t) = T_2 \cos(pt-\varphi) \end{cases} \qquad (4.5.26')$$

Relația (4.5.17) se scrie în funcție de aceste amplitudini astfel:

$$Y(x)=Y(0)f_1(\alpha x)+\frac{1}{\alpha}Y'(0)f_2(\alpha x)+\frac{1}{\alpha^2}Y''(0)f_3(\alpha x)+\frac{1}{\alpha^3}Y'''(0)f_4(\alpha x) \qquad (4.5.27)$$

Funcția Y(x) și derivatele funcției dată de relația (4.5.27) se mai scriu:

$$\begin{cases} Y(x) = w_1 f_1(\alpha x)+\frac{1}{\alpha}\varphi_1 f_2(\alpha x)-\frac{1}{\alpha^2 EI}M_1 \cdot f_3(\alpha x)-\frac{1}{\alpha^3 EI}T_1 \cdot f_4(\alpha x) \\ Y'(x) = w_1\alpha f_4(\alpha x)+\varphi_1 f_1(\alpha x)-\frac{1}{\alpha EI}M_1 \cdot f_2(\alpha x)-\frac{1}{\alpha^2 EI}T_1 \cdot f_3(\alpha x) \\ Y''(x) = w_1\alpha^2 f_3(\alpha x)+\varphi_1\alpha f_4(\alpha x)-\frac{1}{EI}M_1 \cdot f_1(\alpha x)-\frac{1}{\alpha EI}T_1 \cdot f_2(\alpha x) \\ Y'''(x) = w_1\alpha^3 f_2(\alpha x)+\varphi_1\alpha^2 f_3(\alpha x)-\frac{1}{EI}\alpha M_1 \cdot f_4(\alpha x)-\frac{1}{EI}T_1 \cdot f_1(\alpha x) \end{cases} \qquad (4.5.28)$$

Înlocuind aceste expresii în condițiile (4.5.26) se obțin relațiile de legătură dinte amplitudinile celor patru mărimi de la capetele barei:

$$\begin{cases} w_2 = w_1 f_1(\alpha L)+\varphi_1\frac{1}{\alpha} f_2(\alpha L)-M_1 \cdot \frac{1}{\alpha^2 EI} f_3(\alpha L)-T_1 \cdot \frac{1}{\alpha^3 EI} f_4(\alpha L) \\ \varphi_2 = w_1\alpha f_4(\alpha L)+\varphi_1 f_1(vL)-M_1 \cdot \frac{1}{\alpha EI} f_2(\alpha L)-T_1 \cdot \frac{1}{\alpha^2 EI} f_3(\alpha L) \\ M_2 = -w_1 EI\alpha^2 f_3(\alpha L)-\varphi_1 EI\alpha f_4(\alpha L)+M_1 \cdot f_1(\alpha L)+T_1 \cdot \frac{1}{\alpha} f_2(\alpha L) \\ T_2 = -w_1 EI\alpha^3 f_2(\alpha L)-\varphi_1 EI\alpha^2 f_3(\alpha L)+M_1 \cdot \alpha f_4(\alpha L)+T_1 \cdot f_1(\alpha L) \end{cases} \qquad (4.5.29)$$

Aceste relații se mai pot scrie sub forma generală a relațiilor dintre amplitudinile celor patru mărimi la capetele barei:

$$\begin{cases} w_2 = w_1 f_1(\alpha L) + \dfrac{\varphi_1}{\alpha} f_2(\alpha L) - \dfrac{M_1}{\alpha^2 EI} f_3(\alpha L) - \dfrac{T_1}{\alpha^3 EI} f_4(\alpha L) \\ \dfrac{\varphi_2}{\alpha} = w_1 f_4(\alpha L) + \dfrac{\varphi_1}{\alpha} f_1(\alpha L) - \dfrac{M_1}{\alpha^2 EI} f_2(\alpha L) - \dfrac{T_1}{\alpha^3 EI} f_3(\alpha L) \\ -\dfrac{M_2}{\alpha^2 EI} = w_1 f_3(\alpha L) + \dfrac{\varphi_1}{\alpha} f_4(\alpha L) - \dfrac{M_1}{\alpha^2 EI} f_1(\alpha L) - \dfrac{T_1}{\alpha^3 EI} f_2(\alpha L) \\ -\dfrac{T_2}{\alpha^3 EI} = w_1 f_2(\alpha L) + \dfrac{\varphi_1}{\alpha} f_3(\alpha L) - \dfrac{M_1}{\alpha^2 EI} f_4(\alpha L) - \dfrac{T_1}{\alpha^3 EI} f_1(\alpha L) \end{cases} \tag{4.5.30}$$

sau matriceal sub forma generală:

$$\begin{Bmatrix} w_2 \\ \dfrac{\varphi_2}{\alpha} \\ -\dfrac{M_2}{\alpha^2 EI} \\ -\dfrac{T_2}{\alpha^3 EI} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\alpha L) & f_2(\alpha L) & f_3(\alpha L) & f_4(\alpha L) \\ f_4(\alpha L) & f_1(\alpha L) & f_2(\alpha L) & f_3(\alpha L) \\ f_3(\alpha L) & f_4(\alpha L) & f_1(\alpha L) & f_2(\alpha L) \\ f_2(\alpha L) & f_3(\alpha L) & f_4(\alpha L) & f_1(\alpha L) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w_1 \\ \dfrac{\varphi_1}{\alpha} \\ -\dfrac{M_1}{\alpha^2 EI} \\ -\dfrac{T_1}{\alpha^3 EI} \end{Bmatrix} \tag{4.5.31}$$

Cu ajutorul relațiilor (4.5.29), (4.5.30) şi (4.5.31) se pot studia vibrațiile libere transversale ale barei pentru diferite cazuri particulare de condiții la limită.

Exemplul 1.

Bara liberă la ambele capete (fig. 4.5.2)

ρ,E, I, A, L

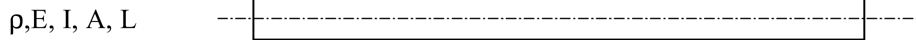


Fig. 4.5.2

Condițiile la limită în acest caz sunt:

$$M_1 = 0; \quad T_1 = 0$$
$$M_2 = 0; \quad T_2 = 0 \tag{4.5.32}$$

Ecuația matriceală (4.5.31) se scrie:

$$\begin{Bmatrix} w_2 \\ \dfrac{\varphi_2}{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\alpha L) & f_2(\alpha L) & f_3(\alpha L) & f_4(\alpha L) \\ f_4(\alpha L) & f_1(\alpha L) & f_2(\alpha L) & f_3(\alpha L) \\ f_3(\alpha L) & f_4(\alpha L) & f_1(\alpha L) & f_2(\alpha L) \\ f_2(\alpha L) & f_3(\alpha L) & f_4(\alpha L) & f_1(\alpha L) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w_1 \\ \dfrac{\varphi_1}{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.5.33}$$

care este echivalentă cu sistemul omogen:

$$\begin{cases} w_1 f_3(\alpha L) + \dfrac{\varphi_1}{\alpha} f_4(\alpha L) = 0 \\ w_1 f_2(\alpha L) + \dfrac{\varphi_1}{\alpha} f_3(\alpha L) = 0 \end{cases} \qquad (4.5.34)$$

Acest sistem admite soluții nebanale dacă determinantul său este nul:

$$\begin{vmatrix} f_3(\alpha L) & f_4(\alpha L) \\ f_2(\alpha L) & f_3(\alpha L) \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_3^2(\alpha L) - f_2(\alpha L) f_4(\alpha L) = 0$$

$$\frac{1}{4}(ch\alpha L - cos\,\alpha L)^2 - \frac{1}{4}(sh\alpha L + sin\,\alpha L)(sh\alpha L - sin\,\alpha L) = 0 \qquad (4.5.35)$$

$$ch^2\alpha L - 2ch\alpha L \cdot cos\,\alpha L + cos^2\,\alpha L - sh^2\alpha L + sin^2\,\alpha L = 0$$

$$unde:\ ch^2\alpha L - sh^2\alpha L = 1; \quad cos^2\,\alpha L + sin^2\,\alpha L = 1$$

se obține următoarea ecuație transcendentă a pulsațiilor proprii:

$$ch\alpha L \cdot cos\,\alpha L = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{ch\alpha L} = cos\,\alpha L \qquad (4.5.36)$$

Soluțiile ecuației (4.5.35) se determină grafic din fig. 4.5.3 :

$$\mathrm{root}\left(\cos(x) - \frac{1}{\cosh(x)}, x, 4, 6\right) = 4.73 \qquad \mathrm{root}\left(\cos(x) - \frac{1}{\cosh(x)}, x, 7, 8\right) = 7.853$$

$$\mathrm{root}\left(\cos(x) - \frac{1}{\cosh(x)}, x, 10.5, 11.5\right) = 10.996 \qquad \mathrm{root}\left(\cos(x) - \frac{1}{\cosh(x)}, x, 14, 15\right) = 14.137$$

$$\mathrm{root}\left(\cos(x) - \frac{1}{\cosh(x)}, x, 17, 18\right) = 17.279 \qquad \mathrm{root}\left(\cos(x) - \frac{1}{\cosh(x)}, x, 20, 21\right) = 20.42$$

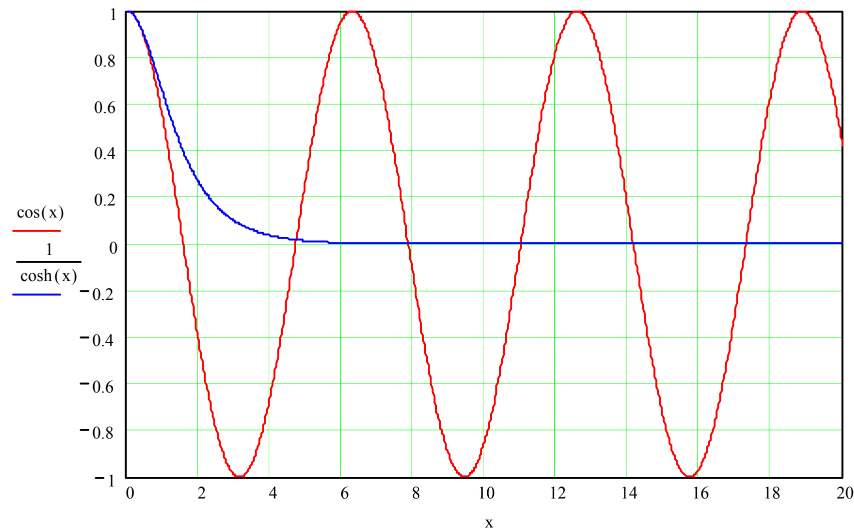


Fig. 4.5.3. Obținerea soluțiilor ecuației 4.5.36

Se obțin astfel primele 6 pulsații proprii:

$$p_1 = \frac{22{,}373}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}};\quad p_2 = \frac{61{,}67}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}};\quad p_3 = \frac{120{,}912}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}};$$
$$p_4 = \frac{199{,}855}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}};\quad p_5 = \frac{268{,}564}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}};\quad p_6 = \frac{416{,}976}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}; \qquad (4.5.37)$$

Exemplul 2.

Bara articulată la ambele capete (fig. 4.5.3)

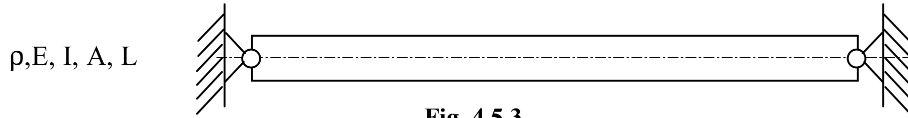


Fig. 4.5.3

Condițiile la limită în acest caz sunt:

$$w_1 = 0;\quad M_1 = 0$$
$$w_2 = 0;\quad M_2 = 0 \qquad (4.5.38)$$

Ecuația matriceală (4.5.31) se scrie:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{\varphi_2}{\alpha} \\ 0 \\ -\frac{T_2}{\alpha^3 EI} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\alpha L) & f_2(\alpha L) & f_3(\alpha L) & f_4(\alpha L) \\ f_4(\alpha L) & f_1(\alpha L) & f_2(\alpha L) & f_3(\alpha L) \\ f_3(\alpha L) & f_4(\alpha L) & f_1(\alpha L) & f_2(\alpha L) \\ f_2(\alpha L) & f_3(\alpha L) & f_4(\alpha L) & f_1(\alpha L) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{\varphi_1}{\alpha} \\ 0 \\ -\frac{T_1}{\alpha^3 EI} \end{Bmatrix} \qquad (4.5.39)$$

care este echivalentă cu sistemul omogen:

$$\begin{cases} \frac{\varphi_1}{\alpha} f_2(\alpha L) - \frac{T_1}{\alpha^3 EI} f_4(\alpha L) = 0 \\ \frac{\varphi_1}{\alpha} f_4(\alpha L) - \frac{T_1}{\alpha^3 EI} f_2(\alpha L) = 0 \end{cases} \qquad (4.5.40)$$

Acest sistem admite soluții nebanale dacă determinantul său este nul:

$$\begin{vmatrix} f_2(\alpha L) & f_4(\alpha L) \\ f_4(\alpha L) & f_2(\alpha L) \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_2^2(\alpha L) - f_4^2(\alpha L) = 0$$

$$\frac{1}{4}(sh\alpha L + sin\alpha L)^2 - \frac{1}{4}(sh\alpha L - sin\alpha L)^2 = 0 \qquad (4.5.41)$$

$$sh\alpha L \cdot sin\alpha L = 0$$

se obține următoarea ecuație a pulsațiilor proprii: $sin\alpha L = 0$ având soluțiile:

$$\alpha L = n\pi,\quad n=1,2,3,\ldots \qquad (4.5.42)$$

Rezultă pulsațiile proprii:

$$p_n = \frac{\alpha_n^2}{\beta} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{4.5.43}$$

Se obțin astfel primele 6 pulsații proprii:

$$\begin{aligned} &p_1 = \frac{9{,}869}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}; \quad p_2 = \frac{39{,}478}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}; \quad p_3 = \frac{88{,}826}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}; \\ &p_4 = \frac{157{,}913}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}; \quad p_5 = \frac{246{,}74}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}; \quad p_6 = \frac{355{,}306}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}; \end{aligned} \tag{4.5.44}$$

Exemplul 3.

Bara încastrată la ambele capete (fig. 4.5.4)

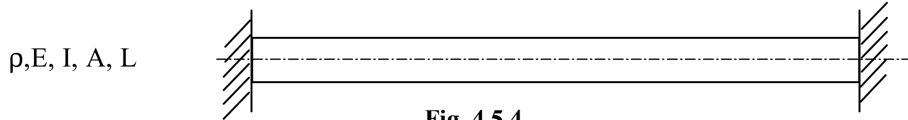


Fig. 4.5.4

Condițiile la limită în acest caz sunt:

$$\begin{aligned} &w_1 = 0; \quad \varphi_1 = 0 \\ &w_2 = 0; \quad \varphi_2 = 0 \end{aligned} \tag{4.5.45}$$

Ecuația matriceală (4.5.31) se scrie:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{M_2}{\alpha^2 EI} \\ -\dfrac{T_2}{\alpha^3 EI} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\alpha L) & f_2(\alpha L) & f_3(\alpha L) & f_4(\alpha L) \\ f_4(\alpha L) & f_1(\alpha L) & f_2(\alpha L) & f_3(\alpha L) \\ f_3(\alpha L) & f_4(\alpha L) & f_1(\alpha L) & f_2(\alpha L) \\ f_2(\alpha L) & f_3(\alpha L) & f_4(\alpha L) & f_1(\alpha L) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{M_1}{\alpha^2 EI} \\ -\dfrac{T_1}{\alpha^3 EI} \end{Bmatrix} \tag{4.5.46}$$

care este echivalentă cu sistemul omogen:

$$\begin{cases} -\dfrac{M_1}{\alpha^2 EI} f_3(\alpha L) - \dfrac{T_1}{\alpha^3 EI} f_4(\alpha L) = 0 \\ -\dfrac{M_1}{\alpha^2 EI} f_2(\alpha L) - \dfrac{T_1}{\alpha^3 EI} f_3(\alpha L) = 0 \end{cases} \tag{4.5.47}$$

Acest sistem admite soluții nebanale dacă determinantul său este nul:

$$\begin{vmatrix} f_3(\alpha L) & f_4(\alpha L) \\ f_2(\alpha L) & f_3(\alpha L) \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_3^2(\alpha L) - f_2(\alpha L) f_4(\alpha L) = 0$$

$$\frac{1}{4}(ch\alpha L - cos\,\alpha L)^2 - \frac{1}{4}(sh\alpha L + sin\,\alpha L)(sh\alpha L - sin\,\alpha L) = 0 \tag{4.5.48}$$

$$\Leftrightarrow \qquad ch\alpha L \cdot cos\,\alpha L = 1$$

se obține aceeaşi ecuație transcendentă a pulsațiilor proprii ca în cazul a) şi aceleaşi pulsații proprii. Primele 6 pulsații proprii sunt:

$$p_1 = \frac{22{,}373}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}};\quad p_2 = \frac{61{,}67}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}};\quad p_3 = \frac{120{,}912}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}};$$
$$p_4 = \frac{199{,}855}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}};\quad p_5 = \frac{268{,}564}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}};\quad p_6 = \frac{416{,}976}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}; \qquad (4.5.49)$$

Exemplul 4.

Bara încastrată la un capăt şi liberă la celălalt (fig. 4.5.5)

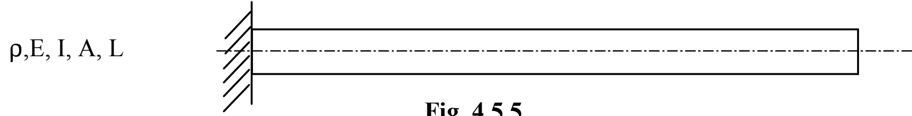


Fig. 4.5.5

Condițiile la limită în acest caz sunt:

$$w_1 = 0;\quad \varphi_1 = 0$$
$$M_2 = 0;\; T_2 = 0 \qquad (4.5.50)$$

Ecuația matriceală (4.5.31) se scrie:

$$\begin{Bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\alpha L) & f_2(\alpha L) & f_3(\alpha L) & f_4(\alpha L) \\ f_4(\alpha L) & f_1(\alpha L) & f_2(\alpha L) & f_3(\alpha L) \\ f_3(\alpha L) & f_4(\alpha L) & f_1(\alpha L) & f_2(\alpha L) \\ f_2(\alpha L) & f_3(\alpha L) & f_4(\alpha L) & f_1(\alpha L) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{M_1}{\alpha^2 EI} \\ -\frac{T_1}{\alpha^3 EI} \end{Bmatrix} \qquad (4.5.51)$$

care este echivalentă cu sistemul omogen:

$$\begin{cases} -\frac{M_1}{\alpha^2 EI} f_1(\alpha L) - \frac{T_1}{\alpha^3 EI} f_2(\alpha L) = 0 \\ -\frac{M_1}{\alpha^2 EI} f_4(\alpha L) - \frac{T_1}{\alpha^3 EI} f_1(\alpha L) = 0 \end{cases} \qquad (4.5.52)$$

Acest sistem admite soluții nebanale dacă determinantul său este nul:

$$\begin{vmatrix} f_1(\alpha L) & f_2(\alpha L) \\ f_4(\alpha L) & f_1(\alpha L) \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_1^2(\alpha L) - f_2(\alpha L) f_4(\alpha L) = 0$$
$$\frac{1}{4}(ch\alpha L + cos\,\alpha L)^2 - \frac{1}{4}(sh\alpha L + sin\,\alpha L)(sh\alpha L - sin\,\alpha L) = 0 \qquad (4.5.53)$$

Rezultă următoarea ecuație transcendentă a pulsațiilor proprii:

$$ch\alpha L \cdot cos\,\alpha L = -1 \quad \Leftrightarrow \quad cos\,\alpha L = -\frac{1}{ch\alpha L} \qquad (4.5.54)$$

Soluțiile ecuației (4.5.54) se determină grafic din fig. 4.5.6 :

$\mathrm{root}\left(\cos(x) + \dfrac{1}{\cosh(x)}, x, 1, 2\right) = 1.875$ $\mathrm{root}\left(\cos(x) + \dfrac{1}{\cosh(x)}, x, 4, 5\right) = 4.694$

$\mathrm{root}\left(\cos(x) + \dfrac{1}{\cosh(x)}, x, 7, 8\right) = 7.855$ $\mathrm{root}\left(\cos(x) + \dfrac{1}{\cosh(x)}, x, 10.5, 11.5\right) = 10.996$

$\mathrm{root}\left(\cos(x) + \dfrac{1}{\cosh(x)}, x, 14, 15\right) = 14.137$ $\mathrm{root}\left(\cos(x) + \dfrac{1}{\cosh(x)}, x, 17, 18\right) = 17.279$

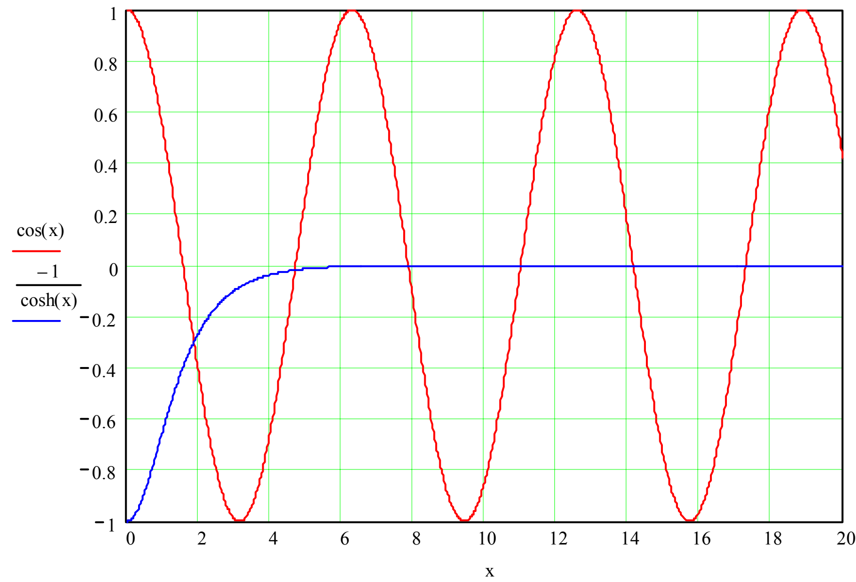


Fig. 4.5.6. Obținerea soluțiilor ecuației 4.5.54

Se obțin astfel primele 6 pulsații proprii:

$$p_1 = \frac{3{,}515}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}};\quad p_2 = \frac{22{,}033}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}};\quad p_3 = \frac{61{,}7}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}};$$
$$p_4 = \frac{120{,}912}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}};\quad p_5 = \frac{199{,}855}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}};\quad p_6 = \frac{298{,}564}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}};\qquad (4.5.55)$$

Exemplul 5.

Bara încastrată la un capăt şi articulată la celălalt (fig. 4.5.5)

ρ,E, I, A, L

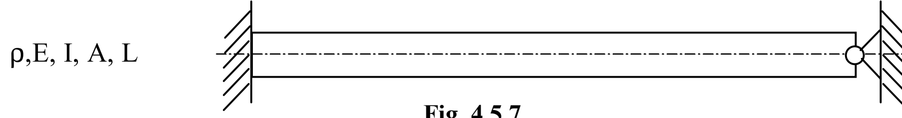


Fig. 4.5.7

Condițiile la limită în acest caz sunt:

$$w_1 = 0; \quad \varphi_1 = 0$$
$$w_2 = 0; \quad M_2 = 0 \qquad (4.5.56)$$

Ecuația matriceală (4.5.31) se scrie:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \varphi_2 \\ 0 \\ -\dfrac{T_2}{\alpha^3 EI} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\alpha L) & f_2(\alpha L) & f_3(\alpha L) & f_4(\alpha L) \\ f_4(\alpha L) & f_1(\alpha L) & f_2(\alpha L) & f_3(\alpha L) \\ f_3(\alpha L) & f_4(\alpha L) & f_1(\alpha L) & f_2(\alpha L) \\ f_2(\alpha L) & f_3(\alpha L) & f_4(\alpha L) & f_1(\alpha L) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{M_1}{\alpha^2 EI} \\ -\dfrac{T_1}{\alpha^3 EI} \end{Bmatrix} \qquad (4.5.57)$$

care este echivalentă cu sistemul omogen:

$$\begin{cases} -\dfrac{M_1}{\alpha^2 EI} f_3(\alpha L) - \dfrac{T_1}{\alpha^3 EI} f_4(\alpha L) = 0 \\ -\dfrac{M_1}{\alpha^2 EI} f_1(\alpha L) - \dfrac{T_1}{\alpha^3 EI} f_2(\alpha L) = 0 \end{cases} \qquad (4.5.58)$$

Acest sistem admite soluții nebanale dacă determinantul său este nul:

$$\begin{vmatrix} f_3(\alpha L) & f_4(\alpha L) \\ f_1(\alpha L) & f_2(\alpha L) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad f_3(\alpha L) f_2(\alpha L) - f_1(\alpha L) f_4(\alpha L) = 0 \quad \Leftrightarrow \qquad (4.5.59)$$

$$\frac{1}{4}(ch\alpha L - cos\,\alpha L)(sh\alpha L + sin\,\alpha L) - \frac{1}{4}(ch\alpha L + cos\,\alpha L)(sh\alpha L - sin\,\alpha L) = 0$$

Rezultă următoarea ecuație transcendentă a pulsațiilor proprii:

$$ch\alpha L \cdot sin\,\alpha L - cos\,\alpha L \cdot sh\alpha L = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad tg\alpha L - th\alpha L = 0 \qquad (4.5.60)$$
$$\Leftrightarrow \quad th\alpha L = \frac{1}{tg\alpha L}$$

Soluțiile ecuației (4.5.60) se determină grafic din fig. 4.5.8 :

$$\text{root}\left(\tanh(x) - \frac{1}{\tan(x)}, x, 0.5, 1.5\right) = 0.938 \qquad \text{root}\left(\tanh(x) - \frac{1}{\tan(x)}, x, 3.9, 4.2\right) = 3.927$$

$$\text{root}\left(\tanh(x) - \frac{1}{\tan(x)}, x, 7, 7.5\right) = 7.069 \qquad \text{root}\left(\tanh(x) - \frac{1}{\tan(x)}, x, 10.1, 11\right) = 10.21$$

$$\text{root}\left(\tanh(x) - \frac{1}{\tan(x)}, x, 13.2, 14\right) = 13.352 \qquad \text{root}\left(\tanh(x) - \frac{1}{\tan(x)}, x, 16.4, 17\right) = 16.493$$

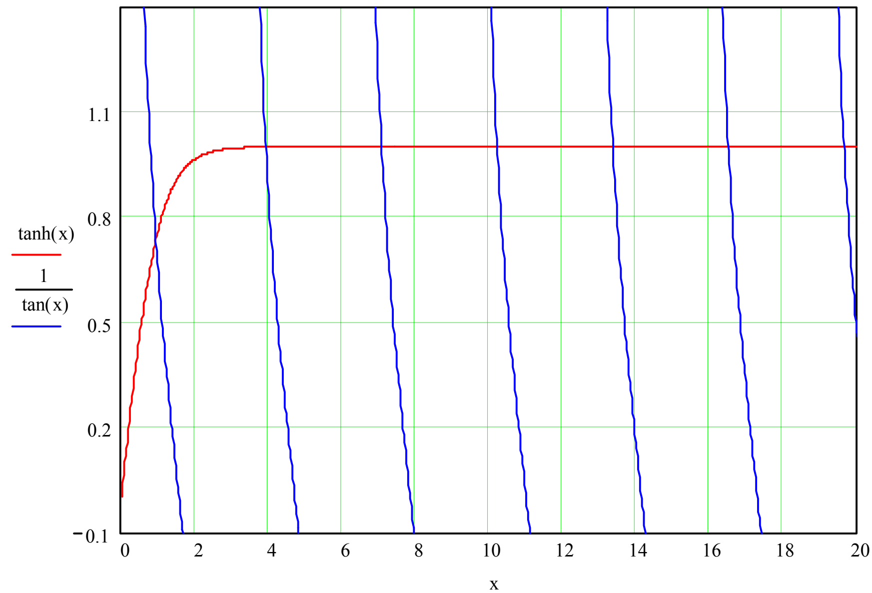


Fig. 4.5.8. Obținerea soluțiilor ecuației 4.5.60

Se obțin astfel primele 6 pulsații proprii:

$$p_1 = \frac{0{,}88}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}; \quad p_2 = \frac{15{,}421}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}; \quad p_3 = \frac{49{,}97}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}};$$
$$p_4 = \frac{104{,}244}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}; \quad p_5 = \frac{178{,}276}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}; \quad p_6 = \frac{272{,}019}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}; \qquad (4.5.61)$$

Exemplul 6.

Bara încastrată la un capăt şi cu masă concentrată la celălalt (fig. 4.5.9)



Fig. 4.5.9

Condițiile la limită în acest caz sunt:

$$w_1 = 0; \quad \varphi_1 = 0$$

$$M_2 = 0; \; T_2 = -m \left.\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right|_{x=L} = mp^2 w_2 \tag{4.5.62}$$

Ecuația matriceală (4.5.31) se scrie:

$$\begin{Bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \\ 0 \\ -\dfrac{mp^2}{\alpha^3 EI} w_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\alpha L) & f_2(\alpha L) & f_3(\alpha L) & f_4(\alpha L) \\ f_4(\alpha L) & f_1(\alpha L) & f_2(\alpha L) & f_3(\alpha L) \\ f_3(\alpha L) & f_4(\alpha L) & f_1(\alpha L) & f_2(\alpha L) \\ f_2(\alpha L) & f_3(\alpha L) & f_4(\alpha L) & f_1(\alpha L) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{M_1}{\alpha^2 EI} \\ -\dfrac{T_1}{\alpha^3 EI} \end{Bmatrix} \tag{4.5.63}$$

care este echivalentă cu sistemul omogen:

$$\begin{cases} -\dfrac{M_1}{\alpha^2 EI} f_3(\alpha L) - \dfrac{T_1}{\alpha^3 EI} f_4(\alpha L) - w_2 = 0 \\ -\dfrac{M_1}{\alpha^2 EI} f_1(\alpha L) - \dfrac{T_1}{\alpha^3 EI} f_2(\alpha L) = 0 \\ -\dfrac{M_1}{\alpha^2 EI} f_4(\alpha L) - \dfrac{T_1}{\alpha^3 EI} f_1(\alpha L) + \dfrac{mp^2}{\alpha^3 EI} w_2 = 0 \end{cases} \tag{4.5.64}$$

Acest sistem admite soluții nebanale dacă determinantul său este nul:

$$\begin{vmatrix} f_3(\alpha L) & f_4(\alpha L) & -1 \\ f_1(\alpha L) & f_2(\alpha L) & 0 \\ f_4(\alpha L) & f_1(\alpha L) & \dfrac{mp^2}{\alpha^3 EI} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\left(f_1^2(\alpha L) - f_2(\alpha L) f_4(\alpha L)\right) + \\ + \dfrac{mp^2}{\alpha^3 EI}\left(f_2(\alpha L) f_3(\alpha L) - f_1(\alpha L) f_4(\alpha L)\right) = 0 \end{cases} \tag{4.5.65}$$

Ținând seama de relațiile (4.5.15) şi (4.5.65) se obține ecuația transcendentă a pulsaților proprii:

$$(1+ch\alpha L\cos\alpha L)=\frac{mp^2}{\alpha^3 EI}(ch\alpha L\sin\alpha L-sh\alpha L\cos\alpha L)\qquad(4.5.66)$$

Dacă se ține seama de relația:

$$\alpha^4=\frac{\rho A}{EI}p^2\quad\Rightarrow\frac{mp^2}{\alpha^3 EI}=\frac{m}{m_b}\alpha L,\quad unde: m_b=\rho AL\qquad(4.5.67)$$

Ecuația (4.5.66) se mai scrie:

$$\frac{(ch\alpha L\cdot\sin\alpha L-sh\alpha L\cdot\cos\alpha L)}{1+ch\alpha L\cos\alpha L}=\frac{m_b}{m}\frac{1}{\alpha L}\qquad(4.5.68)$$

Soluțiile ecuației (4.5.68) se determină grafic din fig. 4.5.10 :

$$root\left[\frac{(\cosh(x)\cdot\sin(x)-\sinh(x)\cdot\cos(x))}{1+\cosh(x)\cos(x)}-\frac{2}{x},x,1,1.5\right]=1.42\qquad root\left[\frac{(\cosh(x)\cdot\sin(x)-\sinh(x)\cdot\cos(x))}{1+\cosh(x)\cos(x)}-\frac{2}{x},x,4,4.5\right]=4.111$$

$$root\left[\frac{(\cosh(x)\cdot\sin(x)-\sinh(x)\cdot\cos(x))}{1+\cosh(x)\cos(x)}-\frac{2}{x},x,7,7.5\right]=7.19\qquad root\left[\frac{(\cosh(x)\cdot\sin(x)-\sinh(x)\cdot\cos(x))}{1+\cosh(x)\cos(x)}-\frac{2}{x},x,10,10.5\right]=10.298$$

$$root\left[\frac{(\cosh(x)\cdot\sin(x)-\sinh(x)\cdot\cos(x))}{1+\cosh(x)\cos(x)}-\frac{2}{x},x,13,14\right]=13.421\qquad root\left[\frac{(\cosh(x)\cdot\sin(x)-\sinh(x)\cdot\cos(x))}{1+\cosh(x)\cos(x)}-\frac{2}{x},x,16,17\right]=16.55$$

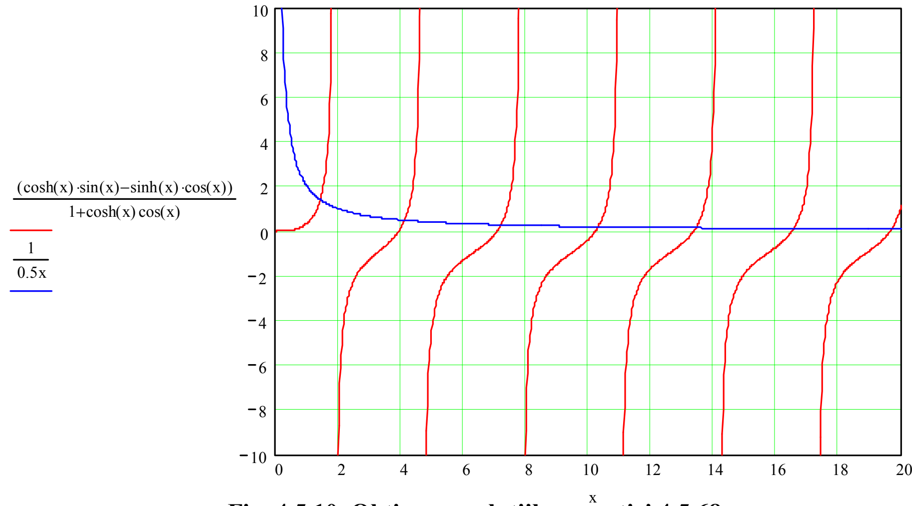


Fig. 4.5.10. Obținerea soluțiilor ecuației 4.5.68

Se obțin astfel primele 6 pulsații proprii:

$$p_1=\frac{2.016}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}};\quad p_2=\frac{16{,}9}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}};\quad p_3=\frac{51{,}696}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}};$$
$$p_4=\frac{106.049}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}};\quad p_5=\frac{180.123}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}};\quad p_6=\frac{273.902}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}};\qquad(4.5.69)$$

4.5.2. Vibrațiile transversale forțate

Ecuația diferențială a vibrațiilor transversale forțate datorate unei forțe perturbatoare distribuite $f(x,t)= f_0(x)\cos\omega t$ se scrie:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\beta^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{f_0(x)\cos\omega t}{EI} \tag{4.5.70}$$

având soluții staționare armonice , sincrone şi în fază cu forța armonică perturbatoare:

$$w(x,t)=Z(x)\cos\omega t \tag{4.5.71}$$

Înlocuind în ecuația (4.5.70) se obține:

$$\left[\frac{\partial^4 Z(x)}{\partial x^4}-\beta^2\omega^2 Z(x)\right]\cos\omega t=\frac{f_0(x)}{EI}\cos\omega t$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial^4 Z(x)}{\partial x^4}-\beta^2\omega^2 Z(x)=\frac{f_0(x)}{EI} \tag{4.5.72}$$

Funcția *Z(x)* care reprezintă amplitudinea mişcării vibratorii de-a lungul barei se scrie sub forma unei dezvoltări în serie de funcții proprii:

$$Z(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\psi_n(x) \tag{4.5.73}$$

Funcțiile proprii $\psi_n(x)$ verifică ecuația diferențială:

$$\frac{\partial^4\psi_n(x)}{\partial x^4}-\beta^2 p^2\psi_n(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^4\psi_n(x)}{\partial x^4}=\beta^2 p_n^2\psi_n(x) \tag{4.5.74}$$

şi satisfac condițiile de ortogonalitate:

$$\int_0^L \psi_n\psi_m\,dx=\begin{cases}0 & daca \quad m\neq n\\ \lambda_m & daca \quad m=n\end{cases} \tag{4.5.75}$$

Înlocuind expresia soluției (4.5.73) în ecuația diferențială (4.5.72) se obține:

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\beta^2(p_n^2-\omega^2)\psi_n(x)=\frac{f_0(x)}{EI} \tag{4.5.76}$$

Înmulțind ecuația (4.5.76) cu $\psi_m(x)$, integrând pe intervalul [*0, L*] şi ținând seama de ortogonalitatea modurilor proprii de vibrație se obțin coeficienții C_m:

$$C_m = \frac{1}{EI\lambda_m\beta^2(p_m^2 - \omega^2)}\int_0^L f_0(x)\psi_m(x)dx \qquad (4.5.77)$$

Deci soluția finală se scrie:

$$w(x,t) = \frac{\cos\omega t}{EI\beta^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\psi_m(x)}{\lambda_m(p_m^2 - \omega^2)}\int_0^L f_0(x)\psi_m(x)dx \qquad (4.5.78)$$

În cazul când forța perturbatoare este o forță concentrată în punctul $x=x_0$ al barei $F(x_0,t) = F_0\cos\omega t$, valoarea corespunzătoare unității de lungime se poate determina cu ajutorul funcției simbolice Dirac:

$$f_0(x) = F_0\delta(x - x_0) \qquad (4.5.79)$$

Înlocuind în relația (4.5.77) se obține:

$$C_m = \frac{F_0\psi_m(x_0)}{EI\lambda_m\beta^2(p_m^2 - \omega^2)} \qquad (4.5.80)$$

Deci soluția finală se scrie în acest caz:

$$w(x,t) = \frac{F_0\cos\omega t}{EI\beta^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\psi_m(x)\psi_m(x_0)}{\lambda_m(p_m^2 - \omega^2)} \qquad (4.5.81)$$

Observație:

Dacă forța perturbatoare concentrată este aplicată la capătul barei este mai comod a rezolva problema sub forma ei omogenă (de vibrații libere) şi să se considere forța perturbatoare ca condiții la limită, aşa cum rezultă din exemplele următoare.

Exemplul 1.

Se consideră o bară prismatică încastrată la un capăt, iar la celălalt ($x=L$) solicitată de o forță armonică $F(t) = F_0\cos\omega t$ (fig. 4.5.11). Să se determine expresiile amplitudinilor deplasării, rotirii, efortului încovoietor şi efortului tăietor precum şi factorul de amplificare dinamică pentru o pulsație a forței perturbatoare: $\omega = 1{,}2 \cdot p_1$ unde p_1 este pulsația proprie fundamentală.

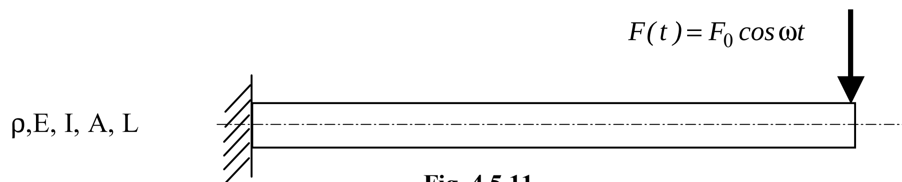


Fig. 4.5.11

Se consideră vibrațiile libere pentru care condițiile la limită sunt:

$$\begin{aligned} & w_1 = 0; \quad \varphi_1 = 0 \\ & M_2 = 0; \quad T_2 = F_0 \end{aligned} \qquad (4.5.82)$$

Ecuația matriceală (4.5.31) se scrie în acest caz:

$$\begin{Bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \\ 0 \\ -\dfrac{F_0}{\alpha^3 EI} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\alpha L) & f_2(\alpha L) & f_3(\alpha L) & f_4(\alpha L) \\ f_4(\alpha L) & f_1(\alpha L) & f_2(\alpha L) & f_3(\alpha L) \\ f_3(\alpha L) & f_4(\alpha L) & f_1(\alpha L) & f_2(\alpha L) \\ f_2(\alpha L) & f_3(\alpha L) & f_4(\alpha L) & f_1(\alpha L) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{M_1}{\alpha^2 EI} \\ -\dfrac{T_1}{\alpha^3 EI} \end{Bmatrix} \qquad (4.5.83)$$

şi este echivalentă cu sistemul neomogen:

$$\begin{cases} -\dfrac{M_1}{\alpha^2 EI} f_1(\alpha L) - \dfrac{T_1}{\alpha^3 EI} f_2(\alpha L) = 0 \\ -\dfrac{M_1}{\alpha^2 EI} f_4(\alpha L) - \dfrac{T_1}{\alpha^3 EI} f_1(\alpha L) = -\dfrac{F_0}{\alpha^3 EI} \end{cases} \qquad (4.5.84)$$

Rezolvând acest sistem se obține:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \alpha M_1 f_1(\alpha L) + T_1 f_2(\alpha L) = 0 & \big| f_1(\alpha L) \\ -\alpha M_1 f_4(\alpha L) - T_1 f_1(\alpha L) = -F_0 & \big| f_2(\alpha L) \end{cases} \\ & \Rightarrow M_1 = -\frac{F_0}{\alpha} \frac{f_2(\alpha L)}{f_1^2(\alpha L) - f_2(\alpha L) f_4(\alpha L)} \\ & \begin{cases} \alpha M_1 f_1(\alpha L) + T_1 f_2(\alpha L) = 0 & \big| f_4(\alpha L) \\ -\alpha M_1 f_4(\alpha L) - T_1 f_1(\alpha L) = -F_0 & \big| f_1(\alpha L) \end{cases} \\ & \Rightarrow T_1 = F_0 \frac{f_1(\alpha L)}{f_1^2(\alpha L) - f_2(\alpha L) f_4(\alpha L)} \end{aligned} \qquad (4.5.85)$$

Ținând seama de relația:

$$f_1^2(\alpha L) - f_2(\alpha L) f_4(\alpha L) = \frac{1}{2}\left(1 + ch\alpha L \cdot cos\,\alpha L\right) \qquad (4.5.86)$$

cele două mărimi de mai sus au expresiile:

$$\begin{cases} M_1 = -\dfrac{2F_0}{\alpha} \dfrac{f_2(\alpha L)}{1 + ch\alpha L \cdot cos\,\alpha L}; \\ T_1 = 2F_0 \dfrac{f_1(\alpha L)}{1 + ch\alpha L \cdot cos\,\alpha L} \end{cases} \qquad (4.5.87)$$

Condiția de rezonanță se scrie:

$$1 + ch\alpha L \cdot cos\,\alpha L = 0 \qquad (4.5.88)$$

Primele patru soluții ale acestei ecuații conform (4.5.54) sunt:

$$(\alpha L)_1 = 1{,}875; \quad (\alpha L)_2 = 4{,}694; \quad (\alpha L)_3 = 7{,}855; \quad (\alpha L)_4 = 10{,}996. \qquad (4.5.89)$$

Soluțiile vibrațiile staționare (deplasări, rotiri, momente încovoietoare şi eforturi tăietoare) se scriu ținând seama de expresia (4.5.27) care pentru acest caz are forma:

$$Y(x) = -\frac{1}{\alpha^2 EI} M_1 \cdot f_3(\alpha x) - \frac{1}{\alpha^3 EI} T_1 \cdot f_4(\alpha x) \qquad (4.5.90)$$

şi au expresiile:

$$\begin{cases} w(x,t) = Y(x) cos\,\omega t = \left[-M_1 \cdot \dfrac{1}{\alpha^2 EI} f_3(\alpha x) - T_1 \cdot \dfrac{1}{\alpha^3 EI} f_4(\alpha x) \right] cos\,\omega t \\ \varphi(x,t) = Y'(x) cos\,\omega t = \left[-M_1 \cdot \dfrac{1}{\alpha EI} f_2(\alpha x) - T_1 \cdot \dfrac{1}{\alpha^2 EI} f_3(\alpha x) \right] cos\,\omega t \\ M(x,t) = -EIY''(x) cos\,\omega t = \left[M_1 \cdot f_1(\alpha x) + T_1 \cdot \dfrac{1}{\alpha} f_2(\alpha x) \right] cos\,\omega t \\ T(x,t) = -EIY'''(x) cos\,\omega t = \left[M_1 \cdot \alpha f_4(\alpha x) + T_1 \cdot f_1(\alpha x) \right] cos\,\omega t \end{cases} \qquad (4.5.91)$$

Dacă se înlocuiesc expresiile (4.5.87) în (4.5.91) se obțin expresiile:

$$\begin{cases} w(x,t) = \dfrac{2F_0}{\alpha^3 EI} \dfrac{\left[f_2(\alpha L) f_3(\alpha x) - f_1(\alpha L) f_4(\alpha x) \right]}{1 + ch\alpha L\, cos\,\alpha L} cos\,\omega t \\ \varphi(x,t) = \dfrac{2F_0}{\alpha^2 EI} \dfrac{\left[f_2(\alpha L) f_2(\alpha x) - f_1(\alpha L) f_3(\alpha x) \right]}{1 + ch\alpha L\, cos\,\alpha L} cos\,\omega t \\ M(x,t) = -2\dfrac{F_0}{\alpha} \dfrac{\left[f_2(\alpha L) f_1(\alpha x) - f_1(\alpha L) f_2(\alpha x) \right]}{1 + ch\alpha L\, cos\,\alpha L} cos\,\omega t \\ T(x,t) = -2F_0 \dfrac{\left[f_2(\alpha L) f_4(\alpha x) - f_1(\alpha L) f_1(\alpha x) \right]}{1 + ch\alpha L\, cos\,\alpha L} cos\,\omega t \end{cases} \qquad (4.5.92)$$

În figura 4.5.12 sunt reprezentate amplitudinile vibrațiilor de-a lungul barei sau primele patru moduri proprii de vibrație:

$$w_0(x,t) = \frac{2F_0}{\alpha^3 EI} \frac{\left[f_2(\alpha L) f_3(\alpha x) - f_1(\alpha L) f_4(\alpha x) \right]}{1 + ch\alpha L\, cos\,\alpha L}, \qquad pentru: \qquad (4.5.93)$$

$$(\alpha L)_1 = 1{,}875; \quad (\alpha L)_2 = 4{,}694; \quad (\alpha L)_3 = 7{,}855; \quad (\alpha L)_4 = 10{,}996.$$

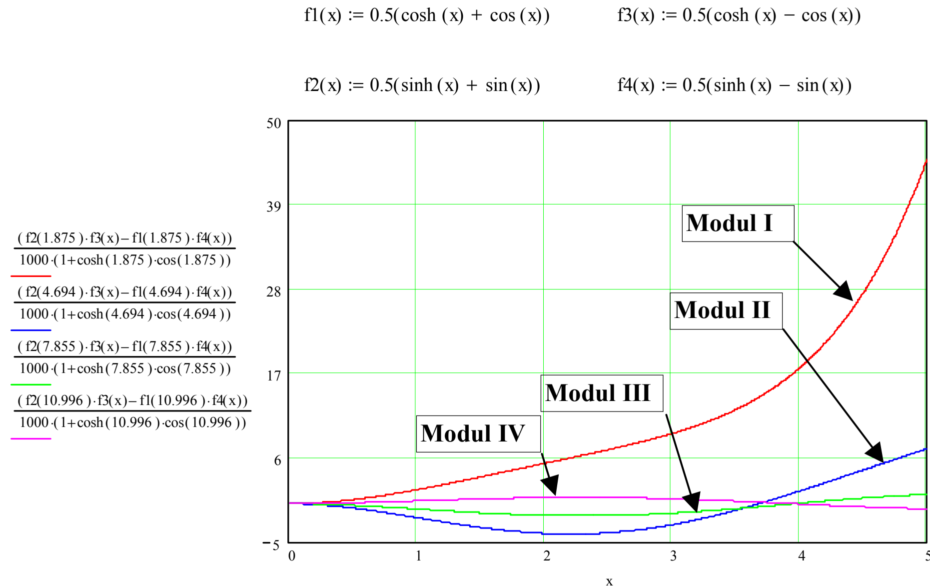


Fig. 4.5.12. Primele 4 moduri proprii de vibrație a barei

La capetele barei se obțin următoarele amplitudini ale celor patru mărimi:

- pentru capătul din stânga ($x=0$):

$$\begin{cases} w_1 = \dfrac{2F_0}{\alpha^3 EI}\dfrac{\left[f_2(\alpha L)f_3(0)-f_1(\alpha L)f_4(0)\right]}{1+ch\alpha L\cos\alpha L}=0 \\ \varphi_1 = \dfrac{2F_0}{\alpha^2 EI}\dfrac{\left[f_2(\alpha L)f_2(0)-f_1(\alpha L)f_3(0)\right]}{1+ch\alpha L\cos\alpha L}=0 \\ M_1 = -2\dfrac{F_0}{\alpha}\dfrac{\left[f_2(\alpha L)f_1(0)-f_1(\alpha L)f_2(0)\right]}{1+ch\alpha L\cos\alpha L}=-\dfrac{2F_0}{\alpha}\dfrac{f_2(\alpha L)}{1+ch\alpha L\cos\alpha L} \\ T_1 = -2F_0\dfrac{\left[f_2(\alpha L)f_4(0)-f_1(\alpha L)f_1(0)\right]}{1+ch\alpha L\cos\alpha L}=2F_0\dfrac{f_1(\alpha L)}{1+ch\alpha L\cos\alpha L} \end{cases} \tag{4.5.94}$$

- pentru capătul din dreapta ($x=L$):

$$\begin{cases} w_2 = \dfrac{2F_0}{\alpha^3 EI}\dfrac{\left[f_2(\alpha L)f_3(\alpha L)-f_1(\alpha L)f_4(\alpha L)\right]}{1+ch\alpha L\cos\alpha L}=\dfrac{F_0}{\alpha^3 EI}\dfrac{ch\alpha L\cdot\sin\alpha L+sh\alpha L\cdot\cos\alpha L}{1+ch\alpha L\cdot\cos\alpha L} \\ \varphi_2 = \dfrac{2F_0}{\alpha^2 EI}\dfrac{\left[f_2(\alpha L)f_2(\alpha L)-f_1(\alpha L)f_3(\alpha L)\right]}{1+ch\alpha L\cos\alpha L}=\dfrac{F_0}{\alpha^2 EI}\dfrac{1+sh\alpha L\cdot\sin\alpha L}{1+ch\alpha L\cdot\cos\alpha L} \\ M_2 = -2\dfrac{F_0}{\alpha}\dfrac{\left[f_2(\alpha L)f_1(\alpha L)-f_1(\alpha L)f_2(\alpha L)\right]}{1+ch\alpha L\cos\alpha L}=0 \\ T_2 = -2F_0\dfrac{\left[f_2(\alpha L)f_4(\alpha L)-f_1(\alpha L)f_1(\alpha L)\right]}{1+ch\alpha L\cos\alpha L}=F_0 \end{cases} \tag{4.5.95}$$

Factorul de amplificare dinamică este raportul dintre amplitudinea momentului din încastrare M_1 şi momentul în încastrare al unei forțe egală cu amplitudinea forței perturbatoare:

$$\xi_d = \left|\frac{M_1}{F_0 L}\right| = \left|\frac{2}{\alpha L}\frac{f_2(\alpha L)}{1 + ch\alpha L \cdot cos\,\alpha L}\right| \tag{4.5.96}$$

Reprezentarea grafică a factorului de amplificare dinamică este dată în figura. 4.5.13. Se observă că acesta are valori foarte mari în jurul frecvențelor proprii ale barei, când se produce rezonanța. Pentru o valoare a pulsației forței perturbatoare în vecinătatea primelor patru rezonanțe egală cu $\omega = 1{,}21 p_i \ (i = 1,2,3,4)$ se obțin următoarele valori ale factorului de amplificare dinamică:

$g(1.96875) = 5.429$ $\quad$ $g(4.9287) = 0.873$ $\quad$ $g(8.24775) = 0.317$ $\quad$ $g(11.5458) = 0.166$

Se observă că aceste valori scad cu creşterea pulsațiilor proprii.

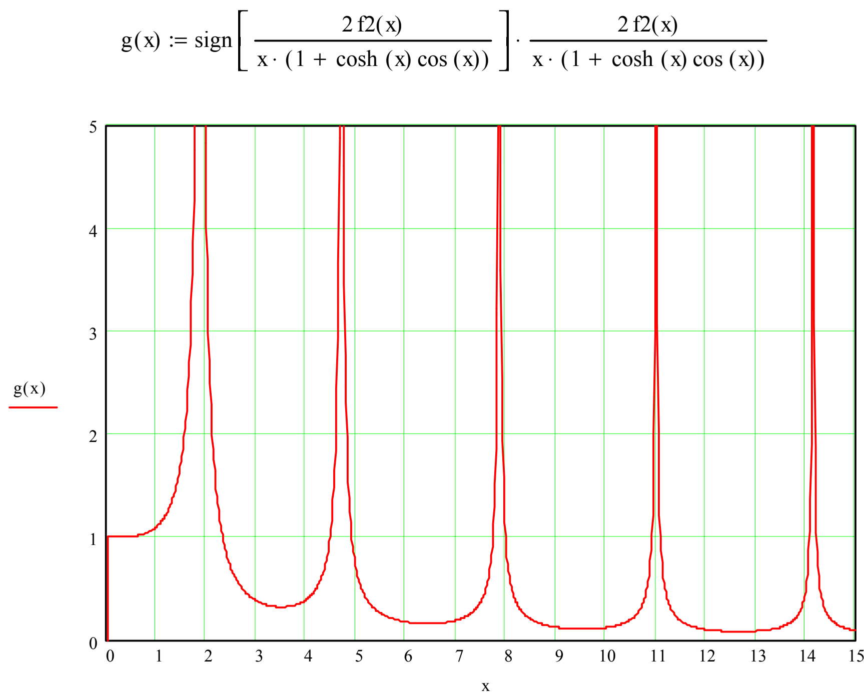


Fig. 4.5.13. Factorul de amplificare dinamică

Exemplul 2.

Se consideră o bară prismatică articulată la ambele capete, solicitată în capătul din dreapta de un cuplu armonic $M(t)=M_0 cos\omega t$ (fig. 4.5.14). Să se determine expresiile amplitudinilor deplasării, rotirii, efortului încovoietor şi efortului tăietor de-a lungul barei.

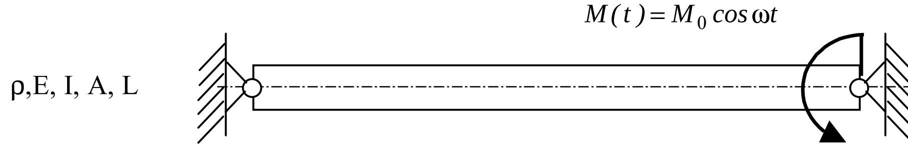


Fig. 4.5.14

Condițiile la limită în acest caz sunt:

$$\begin{aligned} &w_1=0; \quad M_1=0 \\ &w_2=0; \quad M_2=M_0 \end{aligned} \tag{4.5.97}$$

Ecuația matriceală (4.5.31) se scrie în acest caz:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{\varphi_2}{\alpha} \\ -\dfrac{M_0}{\alpha^2 EI} \\ -\dfrac{T_2}{\alpha^3 EI} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\alpha L) & f_2(\alpha L) & f_3(\alpha L) & f_4(\alpha L) \\ f_4(\alpha L) & f_1(\alpha L) & f_2(\alpha L) & f_3(\alpha L) \\ f_3(\alpha L) & f_4(\alpha L) & f_1(\alpha L) & f_2(\alpha L) \\ f_2(\alpha L) & f_3(\alpha L) & f_4(\alpha L) & f_1(\alpha L) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{\varphi_1}{\alpha} \\ 0 \\ -\dfrac{T_1}{\alpha^3 EI} \end{Bmatrix} \tag{4.5.98}$$

care este echivalentă cu sistemul neomogen:

$$\begin{cases} \dfrac{\varphi_1}{\alpha} f_2(\alpha L) - \dfrac{T_1}{\alpha^3 EI} f_4(\alpha L) = 0 \\ \dfrac{\varphi_1}{\alpha} f_4(\alpha L) - \dfrac{T_1}{\alpha^3 EI} f_2(\alpha L) = -\dfrac{M_0}{\alpha^2 EI} \end{cases} \tag{4.5.99}$$

Rezolvând acest sistem se obține:

$$\begin{cases} \dfrac{\varphi_1}{\alpha} = \dfrac{M_0}{\alpha^2 EI} \dfrac{f_4(\alpha L)}{f_2^2(\alpha L) - f_4^2(\alpha L)} \\ \dfrac{T_1}{\alpha^3 EI} = \dfrac{M_0}{\alpha^2 EI} \dfrac{f_2(\alpha L)}{f_2^2(\alpha L) - f_4^2(\alpha L)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{M_0}{2\alpha EI} \cdot \dfrac{sh\alpha L - sin\alpha L}{sh\alpha L \cdot sin\alpha L} \\ T_1 = M_0 \alpha \cdot \dfrac{1}{2} \dfrac{sh\alpha L + sin\alpha L}{sh\alpha L \cdot sin\alpha L} \end{cases} \tag{4.5.100}$$

Condiția de rezonanță se scrie:

$$sh\alpha L \cdot sin\alpha L = 0 \tag{4.5.101}$$

Rezultă pulsațiile proprii:

$$p_n = \frac{\alpha_n^2}{\beta} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{4.5.102}$$

Soluțiile vibrațiilor staționare (deplasări, rotiri, momente încovoietoare şi eforturi tăietoare) se scriu ținând seama de expresia (4.5.27) care pentru acest caz are forma:

$$Y(x) = \frac{1}{\alpha}\varphi_1 \cdot f_2(\alpha x) - \frac{1}{\alpha^3 EI} T_1 \cdot f_4(\alpha x) \tag{4.5.103}$$

şi au expresiile:

$$\begin{cases} w(x,t) = Y(x)\cos\omega t = \left[\frac{1}{\alpha}\varphi_1 \cdot f_2(\alpha x) - T_1 \cdot \frac{1}{\alpha^3 EI} f_4(\alpha x)\right]\cos\omega t \\ \varphi(x,t) = Y'(x)\cos\omega t = \left[\varphi_1 f_1(\alpha x) - T_1 \cdot \frac{1}{\alpha^2 EI} f_3(\alpha x)\right]\cos\omega t \\ M(x,t) = -EIY''(x)\cos\omega t = \left[-\varphi_1 EI\alpha f_4(\alpha x) + T_1 \cdot \frac{1}{\alpha} f_2(\alpha x)\right]\cos\omega t \\ T(x,t) = -EIY'''(x)\cos\omega t = \left[-\varphi_1 EI\alpha^2 f_3(\alpha x) + T_1 \cdot f_1(\alpha x)\right]\cos\omega t \end{cases} \tag{4.5.104}$$

Dacă se înlocuiesc expresiile (4.5.100) se obțin expresiile echivalente:

$$\begin{cases} w(x,t) = \frac{M_0}{2\alpha^2 EI}\left(\frac{\sin\alpha x}{\sin\alpha L} - \frac{sh\alpha x}{sh\alpha L}\right)\cos\omega t \\ \varphi(x,t) = \frac{M_0}{2\alpha EI}\left(\frac{\cos\alpha x}{\sin\alpha L} - \frac{ch\alpha x}{sh\alpha L}\right)\cos\omega t \\ M(x,t) = \frac{M_0}{2}\left(\frac{\sin\alpha x}{\sin\alpha L} + \frac{sh\alpha x}{sh\alpha L}\right)\cos\omega t \\ T(x,t) = \frac{M_0\alpha}{2}\left(\frac{\cos\alpha x}{\sin\alpha L} + \frac{ch\alpha x}{sh\alpha L}\right)\cos\omega t \end{cases} \tag{4.5.105}$$

În figurile 4.5.15 şi 4.5.16 sunt reprezentate amplitudinile deplasărilor şi rotirilor de-a lungul barei sau modurile proprii corespunzătoare primelor două pulsații proprii.

La capetele barei se obțin următoarele amplitudini ale celor patru mărimi:

- pentru capătul din stânga ($x=0$):

$$\begin{cases} w_1 = \dfrac{M_0}{2\alpha^2 EI}\left(\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\alpha L} - \dfrac{sh\alpha x}{sh\alpha L}\right)_{x=0} = 0 \\ \varphi_1 = \dfrac{M_0}{2\alpha EI}\left(\dfrac{1}{\sin\alpha L} - \dfrac{1}{sh\alpha L}\right) \\ M_1 = \dfrac{M_0}{2}\left(\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\alpha L} + \dfrac{sh\alpha x}{sh\alpha L}\right)_{x=0} = 0 \\ T_1 = \dfrac{M_0\alpha}{2}\left(\dfrac{1}{\sin\alpha L} + \dfrac{1}{sh\alpha L}\right) \end{cases} \qquad (4.5.106)$$

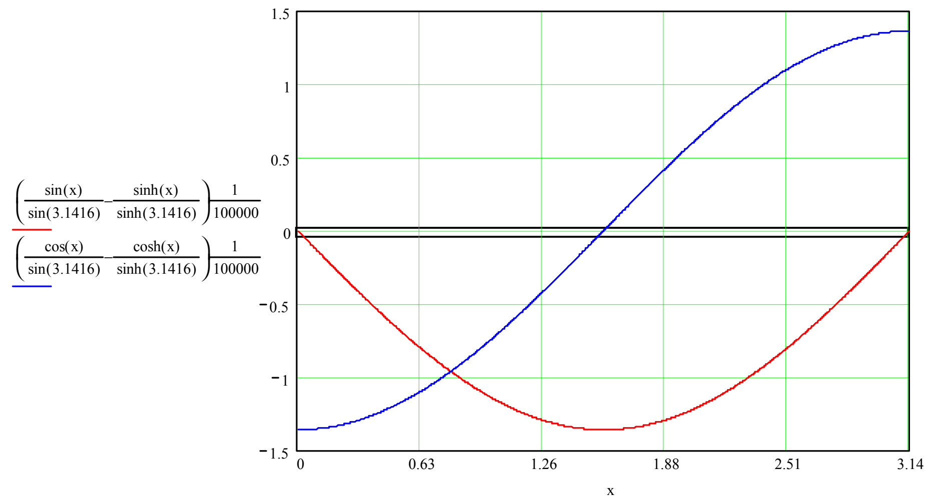


Fig. 4.5.15. Reprezentarea amplitudinilor deplasărilor

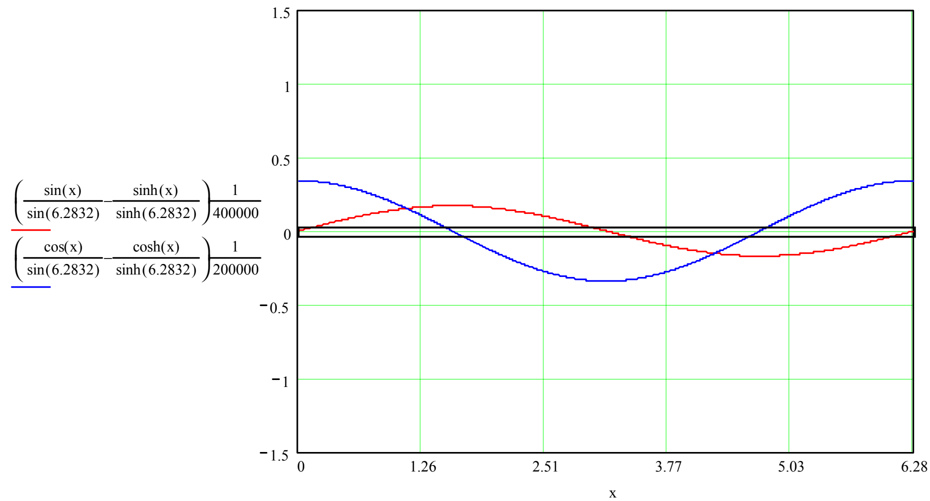


Fig. 4.5.16. Reprezentarea amplitudinilor rotirilor

➢ pentru capătul din dreapta ($x=L$):

$$\begin{cases} w_2 = \dfrac{M_0}{2\alpha^2 EI}\left(\dfrac{\sin\alpha L}{\sin\alpha L} - \dfrac{sh\alpha L}{sh\alpha L}\right) = 0 \\ \varphi_2 = \dfrac{M_0}{2\alpha EI}\left(\dfrac{\cos\alpha L}{\sin\alpha L} - \dfrac{ch\alpha L}{sh\alpha L}\right) \\ M_2 = \dfrac{M_0}{2}\left(\dfrac{\sin\alpha L}{\sin\alpha L} + \dfrac{sh\alpha L}{sh\alpha L}\right)_{x=0} = M_0 \\ T_2 = \dfrac{M_0\alpha}{2}\left(\dfrac{\cos\alpha L}{\sin\alpha L} + \dfrac{ch\alpha L}{sh\alpha L}\right) \end{cases} \tag{4.5.107}$$

Variația amplitudinii unghiului de rotație φ_2 a secțiunii în care acționează cuplul perturbator în funcție de pulsația ω este reprezentată în figura 4.5.17.

$$\varphi_2 = \frac{M_0 L}{2EI}\frac{1}{\alpha L}\left(\frac{\cos\alpha L}{\sin\alpha L} - \frac{ch\alpha L}{sh\alpha L}\right) \tag{4.5.108}$$

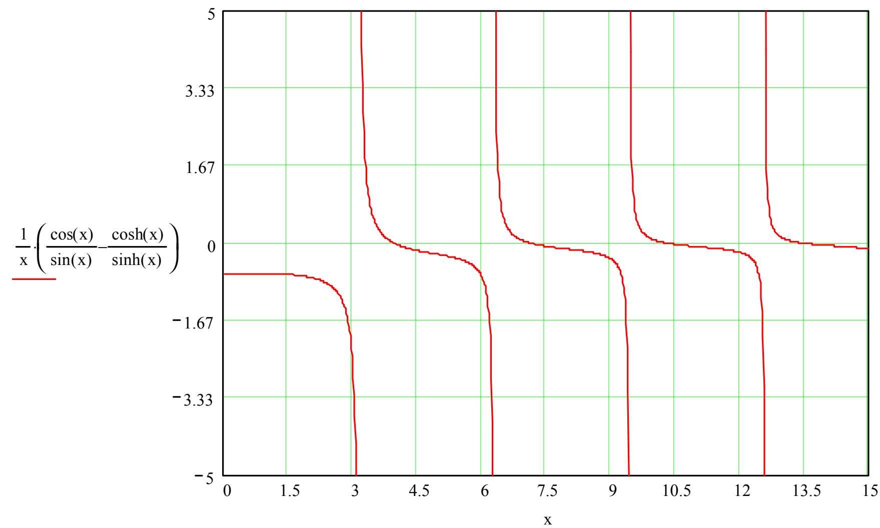


Fig. 4.5.17. Variația amplitudinii unghiului de rotație φ_2

4.6. Probleme propuse

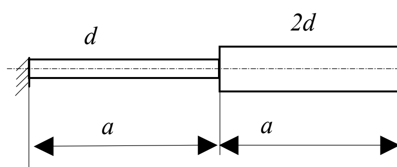


Fig. 4.6.1

4.6.1. Se consideră sistemul format dintr-un arbore având densitatea ρ şi rigiditatea constantă GI_p pe cele două tronsoane (având diametrele *d şi 2d)* , încastrat la un capăt şi liber la celălalt, ca în fig. 4.6.1. Să se determine primele trei pulsaţii proprii pentru vibraţiile torsionale ale acestui sistem. Date numerice: $J = 100\ kgm^2$; $\rho = 7{,}8\ 10^3 kg/m^3$; $a = 400\ mm$; $d = 100 mm$; $G = 8{,}5 \cdot 10^4\ N/mm^2$

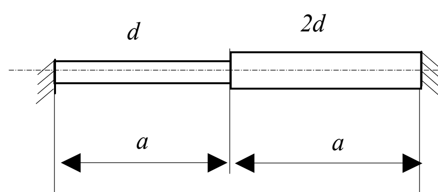


Fig. 4.6.2

4.6.2. Se consideră sistemul format dintr-un arbore de densitate ρ şi rigiditate constantă GI_p pe cele două tronsoane (având diametrele *d şi 2d)* , încastrat la capete ca în fig. 4.6.2 Să se determine primele trei pulsaţii proprii pentru vibraţiile torsionale ale acestui sistem. Date numerice: $\rho = 7{,}8\ 10^3 kg/m^3$; $a = 400\ mm$; $d = 100 mm$; $G = 8{,}5 \cdot 10^4\ N/mm^2$

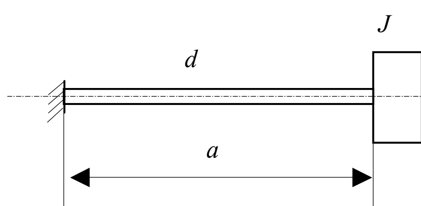


Fig. 4.6.3.

4.6.3. Se consideră sistemul format dintr-un arbore de densitate ρ şi rigiditate constantă GI_p (având diametrul constant *d)* , încastrat la un capăt iar la celălalt capăt având un volant de moment de inerţie *J* , ca în fig. 4.6.3. Să se determine primele trei pulsaţii proprii pentru vibraţiile torsionale ale acestui sistem. Date numerice: $J = 100\ kgm^2$; $\rho = 7{,}8\ 10^3 kg/m^3$; $a = 400\ mm$; $d = 100 mm$; $G = 8{,}5 \cdot 10^4\ N/mm^2$

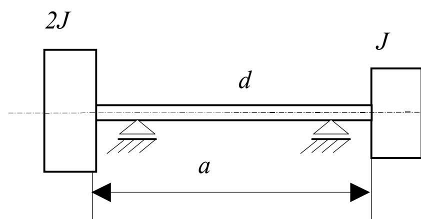


Fig. 4.6.4

4.6.4. Se consideră sistemul format dintr-un arbore de densitate ρ şi rigiditate constantă GI_p (având diametrul constant *d)* , la capetele căruia se află doi volanţi având momentul de inerţie *2J* şi *J* ca în fig. 4.6.4. Să se determine primele trei pulsaţii proprii pentru vibraţiile torsionale ale acestui sistem. Date numerice: $J = 100\ kgm^2$; $\rho = 7{,}8\ 10^3 kg/m^3$; $a = 400\ mm$; $d = 100mm$; $G = 8{,}5 \cdot 10^4\ N/mm^2$

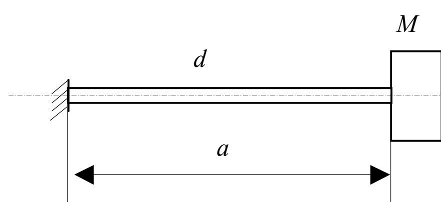


Fig. 4.6.5.

4.6.5. Se consideră sistemul format dintr-un arbore de densitate ρ şi rigiditate constantă *EI* (având diametrul constant *d)* , la capătul căruia se află un volant având masa M ca în fig. 4.6.5. Să se determine primele trei pulsaţii proprii pentru vibraţiile transversale ale acestui sistem. Date numerice: $M = 10\ kg$; $\rho = 7{,}8\ 10^3 kg/m^3$; $a = 400\ mm$; $d = 100mm$; $E = 2{,}1 \cdot 10^5\ N/mm^2$

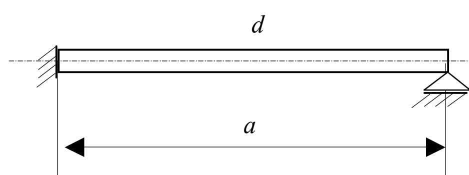


Fig. 4.6.6.

4.6.6. Se consideră sistemul format dintr-un arbore de densitate ρ şi rigiditate constantă *EI* (având diametrul *d*) încastrat la un capăt şi rezemat la celălalt, ca în fig. 4.6.6. Să se determine primele trei pulsaţii proprii pentru vibraţiile transversale ale acestui sistem. Date numerice: $\rho = 7{,}8\ 10^3 kg/m^3$; $a = 400\ mm$; $d = 100mm$; $E = 2{,}1 \cdot 10^5\ N/mm^2$

CAPITOLUL V
VIBRAŢII ALEATOARE

5.1. Variabile aleatoare şi mărimi caracteristice

Multe forme de excitaţii (cum ar fi acţiunea vântului, cutremure, variaţia presiunii în vasele şi recipientele sub presiune etc.) sunt caracterizate de intensităţi şi moduri de variaţie aleatoare şi nu pot fi descrise decât prin mărimi statistice, deci şi răspunsurile dinamice descrise sunt statistice.

Un *experiment este aleator* atunci când răspunsul lui pentru o anumită exitaţie nu poate fi prevăzut cu precizie şi univoc, fiind posibile mai multe răspunsuri. Experimentele aleatoare (cum sunt de exemplu vibraţiile structurilor elastice sub acţiunea unor factori aleatori) se pot generaliza şi studia ca procese aleatorii.

Se numeşte *variabilă aleatoare* o funcţie reală X definită pe domeniul de evenimente S:

- dacă X ia un număr finit de valori numerice $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, atunci X este o *variabilă aleatoare discretă;*
- dacă X poate lua orice valoare într-un interval dat, atunci X este o *variabilă aleatoare continuă.*

Variabila aleatoare discretă X este complet determinată dacă se cunosc toate *realizările* sale: $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, precum şi toate probabilităţile corespunzătoare acestor realizări: $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$. Legea de repartiţie a variabilei aleatoare discrete se scrie:

$$X\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \tag{5.1.1}$$

Legea de repartiţie a variabilei aleatoare continue se scrie sub două forme:

a. *funcţia de distribuţie F(x) a variabilei aleatoare* care reprezintă probabilitatea ca variabila X să fie mai mică decât o variabilă curentă x:

$$F(x) = P\,(X < x)$$

Întrucât probabilitatea P are valori cuprinse între 0 şi 1, *funcţia de distribuţieF(x)* are următoarele proprietăţi şi reprezentarea grafică din figura 5.1.1:

$$0 \le F_X(x) \le 1$$
$$F_X(\infty) = 1 \;\; ; \quad F_X(-\infty) = 0 \qquad (5.1.2)$$
$$daca\; x_1 \ge x_2 \;\Rightarrow\; F_X(x_1) \ge F_X(x_2)$$

Probabilitatea ca variabila X să se afle în intervalul (x_1, x_2) este: $P(x_1 \le X \le x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$

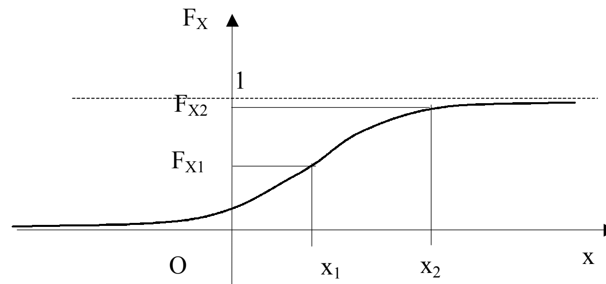


Fig.5.1.1

b. *densitatea de probabilitate $f_X(x)$* este dată de următoarea relaţie:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \qquad (5.1.3)$$

şi are următoarele proprietăţi:

- $f_X(x) \to 0$ deoarece $F_X(x)$ este monoton crescătoare
- $$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} dF_X(x) = F(\infty) - F(-\infty) = 1 \qquad (5.1.4)$$
- $$\int_{x_1}^{x_2} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} dF_X(x) = F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \le X \le x_2)$$

Densitatea de probabilitate este reprezentată grafic ca în figura 5.1.2. Aria haşurată reprezintă valoarea probabilităţii ca variabila continuă X să se afle în intervalul (x_1, x_2).

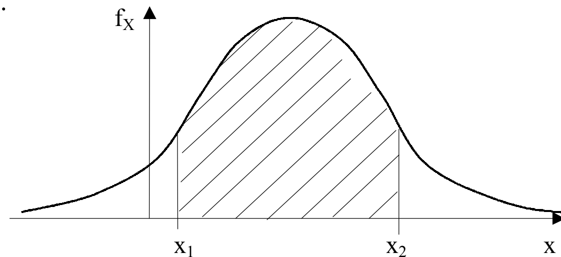


Fig.5.1.2

În general legea de repartiție nu este cunoscută şi deci nu se pot determina cele două forme cantitative ale legii: funcţia de distribuție şi densitatea de probabilitate.

De aceea se utilizează alte mărimi caracteristice care reflectă unele particularitățile esențiale ale legii de repartiție:

- momentul de ordinul I, media sau speranța matematică:

$$E|X| = \overline{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx \tag{5.1.4}$$

- momentul de ordinul II, media pătratică:

$$E|X^2| = \overline{X}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx \tag{5.1.5}$$

- media centrală:

$$E|X - \overline{X}| = \overline{X - \overline{X}} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{x}) f_X(x)dx \tag{5.1.6}$$

- momentul central de ordinul doi sau dispersia:

$$E|(X - \overline{X})^2| = D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{x})^2 f_X(x)dx \tag{5.1.7}$$

- abaterea standard sau abaterea medie pătratică:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$$
$$sau: \sigma^2(x) = D(x) = \overline{X}^2 - (\overline{X})^2 \tag{5.1.8}$$

5.2. Procese aleatoare şi mărimi caracteristice

Pe mulțimea E a unor experimente aleatoare (fig. 5.2.1) se defineşte relația *X(x, t)* care, pentru orice ieşire (experiment *x*), conduce la o funcție *F(t).* O relație de acest fel este denumită proces aleator sau funcție aleatoare. Funcția obținută într-o încercare oarecare $x_i(t)$ reprezintă o realizare a procesului aleator *X(x, t),* care este conceput ca un ansamblu de astfel de realizări (Figura. 5.2.2).

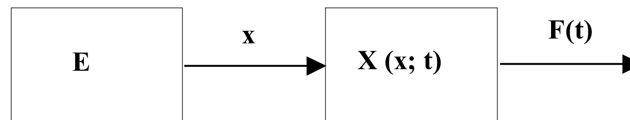


Fig. 5.2.1

Dacă parametrul *t* este fixat la o anumită valoare t_1, atunci procesul aleator $X(x,t_1)$ devine o variabilă aleatoare, în consecință conceptul de proces aleator reprezintă o generalizare a conceptului de variabilă aleatoare.

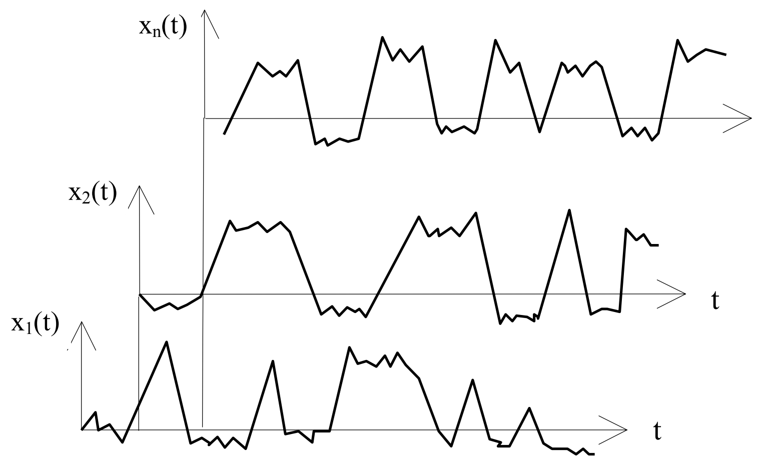


Fig.5.2.2

În mod similar ca pentru variabilele aleatoare, pentru un singur proces aleator *X(t)* se definesc următoarele mărimi:

- funcția de distribuție a procesului aleator:

$$F_X(x;\, t) = P\,/X(t) \le x\,/; \tag{5.2.1}$$

- funcția densității de probabilitate a procesului aleator:

$$f_X(x;t) = \frac{dF_X(x;t)}{dx}; \tag{5.2.2}$$

- momentul de ordinul 1 sau media procesului aleator:

$$\overline{X}(t) = E\left|X(t)\right| = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x;t)dx \qquad (5.2.3)$$

- dispersia:

$$D_x(t) = \sigma_x^2(t) = E\left|\left[X(t) - \overline{X(t)}\right]^2\right| = \int_{-\infty}^{\infty}\left[x - \overline{X(t)}\right]^2 f_x(x;t)dx \qquad (5.2.4)$$

Dacă pentru parametrul t se fixează valorile $t_1, t_2, \ldots, t_n$, atunci procesul aleator $X(x, t)$ este caracterizat de n variabile aleatoare $X_1, X_2, \ldots, X_n$ pentru care se pot stabili următoarele mărimi de corelație:

- funcția de distribuție corelată de ordinul n:

$$F_x(x_1, x_2, \ldots x_n; t_1 t_2 \ldots t_n) = P\,/X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2 \ldots X(t_n) \le x_n/ \qquad (5.2.5)$$

- funcția densității de probabilitate corelate de ordinul n

$$f_x(x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots t_n) = \frac{\partial^n F_x(x_1, x_2, \ldots x_n, t_1, t_2, \ldots t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} \qquad (5.2.6)$$

Dacă pentru parametrul t se fixează numai două momente în timp t_1 şi t_2, mărimile de corelație cele mai folosite în analiza proceselor aleatoare sunt următoarele:

- funcția de autocorelație definită ca medie a produsului valorilor funcției de la cele două momente t_1, t_2;

$$R_x(t_1, t_2) = E\,/X(t_1)\,X(t_2)/ \qquad (5.2.7)$$

- funcția de covarianță definită ca medie centrală a procesului aleator:

$$C_x(t_1, t_2) = E\left|[X(t_1) - \overline{X(t_1)}][X(t_2) - \overline{X(t_2)}]\right| \qquad (5.2.8)$$

- coeficientul de corelație denumit şi funcție de corelație normalizată:

$$r_x(t_1, t_2) = \frac{C_x(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)} \qquad (5.2.9)$$

unde $\sigma_x(t_1)$ şi $\sigma_x(t_2)$ sunt abaterile medii standard ale proceselor aleatoare la momentele t_1 şi t_2:

$$\sigma_x^2(t_1) = \overline{X^2(t_1)} - X^2(t_1) \qquad (5.2.10)$$

$$\sigma_x^2(t_2) = \overline{X^2(t_2)} - X^2(t_2)$$

5.3. Evoluția în timp a proceselor aleatoare

O problemă importantă a teoriei proceselor aleatoare o constituie modul în care acestea evoluează în timp. Un proces aleator se numeşte staționar atunci când mărimile statistice sunt independente de originea timpului (adică ele nu depind de momentul în care se începe observarea lor).

Considerând un proces aleator staționar de ordinul 1 şi 2, condițiile de staționaritate pentru densitățile de probabilitate de ordinul 1 şi 2 sunt:

$$f_x(x, t) = f_x(x; t + t_0)$$
$$f_x(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_x(x_1, x_2; t_1 + t_0, t_2 + t_0) \qquad (5.3.1)$$

şi se scriu sub forma generală:

$$f_x(x, t) = f_x(x);$$
$$f_x(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_x(x_1, x_2; \tau) = f_x(x_1, x_2; -\tau) \qquad (5.3.2)$$

în care $\tau = t_2 - t_1$.

Se observă că funcția densității de probabilitate de ordinul 1 este independentă de timp, iar funcția densității de ordinul 2 depinde numai de τ, adică de diferența de timp dintre cele două momente.

În consecință, un proces aleator staționar este caracterizat prin mărimile:

- media: $E|X(t)| = \overline{X}(t) = \overline{X}$; (5.3.3)
- dispersia: $\sigma_x^2(t) = \sigma_x^2$; (5.3.4)
- funcția de autocorelație:

$$R_x(t_1 t_2) = R_x(\tau);\ R_x(-\tau) = R_x(\tau); \qquad (5.3.5)$$

- funcția de covarianță:

$$C_x(t_1, t_2) = C_x(\tau);\ r_x(t_1, t2) = r_x(\tau) \qquad (5.3.6)$$

Observații:

- un proces aleator având media constantă (independentă de timp) şi funcția de autocorelație dependentă de diferența de timp (τ): $\overline{X(t)} = \overline{X}$; $R_x(t_1\, t_2) = R_x(\tau)$, este denumit *staționar în sens larg* sau *slab staționar*.
- un proces aleator este *staționar în sens îngust*, atunci când densitățile de repartiție până la ordinul n sunt funcții numai de diferențele de timp:

  $t_2-t_1;\quad t_3-t_1, \ldots t_n-t_1.$
- în dinamica structurilor intervin de cele mai multe ori fenomene vibratorii aleatoare cu staționaritate în sens larg, de aceea prin procese staționare în dinamica structurilor, se vor înțelege procesele staționare în sens larg.

În cazul proceselor slab staționare, se poate obține o reprezentare armonică sau descompunerea în frecvențe a acestora, sub forma valorii medii pătratice $E\left|X^2(t)\right| = \overline{X(t)}^2$, denumită şi puterea procesului *X(t).*

Reprezentarea armonică a unui proces aleator staționar se poate face mai uşor folosind funcția *densității spectrale de putere* $S_x(\omega)$, care împreună cu *funcția de autocorelație* $R_x(\tau)$ formează o *pereche de transformate Fourier*, definite de relațiile:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} R_x(\tau)d\tau \qquad (5.3.7)$$

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} S_x(\omega)d\omega. \qquad (5.3.8)$$

Deci densitatea spectrală de putere (sau densitatea spectrală) este transformata Fourier a funcției de autocorelație, iar funcția de autocorelație este transformata inversă a densității spectrale. Relațiile (5.3.7), (5.3.8) sunt denumite relațiile Wiener - Khinchine şi ele indică o reprezentare armonică a procesului considerat.

Din (5.3.7) se observă că dacă funcția de autocorelație este o funcție pară: $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$ atunci şi densitatea spectrală este o funcție pară, adică:

$$S_x(\omega) = S_x(-\omega) \qquad (5.3.9)$$

Ținând seama de relațiile: (5.3.1), (5.3.6), (5.3.8) şi (5.3.9), pentru $t_2 = t_1 = t$, adică pentru $\tau = 0$, se obține relația:

$$E\left|X^2(t)\right| = R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega)d\omega = 2\int_0^{\infty} S_x(\omega)d\omega \qquad (5.3.10)$$

care, întrucât media pătratică: $E\left|X^2(t)\right| = \overline{X}^2(t)$ reprezintă puterea procesului *X(t),* justifică noțiunea de putere a spectrului reprezentării armonice.

În mod asemănător este introdusă noțiunea de *putere în banda de frecvență* (ω_1, ω_2):

$$P_{\omega_1\omega_2} = 2\int_{\omega_1}^{\omega_2} S_x(\omega)d\omega \qquad (5.3.11)$$

Întrucât puterea în orice bandă trebuie să fie nenegativă, rezultă

$$S_x(\omega) \geq 0. \qquad (5.3.12)$$

Proprietățile (5.3.10) şi (5.3.11) pot fi evidențiate prin trecerea unui proces printr-un filtru de frecvențe şi calcularea puterii spectrului semnalului rezultat.

5.4. Estimările proceselor aleatorii

În general, mărimile statistice ale unui proces aleator sunt necunoscute şi funcţiile aleatoare care-l descriu nu pot fi analizate în totalitate. În această situaţie *teoria estimaţiei* permite ca din analiza a cel mult câteva realizări ale procesului să se obţină mărimile caracteristice.

Se consideră o singură realizare *x(t)* a procesului aleator *X(t),* pentru care se determină următoarele caracteristici:

- media estimaţiei: $\hat{m}_x = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$ (5.4.1)
- estimarea densităţii spectrale:

$$\hat{S}_x(\omega) = \frac{1}{T}\left|X_T(\omega)\right|^2 \quad (5.4.2)$$

unde $X_T(\omega)$ este transformata Fourier finită a procesului x(t):

$$X_T(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} exp(-i\omega t)x(t)dt$$

- estimarea funcţiei de autocorelaţie

$$\hat{R}_X(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau} x(t)x(t+\tau)dt \quad (5.4.3)$$

Se pune însă problema de a stabili modul în care aceste mărimi corespund celor reale ale procesului considerat: atunci când media unei realizări este egală cu media procesului însuşi, procesul staţionar este numit *ergodic*

Întrucât pentru fiecare realizare, integrala (5.30) dă un număr, rezultă că media $\hat{m}_x$ reprezintă o variabilă aleatoare. Pentru ca media acestei variabile aleatoare să fie egală cu un număr: $E\left|\hat{m}_x\right| = m_x = \overline{X}$, trebuie ca dispersia să fie nulă:

$$D(\hat{m}_x) = E\left|(\hat{m}_x - m_x)^2\right| = 0 \quad (5.4.4)$$

În continuare, integrala (5.32) conduce la o funcţie dependentă de τ. Dacă funcţia de autocorelaţie a procesului real depinde de momentele t_1 şi t_2, estimarea (5.32) nu este corectă.

În estimarea proceselor aleatoare este folosită funcţia densităţii spectrale de putere $S_X(\omega)$, care împreună cu funcţia de autocorelaţie $R_{XX}(\tau)$, constituie o pereche de trnasformate Fourier (relaţiile 5.4.3 şi 5.4.4). În problemele de estimare, funcţia de autocorelaţie $R_{xx}(\tau)$ se defineşte sub forma valorii medii a produsului *x(t) x(t+τ):*

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt\ , \qquad (5.4.5)$$

Cele două funcții dau o anumită informație asupra valorii semnalului la momentul $(t + \tau)$, dacă este cunoscută valoarea la momentul t.

Datorită faptului că procesul este staționar şi deci nu are influență originea timpului se pot folosi perechile de transformate Fourier:

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)exp(-i\omega t)dt; x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)exp(i\omega t)d\omega$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)exp[-i\omega(t+\tau)]dt\ ; \qquad (5.4.6)$$

$$x(t+\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)exp[i\omega(t+\tau)]d\omega$$

pentru a defini următoarele mărimi:

- densitatea spectrală de autocorelație:

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}X(\omega)X^*(\omega) = \lim\frac{1}{T}|X(\omega)|^2 \qquad (5.4.7)$$

unde $X^*(\omega)$ este conjugata complexă a funcției $X(\omega)$,

- funcția de autocorelație: $R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\omega)exp(i\omega\tau)d\omega$ (5.4.8)

care este dependentă de densitatea spectrală $S_{xx}(\omega)$.

Densitatea spectrală de autocorelație împreună cu funcția de autocorelație formează o pereche de transformate Fourier :

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau)exp(-i\omega\tau)d\tau \qquad (5.4.9)$$

Dacă funcțiile de autocorelație şi densitatea spectrală sunt pare:

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau); \qquad S_{xx}(\omega) = S_{xx}(-\omega) \qquad (5.4.10)$$

atunci există relațiile: $R_{xx}(\tau) = 2\int_0^\infty S_{xx}(\omega)exp(i\omega\tau)d\omega$ (5.4.11)

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty R_{xx}(\tau)exp[-i\omega\tau]d\tau \qquad (5.4.12)$$

Pentru τ = 0 se obține rezultatul:

$$R_{xx}(0) = 2\int_0^\infty S_{xx}(\omega)d\omega = \overline{x^2} \tag{5.4.13}$$

deci media pătratică reprezintă aria cuprinsă sub graficul funcției densității spectrale S_{xx} (fig. 5.4.1).

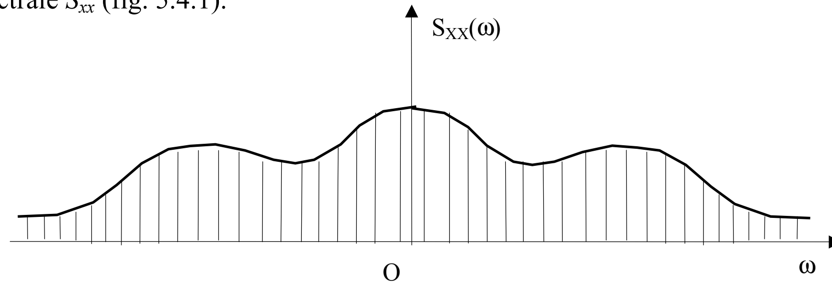


Fig. 5.4.1

O metodă practică pentru estimarea densității spectrale constă în folosirea transformatei Fourier pe o lungime finită. Se consideră realizarea *x(t)* a unui proces aleator pentru care transformata Fourier pe o lungime finită este:

$$X_T(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega t}x(t)dt \tag{5.4.14}$$

Ținând seama de (5.4.7), estimarea densității spectrale se obține sub forma :

$$\hat{S}_x(\omega) = \frac{1}{T}|X_T(\omega)|^2 \tag{5.4.15}$$

cunoscută şi sub denumirea de *transformare Fourier finită* (rapidă).

Relațiile (5.4.13), (5.4.14) şi (5.4.15) stau la baza metodei filtrării pentru determinarea experimentală a densității spectrale.

Schema generală a procedeului este dată în figura 5.4.2. Astfel, dacă funcția procesului aleator *x(t)* este trecută printr-o bandă filtru $(\omega\,,\ \omega+\Delta\omega)$ se calculează media pătratică, rezultatul se împarte la $\Delta\omega$ şi se obține transformarea Fourier finită $\hat{S}_x(\omega)$. Variind banda de filtrare, se poate obține spectrul pentru întreg domeniul de frecvența care interesează.

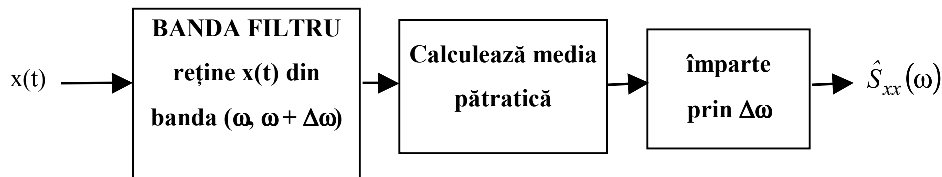


Fig. 5.4.2.

5.5. Procese de bandă îngustă şi de bandă largă

Un proces a cărei densitate spectrală este distribuită în cea mai mare parte într-o bandă de frecvență îngustă (figura 5.5.1.a) este denumit *proces de bandă îngustă.*

Un proces a cărei densitate spectrală este distribuită într-o bandă largă de frecvențe (figura 5.5.1. b) procesul este denumit *proces de bandă largă.*

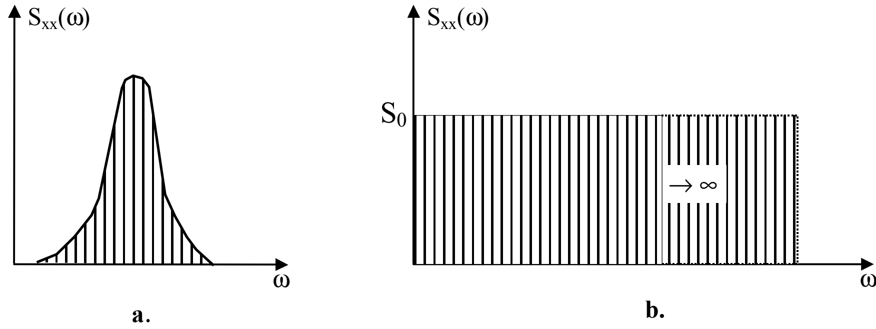


Fig. 5.5.1

Procesul de bandă largă având densitatea spectrală constantă S_0 (figura 5.5.1.b) este denumit zgomot - alb . Valoarea mediei pătratice a cestui proces este infinit, ceea ce face ca acest proces să reprezinte o idealizare, dar cu toate acestea el are unele aplicații practice utile.

Funcția de autocorelație a procesului de bandă largă, folosind (5.4.5) este

$$R_{xx}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} S_0 epx(i\omega\tau)d\omega = 2\pi S_0(\tau), \qquad (5.5.1)$$

unde δ(τ) reprezintă funcția Dirac, având următoarele proprietăți:

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & daca \quad t\neq 0\\ \infty & daca \quad t=0\end{cases}; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1;$$

$$\int_{\infty-}^{t}\delta(\tau)d\tau=\begin{cases}0 & daca \quad t<0\\ \frac{1}{2} & daca \quad t=0\\ 1 & daca \quad t>0\end{cases}; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=\varphi(t); \qquad (5.5.2)$$

$$\int_0^t \delta(t)dt = H(t)$$

unde *H (t)* este funcția de tip treaptă (Heaviside).

Verificarea relației (5.5.1) se obține cu uşurință, folosind transformata inversă şi proprietățile (5.5.2). Într-adevăr, aplicând (5.4.9) se obține:

$$S_{xx}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_{xx}(\tau)exp(-i\omega\tau)d\tau=S_0\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)exp(-i\omega\tau)d\tau=S_0 \quad (5.5.3)$$

După determinarea densității spectrale a procesului X este necesar să se determine densitățile spectrale ale vitezelor $\dot{X}$ şi accelerațiilor $\ddot{X}$. Se consideră funcția de autocorelație:

$$R_{xx}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)x(t+\tau)dt \quad (5.5.4)$$

care se derivează în raport cu τ:

$$\frac{dR_{xx}(\tau)}{d\tau}=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\frac{dx(t+\tau)}{d(t+\tau)}\frac{d(t+\tau)}{d\tau}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\dot{x}(t+\tau)dt \quad (5.5.5)$$

Pentru un proces staționar, relația (5.5.5) se poate scrie sub forma:

$$\frac{dR_{xx}(\tau)}{d\tau}=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)\dot{x}(t)dt \quad (5.5.6)$$

Derivând încă o dată în raport cu τ se obține :

$$\frac{d^2R_{xx}(\tau)}{d\tau^2}=-\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{x}(t-\tau)\dot{x}(t)dt=-R_{\dot{x}\dot{x}}(\tau) \quad (5.5.7)$$

Considerând relația funcției de autocorelație (5.4.5)

$$R_{xx}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}S_{xx}(\omega)exp(i\omega\tau)d\omega \quad (5.5.8)$$

şi derivând de două ori în raport cu τ se obține:

$$\frac{d^2R_{xx}(\tau)}{d\tau^2}=-\int_{-\infty}^{+\infty}\omega^2S_{xx}(\omega)exp(i\omega\tau)d\omega=-R_{\dot{x}\dot{x}}(\tau) \quad (5.5.9)$$

Introducând funcția densității spectrale a vitezelor $S_{\dot{x}\dot{x}}(\omega)$, se poate scrie analog:

$$R_{\dot{x}\dot{x}}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}S_{\dot{x}\dot{x}}(\omega)exp(i\omega\tau)d\omega \quad (5.5.10)$$

Identificând (5.5.10) cu (5.5.9) se obține *densitatea spectrală a vitezei:*

$$S_{\dot{x}\dot{x}}(\omega) = \omega^2 S_{xx}(\omega) \quad (5.5.11)$$

În mod similar se obține *densitatea spectrală a accelerației:*

$$S_{\ddot{x}\ddot{x}}(\omega) = \omega^2 S_{\dot{x}\dot{x}}(\omega) = \omega^4 S_{xx}(\omega) \quad (5.5.12)$$

Funcția de intercorelație între deplasarea x şi viteza $\dot{x}$ este totdeauna zero. Într-adevăr considerând funcția de intercorelație

$$R_{x\dot{x}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{x\dot{x}}(\omega) exp(i\omega\tau) d\omega \quad (5.5.13)$$

şi derivând această funcție în raport cu τ se obține:

$$\frac{d}{d\tau}\left[R_{xx}(\tau)\right] = i \int_{-\infty}^{+\infty} \omega S_{\dot{x}x}(\omega) exp(i\omega\tau) d\omega = 0 \quad (5.5.14)$$

întrucât integrantul este o funcție impară, valoarea integralei de la -∞ la 0 este egală şi de semn contrar cu valoarea integralei de la 0 la ∞.

- Pentru un proces aleator ergodic de badă largă (cu media zero), ținând seama de (5.5.11) şi (5.5.12), se obțin expresiile:

$$D_{xx} = \sigma_{xx}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\omega) d\omega$$

$$D_{\dot{x}\dot{x}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 S_{xx}(\omega) d\omega \quad (5.5.15)$$

$$D_{\ddot{x}\ddot{x}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^4 S_{xx}(\omega) d\omega$$

- Pentru un proces în bandă îngustă (figura 5.5.2 a), aplicând (5.5.15) rezultă

$$D_{xx} \approx 2 S_0 \Delta\omega\,;$$

$$D_{\dot{x}\dot{x}} \approx 2 S_0 \omega_0^2 \Delta\omega\,; \quad (5.5.16)$$

$$D_{\ddot{x}\ddot{x}} = 2 S_0 \omega_0^4 \Delta\omega$$

Folosind (5.4.5) se determină funcția de autocorelație:

$$R_{xx}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\omega)exp(i\omega\tau)d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\omega)cos\,\omega\tau d\omega=$$
$$=S_0\int_{-\omega_2}^{-\omega_1} cos\,\omega\tau d\omega+S_0\int_{\omega_1}^{\omega_2} cos\,\omega\tau d\omega=2S_0\frac{1}{\tau}sin\,\omega\tau\Big|_{\omega_1}^{\omega_2} \quad (5.5.17)$$

Rezultă:

$$R_{xx}(\tau)=S_0\frac{1}{\tau}sin(\Delta\omega\tau)cos(\Delta\omega\tau) \quad (5.5.17')$$

al cărei grafic este prezentat în fig. 5.5.2.b. Pentru $\tau = 0$ se obține $R_{xx}(0) = S_0\Delta\omega = max$, care pentru un proces staționar cu media nulă, reprezintă chiar dispersia.

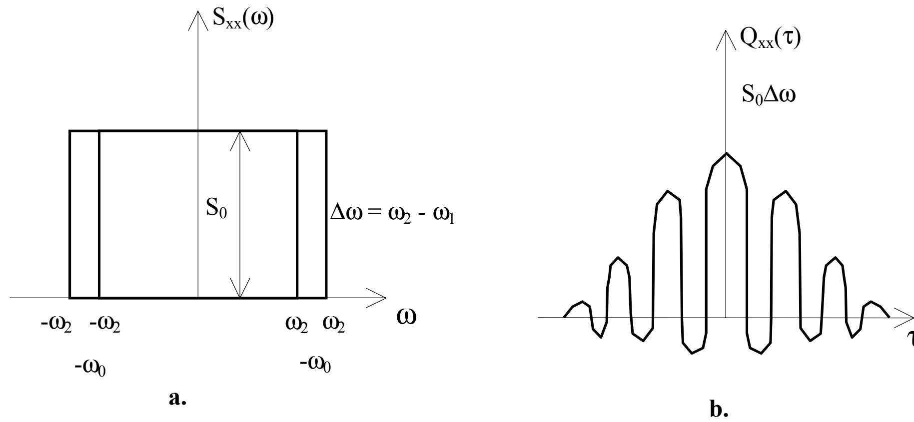


Fig.5.5.2

Din relațiile (5.5.16) se determină pulsația caracteristică

$$\omega_0^2 = D_{\dot{x}\dot{x}} / D_{xx} \quad (5.5.18)$$

Dacă momentele de ordinul *n* ale spectrului sunt definite de relația:

$$M_n = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\omega)\omega^n d\omega \quad (5.5.19)$$

atunci pulsația caracteristică se exprimă prin:

$$\omega_0^2 = M_2 / M_0 \quad (5.5.20)$$

5.6. Răspunsul dinamic la forțe de excitație nearmonice

5.6.1. Răspunsul dinamic la forțe de excitație aleatoare în cazul sistemelor cu un grad de libertate

Se consideră ecuația generală a sistemelor cu un grad de libertate:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f(t) \tag{5.6.1}$$

şi se notează cu $S_{ff}(\omega)$ densitatea spectrală a răspunsului dinamic.

În conformitate cu (5.4.5) funcția de autocorelație a răspunsului $u(t)$ este:

$$R_{uu}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t)u(t+\tau)d\tau \tag{5.6.2}$$

Folosind răspunsul dinamic sub forma: $u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\cdot h(\tau)d\tau$,

se obțin relațiile:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau_1)h(\tau_1)d\tau_1 \tag{5.6.3}$$

$$u(t+\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+\tau-\tau_2)h(\tau_2)d\tau_2 \tag{5.6.4}$$

care, introduse în (5.6.2), conduc la expresia:

$$R_{uu}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t-\tau_1)f(t+\tau-\tau_2)d\tau \right] \tag{5.6.5}$$

unde funcțiile $h(\tau_1)$, $h(\tau_2)$ reprezintă răspunsul sistemului la un impuls unitar aplicat la momentele τ_1 respectiv τ_2.

Ținând seama că termenul din parantezele mari al relației (5.6.5) notată cu $R_{ff}(\tau + \tau_1 - \tau_2)$ este chiar funcția de autocorelație a forțelor aleatoare $f(t)$, relația (5.6.2) devine:

$$R_{uu}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)R_{ff}(\tau+\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \tag{5.6.6}$$

Densitatea spectrală a răspunsului $S_{uu}(\omega)$ se determină cu relația:

$$\begin{aligned} S_{uu}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} R_{uu}(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau_1} h(\tau_1)d\tau_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau_2} h(\tau_2)d\tau_2 \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(\tau-\tau_1+\tau_2)} R_{ff}(\tau+\tau_1-\tau_2)d\tau \end{aligned} \tag{5.6.7}$$

Folosind transformata Fourier:

$$H(i\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}dt \tag{5.6.8}$$

sunt evidențiate relațiile:

$$\overline{H}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau_2}h(\tau_2)d\tau_2; \qquad \widetilde{H}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau_1}h(\tau_1)d\tau;$$

$$\overline{H}(\omega)\widetilde{H}(\omega)=|H(\omega)|^2 \tag{5.6.9}$$

în care $\widetilde{H}(\omega)$ este conjugata lui $\overline{H}(\omega)$.

Pe baza relației (5.6.7) se obține *densitatea spectrală a excitației:*

$$S_{ff}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(\tau+\tau_1-\tau_2)}R_{ff}(\tau+\tau_1-\tau_2)d\tau \tag{5.6.10}$$

Înlocuind (5.6.10) şi (5.6.9) în (5.6.7) rezultă relația:

$$S_{uu}(\omega)=\overline{H}(\omega)\widetilde{H}(\omega)S_{ff}(\omega)=|H(\omega)|^2 S_{ff}(\omega) \tag{5.6.11}$$

care arată că densitatea spectrală a deplasării la pulsația ω este egală cu densitatea spectrală a forțelor aleatoare multiplicată cu pătratul modulului receptanței complexe, denumit şi funcție de transfer.

Din (5.6.2) se obține: $R_{uu}(0)=\overline{u^2(t)}$, iar din (5.4.11):

$$R_{uu}(0)=\int_{-\infty}^{+\infty} S_{uu}(\omega)d\omega. \tag{5.6.11'}$$

Asamblate, aceste relații împreună cu (5.6.11), conduc la expresia:

$$\overline{u^2(t)}=\int_{-\infty}^{+\infty} S_{uu}(\omega)d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}|H(\omega)|^2 S_{ff}(\omega)d\omega \tag{5.6.12}$$

care reprezintă media pătratului răspunsului dinamic în deplasări.

Din relația:

$$H(i\omega)=\frac{1}{k-m\omega^2+ic\omega}=\frac{1}{k}\frac{1-\frac{\omega^2}{p^2}-i\cdot 2\zeta\cdot\frac{\omega}{p}}{\left(1-\frac{\omega^2}{p^2}\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{p}\right)^2} \qquad \text{5.6.13)}$$

rezultă pătratul modulului receptanței complexe sau funcția de transfer (fig.5.6.1):

$$|H(\omega)|^2=\frac{1}{k^2}\left[\left(1-\eta^2\right)^2+(2\zeta\eta)^2\right]^{-1}, \qquad \eta=\frac{\omega}{p} \tag{5.6.14}$$

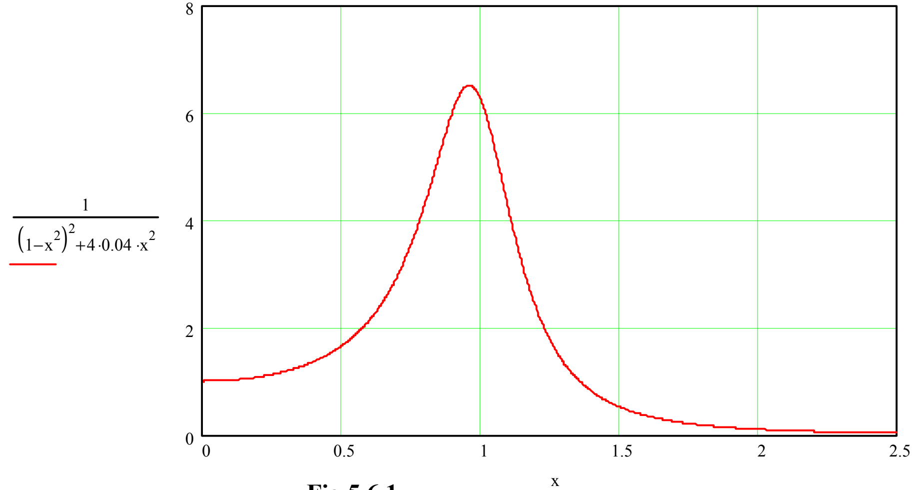


Fig.5.6.1

Dispersia variabilei aleatoare *u(t)*, este:

$$D(u) = \sigma^2(u) = \overline{u^2(t)} - \overline{u}^2(t) \tag{5.6.15}$$

în care $\overline{u}(t)$ reprezintă valoarea medie. Întrucât pentru procese ergodice valoarea medie este constantă, ținând seama de relația:

$$u(t) = h(t) = \frac{1}{mp_a} e^{-\nu pt} \sin p_a t \tag{5.6.16}$$

se obține relația:

$$\begin{aligned} \overline{u(t)} &= \lim \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) d\tau \cdot \lim \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t-\tau) dt \\ \overline{u(t)} &= \overline{f}(t) \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) d\tau = \frac{1}{k} \overline{f(t)} \end{aligned} \tag{5.6.17}$$

care exprimă dependența dintre valoarea medie a răspunsului de excitație.

La procese staționare ergodice cu medie nulă, dispersia (5.6.15), devine:

$$D(u) = \sigma^2(u) = \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_{ff}(\omega) d\omega \tag{5.6.18}$$

Cu ajutorul dispersiei și a unei legi de repartiție, se poate calcula probabilitatea ca deplasarea să se găsească într-un anumit domeniu sau probabilitatea atingerii unei anumite valori maxime. Evident, în mod asemănător se determină dispersiile și probabilitățile atingerii unei anumite valori maxime pentru eforturi, tensiuni, accelerații etc.

5.6.2. Răspunsul dinamic la forțe de excitație periodice nearmonice

Forțele perturbatoare armonice este o clasă destul de limitată de excitații al sistemelor elastice cu sau fără amortizare. Cele mai multe excitații sunt nearmonice. Dintre acestea o clasă specială o constituie forțele perturbatoare periodice. Cea mai folosită metodă de rezolvare a acestui tip de probleme este metoda dezvoltării în serie Fourier. Ecuația diferențială a vibrațiilor amortizate ale unui sistem cu un grad de libertate se scrie:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \tag{5.6.19}$$

care se mai scrie:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + p^2 x = \frac{1}{m}F(t) \tag{5.6.20}$$

Orice funcție periodică f(t) se poate dezvolta în serie Fourier sub forma:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, cos(k\omega t) + b_k\, sin(k\omega t);$$

$$unde:\ a_0 = \frac{\omega}{2\pi}\int_o^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t)dt; \quad a_k = \frac{\omega}{\pi}\int_o^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t)cos(k\omega t)dt; \tag{5.6.21}$$

$$b_k = \frac{\omega}{\pi}\int_o^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t)sin(k\omega t)dt.$$

Expresia (5.6.21) se mai poate scrie sub forma:

$$f(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, cos(k\omega t - \varphi_k);$$

$$unde:\ c_0 = a_0; \quad c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \quad \varphi_k = arctan\frac{b_k}{a_k} \tag{5.6.22}$$

În dezvoltarea Fourier (5.6.22) semnificația termenilor este următoarea:

$\frac{c_0}{2}$ - valoarea medie a funcției

$c_k\, cos(k\omega t - \varphi_k)$ - armonica de ordinul n a vibrațiilor

$c_1, c_2, c_3, c_4, ...$ - spectrul amplitudinilor

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, ...$ - spectrul fazelor

Dacă funcția periodică f(t) este pară atunci seria (5.6.22) conține numai componentele în cosinus: $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, cos(n\omega t)$ iar dacă funcția periodică

f(t) este impară atunci seria (5.6.21) conține numai componentele în sinus: $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\, sin(n\omega t)$;

Deşi în general seriile Fourier sunt infinite, numărul armonicelor unei funcții periodice poate fi finit. Dacă într-un punct funcția f(t) este continuă, atunci seria Fourier converge către această valoare, iar dacă funcția f(t) nu este continuă, atunci seria Fourier converge către valoarea medie a funcție din punctul de discontinuitate.

Exemplul 1

Să se reprezinte cu ajutorul dezvoltării în serie Fourier funcția periodică impară (fig. 5.6.2) de perioadă 2π, definită astfel:

$$f(t)=\begin{cases}1 & pentru\ t\in(0,\pi)\\ -1 & pentru\ t\in(\pi,2\pi)\end{cases} \qquad (5.6.23)$$

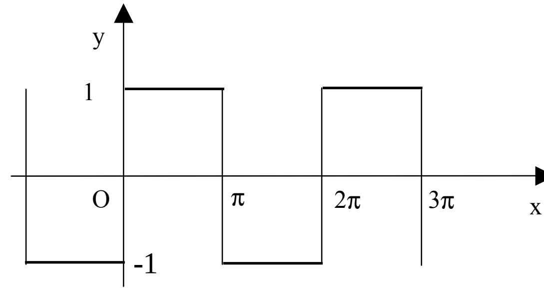


Fig.5.6.2

Coeficienții seriei Fourier a_0, a_k şi b_k sunt dați de formulele (5.6.21):

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)dt=\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi}f(t)dt+\int_{\pi}^{2\pi}f(t)dt\right]=0$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)cos\,kt\,dt=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}cos\,kt\,dt-\int_{\pi}^{2\pi}cos\,kt\,dt\right]=0 \qquad (5.6.24)$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)sin\,kt\,dt=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}sin\,kt\,dt-\int_{\pi}^{2\pi}sin\,kt\,dt\right]=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^k}{k}$$

Deci dezvoltarea în serie Fourier a funcției (5.6.23) se scrie:

$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{sin\,t}{1}+\frac{sin\,3t}{3}+\frac{sin\,5t}{5}+...\right) \qquad (5.6.25)$$

Exemplul 2

Să se reprezinte cu ajutorul dezvoltării în serie Fourier funcția periodică pară de perioadă 2π, definită astfel (fig. 5.6.3):

$$f(t)=\begin{cases} t & pentru\ t\in(0,\pi) \\ 2\pi-t & pentru\ t\in(\pi,2\pi) \end{cases} \tag{5.6.26}$$

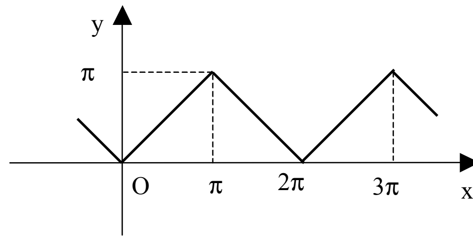


Fig. 5.6.3

Coeficienții seriei Fourier a_0, a_k şi b_k sunt:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)dt=\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi}t\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}(2\pi-t)dt\right]=\frac{\pi}{2}$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)cos\,kt\,dt=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}t\,cos\,kt\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}(2\pi-t)cos\,kt\,dt\right]=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^k}{k^2} \tag{5.6.27}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)sin\,kt\,dt=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}t\,sin\,kt\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}(2\pi-t)sin\,kt\,dt\right]=0$$

Deci dezvoltarea în serie Fourier a funcției (5.6.26) se scrie:

$$f(t)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{cos\,t}{1}+\frac{cos\,3t}{3^2}+\frac{cos\,5t}{5^2}+...\right) \tag{5.6.28}$$

Exemplul 3

Să se reprezinte cu ajutorul dezvoltării în serie Fourier funcția periodică de perioadă 2π, definită astfel (fig. 5.6.4):

$$f(t)=\begin{cases} t & pentru\ t\in(0,\pi) \\ t-2\pi & pentru\ t\in(\pi,2\pi) \end{cases} \tag{5.6.29}$$

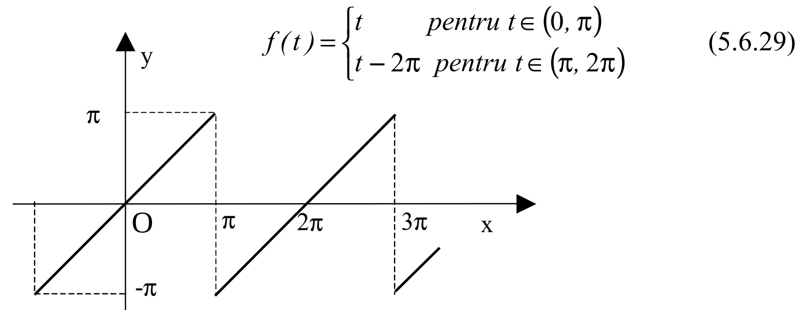


Fig.5.6.4

Coeficienţii seriei Fourier a_0, a_k şi b_k sunt:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} t\,dt + \int_{\pi}^{2\pi}(t-2\pi)dt\right] = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} t\cos kt\,dt + \int_{\pi}^{2\pi}(t-2\pi)\cos kt\,dt\right] = 0 \qquad (5.6.30)$$

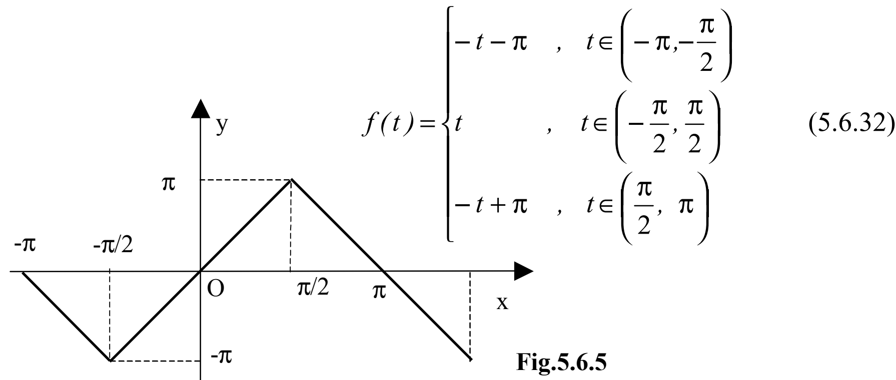
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin kt\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} t\sin kt\,dt + \int_{\pi}^{2\pi}(t-2\pi)\sin kt\,dt\right] = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}$$

Deci dezvoltarea în serie Fourier a funcţiei (5.6.29) se scrie:

$$f(t) = 2\left(\frac{\sin t}{1} - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} + \ldots\right) \qquad (5.6.31)$$

Exemplul 4

Să se reprezinte cu ajutorul dezvoltării în serie Fourier funcţia periodică impară de perioadă 2π, definită astfel (fig. 5.6.5):



$$f(t) = \begin{cases} -t-\pi &, \ t \in \left(-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right) \\ t &, \ t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ -t+\pi &, \ t \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \ \pi\right) \end{cases} \qquad (5.6.32)$$

Fig.5.6.5

Coeficienţii seriei Fourier a_0, a_k şi b_k sunt:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0; \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,dt = 0$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin kt\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} t\sin kt\,dt + \int_{\pi}^{2\pi}(-t+\pi)\sin kt\,dt\right] = \frac{4}{\pi}\frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{k^2} \qquad (5.6.33)$$

Deci dezvoltarea în serie Fourier a funcţiei (5.6.32) se scrie:

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin t}{1^2} - \frac{\sin 3t}{3^2} + \frac{\sin 5t}{5^2} - \frac{\sin 7t}{7^2} + \ldots\right) \qquad (5.6.34)$$

5.7. Răspunsul dinamic al sistemelor la şocuri mecanice

5.7.1. Tipuri de şocuri mecanice

Şocul mecanic este o formă de transmitere de energiei din exterior într-un timp foarte scurt. Această transmitere se realizează prin acțiunea unei forțe de excitație *F(t)* (numită forță percutantă) având o anumită variație (dreptunghiulară, triunghiulară, semisinusoidală, etc.) pe durată *T* foarte scurtă (fig. 5.7.1. a, b, c).

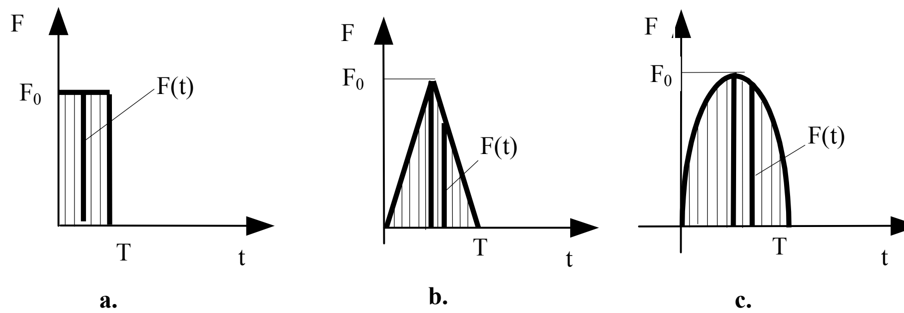


Fig. 5.7.1

Funcția *F(t)* indică forma de undă a şocului, iar transformata Fourier a acesteia reprezintă spectrul de pulsații:

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{0}^{T} F(t) e^{-i\omega t} dt \qquad (5.7.1)$$

Ordonatele funcției $|F(i\omega)|$ pentru diferite valori ale lui ω sunt denumite *componente spectrale.*

Astfel pentru $\omega = 0$ se obține componenta spectrală din origine:

$$|F(i\omega)| = \int_{0}^{T} F(t) dt, \qquad (5.7.2)$$

Componenta spectrală din origine reprezintă impulsul forței *F(t)* sau cantitatea de mişcare transmisă sistemului din exterior în timpul şocului.

Mişcarea unui sistem elastic, la acțiunea unui şoc având o formă de undă cunoscută se poate obține folosind *integrala Duhamel* atunci când se ține seama de amortizări, sau folosind *răspunsul dinamic rezidual* atunci când amortizările se neglijează.

Răspunsul dinamic al structurii pe durata şocului (*0-T*) este denumit *răspuns inițial*, iar mişcarea liberă pentru $t > T$ este denumită *răspuns rezidual.*

Răspunsul dinamic la şocuri depinde de raportul dintre durata şocului *T* şi perioada T_p a vibraţiilor libere.

5.7.2. Răspunsul dinamic la un şoc dreptunghiular

Se consideră un sistem elastic cu un singur grad de libertate, fără amortizare, sub acţiunea unui şoc dreptunghiular (fig. 5.7.1.a):

$$F(t) = F_0 \quad \text{pentru} \quad t \in [0;T] \tag{5.7.3}$$

$$F(t) = 0 \quad \text{pentru} \quad t > T.$$

Se deosebesc două feluri de răspunsuri:

- *răspunsul dinamic iniţial* al sistemului (pentru $t \in [0;T]$) este de relaţia:

$$\eta = \frac{1}{mp}\int F_0 \sin p(t-\tau)d\tau = \frac{F_0}{mp^2}(1-\cos pt), \tag{5.7.4}$$

- *răspunsul dinamic rezidual* al sistemului (pentru t > T) este un răspund armonic dat de: $\eta_1 = C_1 \cos pt_1 + C_2 \sin pt_1$, (5.7.5)

unde s-a notat $t_1 = t - T$

Din condiţiile iniţiale: $\eta(T) = \eta_1(0)$, $\dot{\eta}(T) = \dot{\eta}_1(0)$ se determină constantele C_1 şi C_2 şi se obţine răspunsul dinamic rezidual sub forma:

$$\eta_1 = \eta_{st}[\cos p(t-T) - \cos pt], \tag{5.7.6}$$

unde η_{st} reprezintă deplasarea statică dată de o forţă F_0:

$$\eta_{st} = \frac{F_0}{mp^2} = \frac{F_0}{k} \tag{5.7.7}$$

a. Dacă durata şocului este jumătate din perioada proprie ($T = \frac{T_p}{2} = \frac{\pi}{p}$) oscilaţia este reprezentată în figura 5.7.2 cu linie continuă. Se observă că valoarea maximă este:

$$\eta_{max} = 2\,\eta_{st} \tag{5.7.8}$$

Deplasarea maximă se atinge deci pentru $t = \frac{\pi}{p} = T$ adică în momentul în care încetează acţiunea forţei exterioare. Întrucât sistemul s-a considerat fără amortizare, în vibraţia liberă descrisă de ecuaţia (5.7.6) deplasarea maximă este aceeaşi.

b. Dacă durata şocului este un sfert din perioada proprie $T = T_p / 4$ oscilaţia sistemului descrisă de relaţia (5.7.3) pentru $t \in \left[0; \frac{\pi}{2p}\right]$ şi de relaţia (5.7.4) pentru $t > \frac{\pi}{2p}$ este reprezentată cu linie întreruptă în figura.5.7.2.

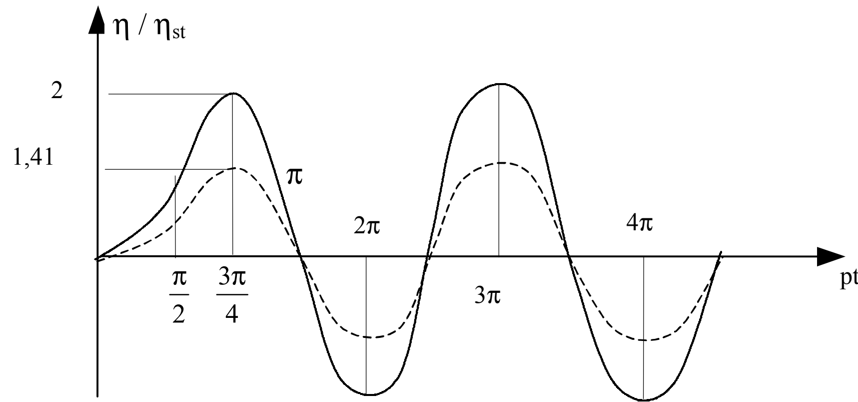


Fig. 5.7.2

Deplasarea maximă: $\eta_{max} = 1{,}41\eta_{st}$ se atinge pentru: $pt = \frac{3\pi}{4}$, adică după încetarea şocului în timpul vibraţiei libere. Deci deplasarea maximă depinde de raportul dinte durata şocului şi perioada proprie (T/T_p) şi pentru aceeaşi energie introdusă în sistem efectul este cu atât mai puternic cu cât durata este mai mică.

Dacă energia introdusă în sistem este aceeaşi pentru cele două situaţii considerate (F_0 cu durata T şi F'_0 cu durata T') atunci există egalitatea:

$$F_0\, T = F'_0\, T' \qquad (5.7.9)$$

unde înlocuind $T = T_p / 2$ şi $T' = T'_p / 4$ se obţine: $F'_0 = 2F_0$ (5.7.10)

În consecinţă, deplasarea maximă se produce atunci când durata şocului este mai mică şi rezultă $\eta_{max} = 2 \cdot 1{,}41\ \eta_{st} = 2{,}82\ \eta_{st}$, ceea ce justifică afirmaţia făcută anterior.

Dacă se reprezintă raportul η_{max} / η_{st} în funcţie de T / T_p , se obţine un grafic, denumit *spectrul de răspuns la şoc.*

5.7.3. Răspunsul dinamic la şoc semisinusoidală

Se consideră un sistem cu un grad de libertate, fără amortizări solicitat pe o durată T de o forţă de formă semisinusoidală de amplitudine F_0 (fig. 5.7.1.c):

$$F(t) = F_0 \sin\frac{\pi}{T}t, \qquad t \in (0,T) \tag{5.7.11}$$

➢ *răspunsul dinamic inițial* se obține din relația (5.7.4):

$$\eta = \frac{1}{mp}\int_0^t F(\tau)\sin p(t-\tau)d\tau = \frac{F_0}{m}\cdot\frac{T^2}{\pi^2 - p^2T^2}\left(\frac{\pi}{pT}\sin pt - \sin\frac{\pi}{T}t\right) \tag{5.7.12}$$

➢ *răspunsul dinamic rezidual* se obține din relația (5.7.5):

$$\eta_1 = \frac{F_0}{mp}\frac{\pi T}{\pi^2 - p^2T^2}\left[\sin pt + \sin p(t-T)\right] \tag{5.7.13}$$

a. Pentru o durată a şocului egală cu jumătate din perioada proprie: $T = \frac{T_p}{2} = \frac{\pi}{p}$, după eliminarea nedeterminării în relația (5.7.12) *răspunsul dinamic inițial* se scrie:

$$\eta = \frac{F_0}{2mp^2}\left(\sin pt - pt\cos pt\right) = \frac{1}{2}\eta_{st}\left(\sin pt - pt\cos pt\right), \tag{5.7.14}$$

unde $\eta_{st} = F_0 / mp^2 = F_0 / k$ reprezintă deplasarea statică produsă de F_0.

Răspunsul dinamic rezidual conform (5.7.13) devine:

$$\eta_1 = -\frac{\pi}{2}\eta_{st}\cos pt\,. \tag{5.7.15}$$

Răspunsul dinamic la şoc (curba 1) este reprezentat pe figura 5.10.

b. Pentru o durată a şocului egală cu un sfert din perioada proprie: $T = \frac{T_p}{4} = \frac{\pi}{2p}$, *răspunsul dinamic inițial* devine:

$$\eta = \eta_{st}\frac{1}{3}\left(2\sin pt - \sin 2pt\right); \tag{5.7.16}$$

iar *răspunsul dinamic rezidual:*

$$\eta_1 = \eta_{st}\frac{2}{3}\left(\sin pt - \cos pt\right). \tag{5.7.17}$$

Graficul răspunsului dinamic când durata şocului este $T = T_p/4$ (curba 2 din fig.5.7.3) are maximul η_{max}=0,943η_{st} în timpul răspunsului rezidual. Acest maxim este mai mic decât cel corespunzător duratei şocului $T = T_p/2$ (curba 1 din fig.5.7.3) întrucât unda la şoc având aceeaşi intensitate din primul caz introduce mai puțină energie în sistem. Întrucât impulsul total în primul caz este:

$$IM = \int_0^T F^0 \sin\frac{\pi}{T} t \, dt = \frac{2}{\pi} F_0 T \qquad (5.7.18)$$

pentru ca în al doilea caz să existe acelaşi impuls trebuie dublată forţa maximă:

$$F' = 2F_0 \qquad (5.7.19)$$

Rezultă o deplasare $\eta_d = 2 \cdot 0{,}943\eta_{st} = 1{,}886\eta_{st}$, care este mai mare decât deplasarea $\eta_d = 1{,}571\eta_{st}$ corespunzătoare şocului având durata $T_p/2$.

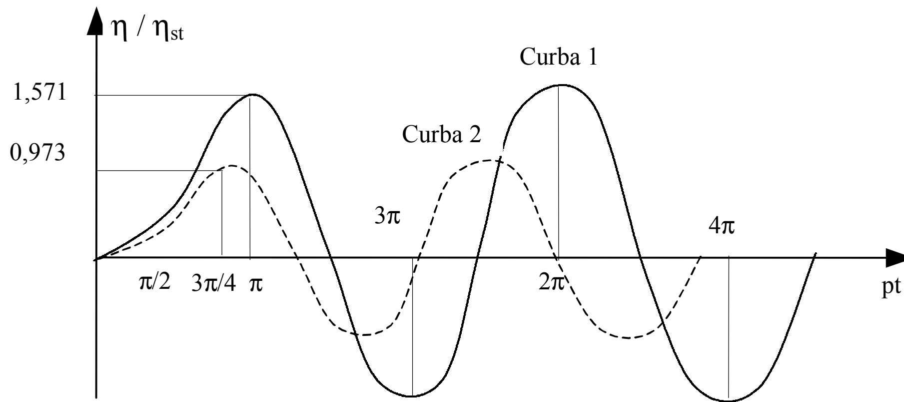


Fig. 5.7.3

Observaţie

Şocul sub formă de undă semisinusoidală, este mai defavorabil decât un şoc cu undă dreptunghiulară pentru acelaşi impuls total.

Astfel, la un şoc dreptunghiular cu durata $T = T_p/2$, deplasarea maximă este $\eta_{max} = 2\eta_{st}^{F_0}$ iar la un şoc de undă sinusoidală de durată $T = T_p/2$ pentru acelaşi impuls total avem:

$$\frac{F_0 T_p}{2} = \frac{2}{\pi} \frac{F_0 T_p'}{2} \qquad (5.7.20)$$

şi se obţine deplasarea maximă:

$$\eta_{max} = \eta_{st} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1{,}571 = 2{,}467\eta_{st}^{F_0} \qquad (5.7.21)$$

5.8. Răspunsul dinamic al sistemelor la acțiuni seismice

În general, acțiunea seismică asupra unei structuri mecanice se consideră sub forma unei mişcări perturbatorii asupra fundației acesteia, pe direcție orizontală (în orice sens) şi pe direcție verticală. Răspunsul dinamic al unei structuri mecanice la acțiuni seismice depinde deci de caracteristicile mişcării perturbatoare, de conlucrarea dintre teren şi structură şi de caracteristicile fizice şi mecanice ale structurii.

Stabilirea răspunsului dinamic al structurii constă în determinarea deplasărilor structurii, a vitezelor şi accelerațiilor diferitelor puncte, determinarea forțelor dinamice care se dezvoltă datorită acțiunii seismice, precum şi a eforturilor secționale şi a tensiunilor din componentele structurii.

Calculul dinamic la acțiuni seismice are însă ca principal neajuns insuficienta cunoaştere a caracteristicilor undelor seismice pe amplasamentul structurii şi a modului de conlucrare dintre teren şi structură. De aceste caracteristici depinde exactitatea calculului dinamic la acțiuni seismice şi eficiența masurilor de protecție antiseismică.

5.8.1. Unde seismice şi modalități de propagare

În ipoteza că pământul este un mediu continuu omogen şi izotrop, ecuațiile teoriei elasticității în spațiu pentru o particulă în mişcare sunt:

$$(\lambda + G)\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}\varepsilon_v + G\Delta\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + q\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = q\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \qquad (5.8.1)$$

unde s-a notat cu:

- constantele lui Lamé: $\lambda = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}; G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ (5.8.2)
- E - modulul de elasticitate longitudinală;
- G - modulul de elasticitate transversală;
- μ - coeficientul lui Poisson
- invariantul deformațiilor specifice
- $\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ (5.8.3)
- $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ operatorul lui Laplace; (5.8.4)

- *u,v, w* - deplasările după cele trei direcții;
- *q* - densitatea specifică;
- *X,Y, Z* intensitățile forțelor masice.

a. Unde longitudinale

Dacă forțele masice se consideră constante sau nule, prin derivarea ecuațiilor (5.8.1), în raport cu *x, y* şi *z*, şi prin adunarea lor, ținând seama de (5.8.3), (5.8.4) se obține ecuația:

$$(\lambda + 2G)\Delta\varepsilon_v = \rho \frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial t_2} \tag{5.8.5}$$

Dacă se notează

$$v_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{q}} = \sqrt{\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu} \cdot \frac{G}{q}}\,, \qquad 5.8.6)$$

ecuația (5.8.5) devine:

$$v_l^2 \Delta\varepsilon_v - \frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial t^2} = 0 \tag{5.8.7}$$

şi reprezintă ecuația diferențială care descrie propagarea undelor longitudinale, adică a acelor unde ce corespund cazului când au loc comprimări sau dilatări ale mediului în direcția de propagare.

În cazul particular când $u = u(x,t),\ v = 0,\ w = 0$ şi în ipoteza mediului continuu infinit (care nu necesită condiții la limită), ecuația (5.8.7), ia forma:

$$v_l^2 \frac{\partial^2 u(xt)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(xt)}{\partial t^2} = 0 \tag{5.8.8}$$

şi reprezintă ecuația de propagare a undelor în sensul axei *x* . Această ecuație este identică cu ecuațiile vibrațiilor longitudinale ale barelor cu masă continuă.

$$u = f(x - v_l t) + g(x + v_l t) \tag{5.8.9}$$

Această expresie (oricare ar fi funcțiile *f* şi *g*) reprezintă o soluție a ecuației (5.8.7). Într-adevăr, derivând de două ori funcțiile f şi g în raport cu argumentul $(x - v_l t)$ şi calculând:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x - v_l t) + g''(x - v_l t); \tag{5.8.10}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v_l^2 \left[f''(x - v_l t) + g''(x + v_l t) \right], \tag{5.8.11}$$

se observă că ecuația diferențială (5.8.7) este satisfăcută.

Se consideră acum numai funcția:

$$u_1 = f(x - v_l t) \tag{5.8.12}$$

care pentru $t = 0$ reprezintă o perturbație $u_{1,0} = f(x)$, de forma celei din fig. 5.8.1.a şi se notează $f(x') = h$. În această situație, pentru toate valorile x şi t pentru care: $x - v_l t = x'$, se obține $u_1=f(x-v_l t)= h$. În consecință, perturbația $u_{1,0}=f(x)$ se deplasează pe axa x cu o viteză v_l (numită unda directă, fig.5.8.1.b).

Mărimea v_l (5.8.6), introdusă ca o notație, reprezintă de fapt viteza de propagare a undelor longitudinale.

În cazul barelor ea este: $v_l = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$ (5.8.13)

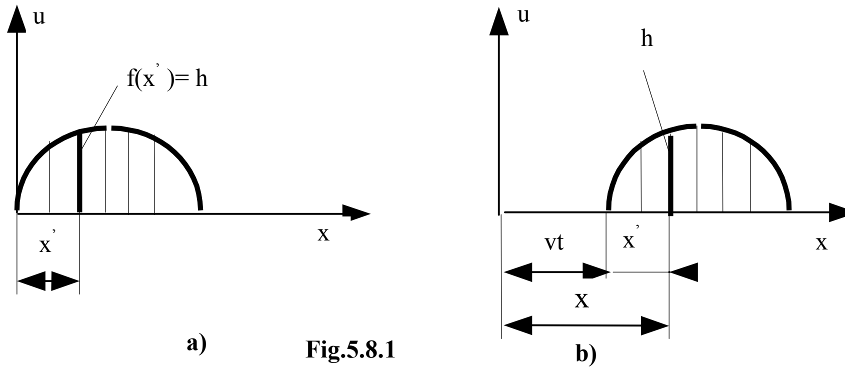


Fig.5.8.1

Analizând funcția: $u_2 = g(x + v_l t)$ (5.8.14)

în mod identic cum s-a procedat cu funcția (5.8.9), se ajunge la concluzia că ea reprezintă modulul de propagare al unei perturbații $u_{2,0} = g(x)$ în sens invers axei x (unda indirectă). În caz real, aşa cum arată soluția (5.103), acțiunea seismică este constituită din suprapunerea mai multor perturbații de intensități diferite, care se propagă în direcții şi cu viteze diferite.

Se consideră o undă elastică sinusoidală:

$$u = A\,sin\frac{2\pi}{L}\left(x - v_l t\right) = A\,sin\,2\pi\left(\frac{x}{L} - \frac{v_l t}{L}\right) \qquad (5.8.15)$$

Pentru x constant se obține perioada mişcării: $T = L / v_l$, din care rezultă că: $L= v_l T$ reprezintă lungimea de undă, adică distanța parcursă într-o perioadă.

Deformata specifică liniară este:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{A2\pi}{L}cos\frac{2\pi}{L}\left(x - v_l t\right) \qquad (5.8.16)$$

care conduce la tensiuni normale maxime, în sensul de propagare, egale cu:

$$\sigma = E\varepsilon_{max} = E\frac{A \cdot 2\pi}{L} = E\frac{A}{v_l T} = E\frac{Ta_{max}}{2\pi v_l}, \qquad (5.8.17)$$

unde: $T = 2\pi / \omega$ reprezintă perioada;

$a_{max} = A\omega^2$ - accelerația undei seismice

v_l - viteza de propagare.

Analiza formulei (5.8.15) precizează că tensiunile normale în sens orizontal ce se dezvoltă pe fețele fundațiilor structurilor sunt proporționale cu viteza de propagare. Cum vitezele de propagare în terenuri slabe sunt de 2 - 3 ori mai mici decât în terenuri tari, rezultă că solicitările fundațiilor structurilor în terenuri moi sunt de câteva ori mai mari decât în cazul terenurilor tari.

Datorită deplasărilor fundațiilor se produc fenomene de interacțiune între un teren-fundație, structură, precum şi vibrații, deosebit de complexe, ale structurilor. Răspunsul dinamic al acestora, depinde de caracteristicile undelor seismice, interacțiunea dintre teren şi structură şi de caracteristicile dinamice ale structurilor.

b. Unde transversale sau de forfecare

Când $\varepsilon_v = 0$, ecuația (5.8.1) descrie vibrațiile transversale sau echivolumetrice. Pentru cazul particular $\varepsilon_v = 0$, $X = Y = Z = 0$, $u = v = 0$ şi $w = w(xt)$, ecuația matriceală (5.8.1) devine:

$$\frac{G}{\rho}\frac{\partial^2 w(xt)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w(xt)}{\partial t^2} = 0, \qquad (5.8.18)$$

sau:

$$v_t^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \qquad (5.8.19)$$

şi descrie vibrațiile după axa z când unda se propagă în direcția x.

Analizând ecuația (5.8.19) în comparație cu (5.8.8) şi soluția (5.8.9), rezultă că mărimea v_t reprezintă viteza de propagare a undelor transversale:

$$v_t = \sqrt{\frac{G_t}{\rho}} \qquad (5.8.20)$$

Comparând valoarea (5.8.13) cu (5.8.20), se observă că viteza undelor longitudinale este mai mare decât cea a undelor transversale. Pentru $\mu = 0,25$ se obține:

$$v_l = \sqrt{3} v_t . \qquad (5.8.21)$$

Se poate sublinia faptul că acțiunea seismică asupra structurilor depinde atât de caracteristicile şocului seismic (energie degajată, durată, perioadă dominantă, etc.), de transmisibilitatea undelor seismice şi interferențele dintre ele, cât şi de interacțiunea dintre teren - structură şi caracteristicile dinamice ale structurii.

5.8.2. Răspunsul dinamic la acțiuni seismice

Răspunsul seismic al unei structuri este precizat prin funcțiile care descriu deplasările, vitezele şi accelerațiile diferitelor puncte ale structurii sub acțiunea mişcării seismice. Întrucât acest răspuns nu poate fi exprimat analitic în domeniul timpului datorită necunoaşterii caracteristicilor acțiunii seismice, în practica inginerească se folosesc *spectrele seismice de răspuns,* care reprezintă valorile maxime ale răspunsului (exprimate în deplasări, viteze sau accelerații) sau valorile spectrale.

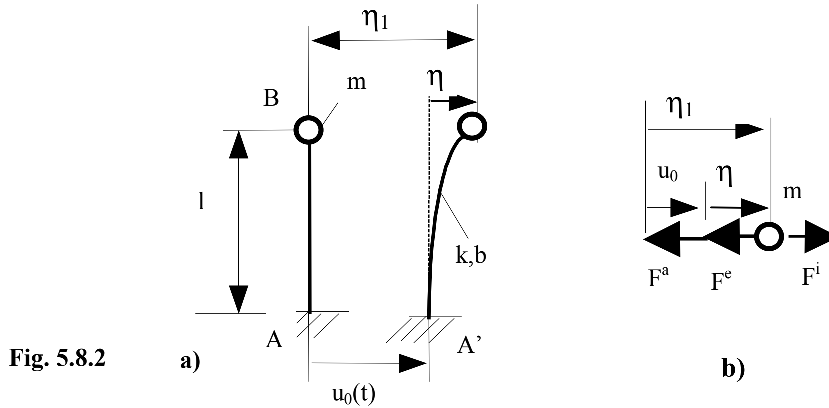


Fig. 5.8.2

Se consideră modelul dinamic al unei structuri cu un grad de libertate (fig.5.8.2.a) caracterizat prin masa m, constanta elastică k şi constanta de amortizare b. Baza structurii A este supusă unei mişcări aleatoare $u_0(t)$, specifică unei acțiuni seismice orizontale.

Se notează cu $u_a = \eta_1$ deplasarea absolută, astfel încât:

$$u_a(t) = u_0(t) + u(t) \qquad (5.8.22)$$

Izolând masa *m* şi scriind echilibrul forțelor (fig.5.12.b), pe baza principiului lui d'Alembert rezultă:

$$F^i = -m\ddot{u}_a; \quad F^a = b\dot{u}; \quad F^e = ku \qquad (5.8.23)$$

cu care se obține ecuația de mişcare:

$$m\ddot{u} + b\ddot{u} + ku = -m\ddot{u}_0 \qquad (5.8.24)$$

având soluții este de forma:

$$u = -\frac{1}{p^*}\int_0^t \ddot{u}_0(\tau)\cdot e^{-\nu p(t-\tau)} \sin p^*(t-\tau)d\tau \qquad (5.8.25)$$

unde: p reprezintă pulsația proprie fără amortizare;

$p^* = \sqrt{1-\nu^2}$ - pulsația proprie cu amortizare;

τ - variabila în intervalul de timp *0 - t.*

sau de forma: $u = -\frac{1}{p^*} S\, sin(p^* t - \alpha)$ (5.8.25)

unde : $S = \sqrt{A^2 + B^2}$; $A = \int_0^t \ddot{u}_0(\tau) e^{-p\nu(t-\tau)} cos\, p^* \tau d\tau;$

$$B = \int_0^t \ddot{u}_0(\tau) e^{-p\nu(t-\tau)} sin\, p^* \tau d\tau; \quad (5.8.26)$$

Întrucât derivata unei funcții de forma $F(t) = \int_0^t f(\tau, t) d\tau$ este:

$$\frac{dF}{dt} = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t} d\tau + f(t,t), \quad (5.8.27)$$

derivarea funcției (5.8.25) conduce la:

$$\dot{u} = -S\, cos(p^* t - \beta)$$

$$\ddot{u}_a = \ddot{u} + \ddot{u}_0 = p^* S\, sin(p^* t - \gamma) \quad (5.8.28)$$

care reprezintă viteza şi accelerația absolută a corpului.

Argumentele α, β, γ sunt unghiuri de fază care depind de mărimile A şi B, definite de (5.8.26).

Mărimile definite mai sus ($u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}_a(t)$) sunt fundamentale în studiul dinamicii vibrațiilor structurilor, întrucât eforturile din structură sunt proporționale cu deplasarea relativă *u(t)*, energia vibrațiilor este în funcție de viteza $\dot{u}(t)$ iar accelerația absolută $\ddot{u}_a(t)$ reprezintă mărimea ce se măsoară experimental cu ajutorul accelerometrelor.

Folosind mărimile menționate şi admițând $p^* \cong p$ se determină :

- energia potențială:

$$E_p = \frac{1}{2} Fu = \frac{1}{2} ku^2 = \frac{1}{2} mS^2 sin^2(pt - \alpha), \quad (5.8.29)$$

- energia cinetică:

$$E_c = \frac{1}{2} m\dot{u}^2 = \frac{1}{2} mS^2 cos^2(pt - \beta) \quad (5.8.30)$$

- energia totală:

$$E_t = E_p + E_c = \frac{1}{2} mS^2 [1 + sin(\alpha - \beta) sin(2pt - \alpha - \beta)] \quad (5.8.31)$$

Pentru amortizări moderate, factorul $(\alpha - \beta) \approx 0$ şi energia totală maximă se poate scrie sub forma:

$$E_t = (E_c + E_p)_{max} = \frac{1}{2} mS^2 = \frac{1}{2} m(A^2 + B^2)_{max} = \frac{1}{2} m(SV)^2 \quad (5.8.32)$$

Mărimea *SV = max S,* a cărei expresie se scrie:

$$SV = \left[\int_0^t \ddot{u}_0(\tau) e^{-\nu p(t-\tau)} \sin p^*(t-\tau) d\tau \right]_{max} \tag{5.8.33}$$

se numeşte *spectru de răspuns al vitezei* sau *spectru de viteză* şi este o funcție de accelerația seismică, de perioada proprie de oscilație *T* şi de factorul de amortizare *ν*. Mărimea *SV* se reprezintă grafic în funcție de perioada proprie şi de factorul de amortizare *ν*.

5.8.3. Răspunsul seismic Fourier şi răspunsul seismic spectral la acțiuni seismice

Pentru a stabili soluția ecuației (5.8.24) se aplică metodologia răspunsului dinamic prin analiza Fourier. Transformata Fourier directă pentru accelerația seismică $\ddot{u}_0(t)$ se scrie:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{u}_0(t) e^{-i\omega t} dt \tag{5.8.34}$$

iar transformata Fourier inversă: $\ddot{u}_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ (5.8.35)

În mod similar, perechea de transformate Fourier directă şi inversă a răspunsului *u(t)* este:

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i\omega t} dt$$
$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) e^{i\omega t} d\omega \tag{5.8.36}$$

Introducând *u(t)* şi $\ddot{u}_0(t)$ în (5.8.24) şi notând cu *H(ω)* funcția de transfer (care depinde numai de caracteristicile sistemului):

$$H(\omega) = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{p^2} + i\left(2\zeta \frac{\omega}{p}\right)} \tag{5.8.37}$$

se obține relația: $U(\omega) = -H(\omega) F(\omega)$ (5.8.38)

Pentru o accelerație de tip Dirac (impuls unitar):

$$\ddot{u}_0(t) = \delta(t-\tau) \quad \Rightarrow \quad F(\omega) = 1 \tag{5.8.39}$$

răspunsul *u(t)* la un impuls unitar se notează cu *h(t)* din (5.8.37) se obține:

$$h(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega; \quad H(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt \tag{5.8.40}$$

ceea ce arată că funcția de transfer *H(ω)* şi răspunsul la un impuls unitar de accelerație *h(t)* formează o pereche de transformate Fourier.

Dacă se cunoaşte accelerograma $\ddot{u}_0(t)$ se determină *F(ω)* conform (5.8.34) după care se calculează *U(ω)* cu (5.8.38) şi apoi răspunsul seismic cu (5.8.36).

Pentru un impuls unitar de accelerație, aplicat în momentul τ răspunsul dinamic, este : $h(t-\tau)=-\frac{1}{p^*}e^{-\nu p(t-\tau)}\sin p^*(t-\tau)$ (5.8.41)

Folosind principiul suprapunerii efectelor *răspunsul dinamic total* datorat accelerației $\ddot{u}_0(t)$ va fi :

$$u(t)=\int_0^t \ddot{u}_0(\tau)h(t-\tau)d\tau=-\frac{1}{p^*}\int_0^t \ddot{u}_0(\tau)e^{-\nu t(t-\tau)}\sin p^*(t-\tau)d\tau \quad (5.8.42)$$

Se observă că (5.8.40) are aceeaşi formă cu cel dat de relația (5.8.25).

În stabilirea limitelor integralei s-a ținut seama că:

$t\geq 0$, iar pentru $\tau > t,\ f(t\text{-}\tau)=0.$ (5.8.43)

Dacă se neglijează amortizarea $(p^*=p)$ deplasarea (5.8.42) are forma:

$$u(t)=-\frac{1}{p}\int_0^t \ddot{u}_0(\tau)\sin p(t-\tau)d\tau$$
$$u(t)=-\frac{1}{p}\left[\sin pt\int_0^t \ddot{u}_0(\tau)\cos p\tau d\tau-\cos pt\int_0^t \ddot{u}_0(\tau)\sin p\tau d\tau\right] \quad (5.8.44)$$

iar viteza:

$$\dot{u}(t)=-\int_0^t \ddot{u}_0(\tau)\cos p(t-\tau)d\tau$$
$$\dot{u}(t)=-\left[\sin pt\int_0^t \ddot{u}_0(\tau)\sin p\tau d\tau+\cos pt\int_0^t \ddot{u}_0(\tau)\cos p\tau d\tau\right] \quad (5.8.45)$$

Energia totală a sistemului se scrie:

$$(E_t)_{max}=\left(\frac{1}{2}ku^2+\frac{1}{2}m\dot{u}^2\right)_{max}$$
$$(E_t)_{max}=\frac{m}{2}\left(\int_0^t \ddot{u}_0(\tau)\cos p\tau d\tau\right)^2+\frac{m}{2}\left(\int_0^t \ddot{u}_0(\tau)\sin p\tau d\tau\right)^2 \quad (5.8.46)$$

Dacă se cunoaşte accelerograma $\ddot{u}_0(\tau)$ în intervalul acțiunii seismice $\tau\in[0;t_s]$, atunci transformata Fourier directă este

$$F(\omega)=\int_0^{t_s} \ddot{u}_0(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \quad (5.8.47)$$

şi se poate scrie: $F(\omega)=\int_0^{t_s}\ddot{u}_0(\tau)cos\,\tau\omega d\tau - i\int_0^{t_s}\ddot{u}_0(\tau)sin\,\omega\tau d\tau = |F(\omega)|e^{i\varphi(\omega)}$ (5.8.48)

Se notează cu *SF spectrul Fourier al amplitudinilor accelerației seismice* care este definit astfel:

$$SF = |F(\omega)| = \sqrt{\left(\int_0^{ts}\ddot{u}_0(\tau)cos\,\omega\tau\,d\tau\right)^2 + \left(\int_0^{ts}\ddot{u}_0(\tau)sin\,\omega\tau\,d\tau\right)^2} \qquad (5.8.49)$$

Din analiza relațiilor (5.8.46) şi (5.8.49) se obține

$$(E_t)_{max} = \frac{m}{2}(SF)^2 \qquad (5.8.50)$$

care arată că energia totală a sistemului poate fi evaluată cu ajutorul spectrului Fourier al amplitudinilor accelerațiilor terenului.

Calculând din (5.8.45) viteza maximă $|\dot{u}|_{max}$ se obține *spectrul vitezelor relative neamortizate:*

$$SV_0 = |u(\omega)|_{max} = \sqrt{\left(\int_0^{t}\ddot{u}_0(\tau)cos\,\omega\tau\,d\tau\right)^2 + \left(\int_0^{t}\ddot{u}_0(\tau)sin\,\omega\tau\,d\tau\right)^2} \qquad (5.8.51)$$

Comparând expresiile (5.8.49) şi (5.8.51) rezultă

$SV_0 = SF$ pentru $t = t_s;$

$SV_0 > SF$ pentru $0 < t < t_s$. (5.8.52)

Întrucât spectrul Fourier *al amplitudinilor accelerației seismice SF* defineşte conținutul de frecvențe (conținutul spectral) al unei accelerograme înregistrate într-un amplasament, el furnizează informații privind *componentele* şi *perioadele dominante ale mişcării* seismice, ceea ce constituie o problemă fundamentală în analiza seismică.

Spectrul *vitezelor relative neamortizate SV_0* (sau spectrul pseudovitezelor) este util la determinarea intensității spectrale a unui cutremur de o anumită intensitate spectrală (IS) şi reprezintă o măsură globală a violenței unui cutremur.

Intensitatea spectrală se defineşte astfel:

$$IS_v = \int_{0,1s}^{2,5s} SV(\nu T)dT \qquad (5.8.53)$$

Limitele de integrare (0,1s ; 2,5s) constituie intervalul cal mai semnificativ al perioadelor proprii a structurilor. De regulă intensitate spectrală IS_v e defineşte pentru o amortizare $\nu = 0,2$ care corespunde unui nivel ridicat de solicitare şi se calculează cu ajutorul relației:

$$IS_{0,2} = 0,44(IS_0) - 0,012(IS_0)^2 \qquad (5.8.54)$$

unde IS_0 reprezintă spectrul *vitezelor relative neamortizate:*

$$IS_0 = SV_0 \tag{5.8.55}$$

Pe baza accelerogramelor $\ddot{u}_0(t)$ se stabileşte funcția de autocorelație $R_{\ddot{u}0}$ şi funcția densității spectrale $S_{\ddot{u}0}$ care împreună formează o pereche de transformate Fourier . Funcția densității spectrale a răspunsului se scrie sub forma:

$$S_{u,u}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{\ddot{u}_0}(\omega) \tag{5.8.56}$$

în care $|H(\omega)|$ reprezintă modulul funcției de transfer .

Media pătratului răspunsului dinamic se determină cu relația:

$$\overline{u^2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{u.u}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_{\ddot{u}_0}(\omega) d\omega. \tag{5.8.57}$$

Ținând seama că valoarea medie a accelerației seismice este nulă, folosind (5.8.57) dispersia se scrie:

$$D(u) = \sigma^2(u) = \frac{1}{p^4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{\ddot{u}_0}(\omega) d\omega}{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \left(2\nu \frac{\omega}{p}\right)^2} \tag{5.8.58}$$

Cu ajutorul dispersiei şi a unei legi de repartiție se determină probabilitatea ca deplasarea să se găsească într-un anumit domeniu sau probabilitatea atingerii unor anumite valori maxime. Astfel de probleme sunt fundamentale în analiza seismică pentru a stabili spectrele seismice. Pentru o predicție sigură este nevoie de accelerograme cu durate şi amplitudini cât mai semnificative pentru amplasamentul considerat. Principala dificultate în calculul seismic constă însă în evaluarea acestor spectre şi mai ales în predicția acestora pentru cutremurele viitoare.

CAPITOLUL 6

MAŞINI VIBRATOARE MONOMASICE CU ACȚIONARE CINEMATICĂ

Maşinile vibratoare monomasice cu acționare cinematică se deosebesc prin aceea că antrenarea organului de lucru (a jgheabului vibrator) se face printr-un mecanism de tip bielă-manivelă antrenat de un motor electric având turația constantă.

Din punct de vedere constructiv se deosebesc următoarele maşini vibratoare cu cuplaj nerigid sau rigid:

- Legate cu elemente elastice liniare sau neliniare şi amortizoare (fig.6.1.1);
- Cu legături pe suporți rigizi articulați şi cu elemente amortizoare (fig.6.1.2);

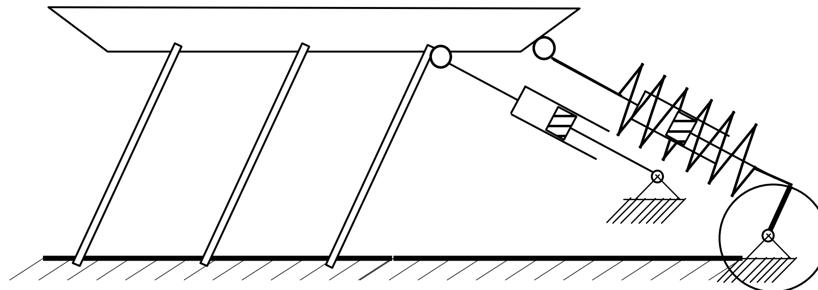


Fig.6.1.1 Maşina vibratoare cu elemente de sprijin elastice şi cuplaj nerigid

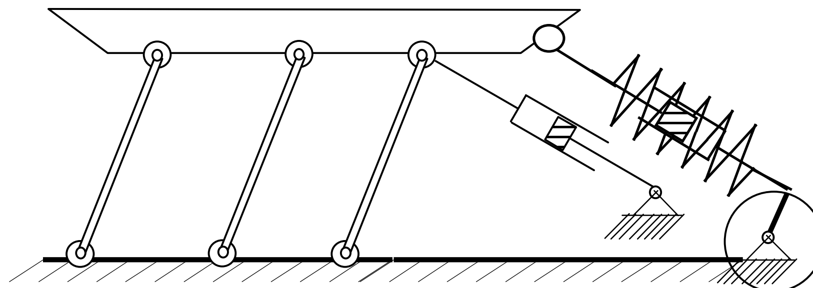


Fig.6.1.2 Maşina vibratoare cu elemente de sprijin articulate şi cuplaj nerigid

- Utilizarea cuplajelor rigide prezintă avantajul amplitudinii constante a vibratorului indiferent de turaţia motorului de antrenare şi dezavantajul unui moment de pornire foarte mare. Acest dezavantaj se elimină prin utilizarea cuplajelor elastice; în cazul utilizării cuplajelor elastice dezavantajul constă într-o amplitudine mică în afara zonei de rezonanţă şi o instabilitate a mişcării vibratorii în zona de rezonanţă.

- Utilizarea cuplajelor nerigide elastice liniare cu amortizare permite obţinerea unor regimuri de funcţionare optime din punct de vedere dinamic. Utilizarea cuplajelor nerigide elastice neliniare oferă posibilitatea obţinerii unor regimuri de funcţionare stabile în domeniul de rezonanţă.

Utilizarea unui model matematic unic pentru modelarea funcţionării maşinilor vibratoare permite studiul în cazul general şi prin particularizări corespunzătoare cazurilor particulare de cuplaje folosite curent. Se prezintă modelul matematic general pentru cele două categorii de maşini cu suporţi elastici şi rigizi articulaţi şi apoi pentru fiecare cazurile particulare de cuplaje elastice, cu amortizoare şi rigide.S-a studiat pentru fiecare mărime caracteristica a dinamicii maşinilor vibratoare influenţa celor trei parametrii ai cuplajului asupra funcţionării:

1. coeficientul de amortizare al elementului amortizor (c) sau mărimea adimensională numită *factor de amortizare* $\zeta = n / p$ (definit ca fracţiune din coeficientul de amortizare critic c_{cr} corespunzător valorii $\zeta = 1$);
2. *factorul de cuplare elastică,* mărime adimensională definită ca fracţiune a constantei elastice a cuplajului din valoarea constantei elastice totale:
$$u = \frac{k_2}{k_1 + k_2}$$
3. *factorul de cuplare al amortizorului* mărime adimensională definită ca fracţiune a constantei de amortizare a cuplajului din valoarea constantei de amortizare totale: $v = \dfrac{c_2}{c_1 + c_2}$.

Prin variaţia unuia din cei trei parametrii pentru fiecare tip de cuplaj folosit, cu păstrarea constantă a celorlalţi, variabila fiind pulsaţia relativă $\eta = \omega / p$ s-au obţinut unele rezultate care au permis unele concluzii pertinente bazate pe diagramele de variaţie obţinute cu ajutorul relaţiilor determinate şi programului MATHCAD. Modelele matematice prezentate mai jos permit stabilirea relaţiilor de calcul a factorului de amplificare, defazajului, factorului de amplificare a acceleraţiilor, factorului de transmisibilitate şi factorului dinamic.

Prin simularea numerică a variaţiei acestor mărimi dinamice la modificarea unuia din cei trei parametri se obţin diferite curbe de variaţie care permit unele concluzii asupra comportării dinamice a vibratoarelor monomasice cu acţionare cinematică. Cele mai interesante rezultate au fost obţinute pentru factorul dinamic al cuplajului care admite un minim care se determină în funcţie de valorile relative ale celor trei parametrii: amortizarea cuplajului, factorul de cuplare elastică u şi factorul de cuplare al amortizoarelor v.

6.1. Dinamica maşinilor vibratoare sprijinte pe elemente elastice liniare

6.1.1 Modelul matematic pentru maşini vibratoare cu cuplaj nerigid

Modelul matematic este prezentat în figura 6.1.3 fiind format dintr-un corp de masă *m* legat de bază prin intermediul unui arc de constantă *k* şi un amortizor hidraulic (forța de amortizare vâscoasă fiind proporțională cu viteza $\overline{R} = -c\overline{v}$). Corpul de masă m este legat rigid de un piston având o lege de mişcare armonică: $y = r\cos\omega t$.

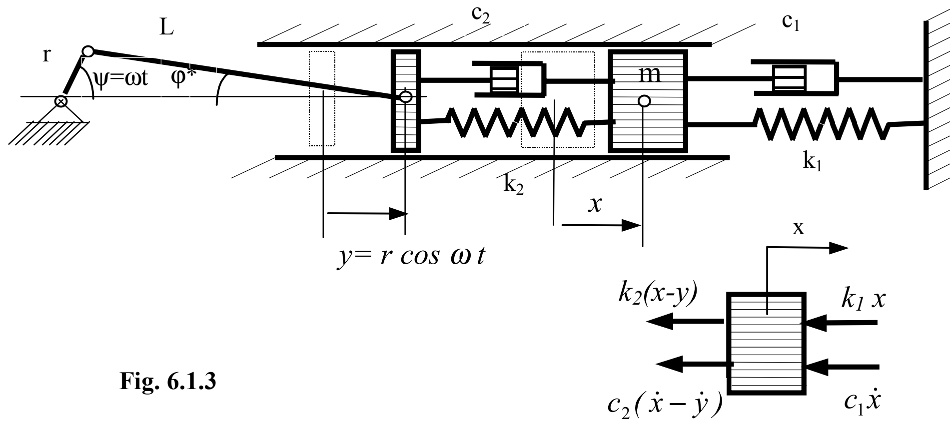


Fig. 6.1.3

Într-adevăr din figura 6.1.3 se poate scrie relația geometrică evidentă:

$$y = r\cos\psi + L(1 - \cos\varphi^*)$$

$$r\sin\psi = L\sin\varphi^* \Leftrightarrow \cos\varphi^* = \sqrt{1-(\lambda\sin\psi)^2}\,; \quad \lambda = r/L \tag{6.1.1}$$

$$\Rightarrow y = r\cos\psi + \frac{r}{\lambda}\left(1 - \sqrt{1-(\lambda\sin\psi)^2}\right) \cong r\cos\psi \quad pentru \quad \lambda <<$$

Ecuația diferențială a mişcării se scrie:

$$m\ddot{x} = -c_1\dot{x} - c_2(\dot{x} - \dot{y}) - k_1 x - k_2(x - y)$$

$$m\ddot{x} + (c_1 + c_2)\dot{x} + (k_1 + k_2)x = r(k_1\cos\omega t - c_2\omega\sin\omega t) \tag{6.1.2}$$

$$\Leftrightarrow \quad m\ddot{x} + (c_1 + c_2)\dot{x} + (k_1 + k_2)x = P\cos(\omega t + \theta)$$

unde s-a notat:

$$P = r\sqrt{k_2^2 + (c_2\omega)^2}\,; \qquad tg\theta = \frac{c_2\omega}{k_2}$$

Ecuația diferențială (6.1.2) se mai scrie:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2 x = q\cos(\omega t + \theta) \tag{6.1.3}$$

unde s-au folosit notațiile:

$$2n = \frac{c_1 + c_2}{m}; \quad p^2 = \frac{k_1 + k_2}{m}; \quad q = \frac{r\sqrt{k_1^2 + (c_2\omega)^2}}{m} \qquad (6.1.4)$$

Soluția staționară a ecuației diferențiale în complex atașată ecuației (6.1.3)

$$\ddot{z} + 2n\dot{z} + p^2 z = q[cos(\omega t + \theta) + i\,cos(\omega t + \theta)]$$
$$\Leftrightarrow \quad \ddot{z} + 2n\dot{z} + p^2 z = qe^{i(\omega t + \theta)} \qquad (6.1.5)$$

este de forma:

$$z = \tilde{a}e^{i(\omega t + \theta - \varphi)}$$
(6.1.6)

Înlocuind în (6.1.5) se obține:

$$\left(-\omega^2 + 2in\omega + p^2\right)\tilde{a}e^{i(\omega t + \theta - \varphi)} = qe^{i(\omega t + \theta)} \qquad (6.1.7)$$

Rezultă amplitudinea complexă:

$$\tilde{a} = \frac{qe^{i\varphi}}{\left(-\omega^2 + 2in\omega + p^2\right)} \qquad (6.1.8)$$

Notând: $\eta = \dfrac{\omega}{p}$ pulsația relativă, $\zeta = \dfrac{n}{p}$ factorul de amortizare (6.1.8')

şi împărțind cu p^2 numărătorul şi numitorul expresiei (6.1.8) se obține:

$$\tilde{a} = \frac{q}{p^2}\frac{cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi}{\left(1 - \eta^2 + 2i\eta\zeta\right)} \qquad (6.1.9)$$

Dacă se introduc coeficienții de cuplare:

$$u = \frac{k_2}{k_1 + k_2} \qquad si \qquad v = \frac{c_2}{c_1 + c_2} \qquad (6.1.10)$$

ținând seama de relația (6.1.4) se obține:

$$\frac{q}{p^2} = \frac{r\sqrt{k_2^2 + (c_2\omega)^2}}{k_1 + k_2} = r\sqrt{u^2 + 4v^2\eta^2\zeta^2} \qquad (6.1.11)$$

şi amplitudinea reală a mişcării se scrie:

$$a = |\tilde{a}| = r\sqrt{\frac{u^2 + 4v^2\eta^2\zeta^2}{\left(1 - \eta^2\right)^2 + 4\eta^2\zeta^2}} \qquad (6.1.12)$$

Notând $\quad tg\beta = \dfrac{2\eta\zeta}{1 - \eta^2}$ (6.1.13)

relația (6.1.9) se scrie:

$$\tilde{a} = \frac{q}{p^2\left(1 - \eta^2\right)}\frac{e^{i\varphi}}{\left(1 + i \cdot tg\beta\right)} = \frac{q\,cos\,\beta}{p^2\left(1 - \eta^2\right)}e^{i(\varphi - \beta)} \qquad (6.1.14)$$

iar soluția (6.1.6) se scrie:

$$z = \frac{q\,cos\,\beta}{p^2\left(1 - \eta^2\right)}e^{i(\omega t + \theta - \beta)} \qquad (6.1.15)$$

Deci soluția ecuației diferențiale a mişcării se scrie:

$$x = \frac{q\cos\beta}{p^2\left(1-\eta^2\right)}\cos(\omega t + \theta - \beta)$$
$$\Leftrightarrow x = r\sqrt{\frac{u^2 + 4v^2\eta^2\zeta^2}{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4\eta^2\zeta^2}}\cos(\omega t - \varphi) \tag{6.1.16}$$

Din relațiile (6.1.16), (6.1.2) şi (6.1.13) rezultă defazajul dintre răspuns şi excitație:

$$\varphi = \beta - \theta = arctg\frac{2\eta\zeta}{1-\eta^2} - arctg\frac{2v\eta\zeta}{u} \tag{6.1.17}$$

Factorul de amplificare este definit ca raportul dintre amplitudinea vibrațiilor dispozitivului de antrenare şi cea corespunzătoare organului de lucru:

$$\xi_x = \frac{a}{r} = \sqrt{\frac{u^2 + 4v^2\eta^2\zeta^2}{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4\eta^2\zeta^2}} \tag{6.1.18}$$

6.1.2 Factorul de amplificare al amplitudinii şi defazajul

a. Influența factorului de amortizare ζ

Reprezentând variația factorul de amplificare cu pulsația relativă η pentru diferite valori ale factorului de amortizare $\zeta = 0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}5;\ 0{,}7;\ 0{,}9$ şi coeficienți de cuplare *u=0,5* şi *v=0,5* se obțin diagramele din fig. 6.1.4.

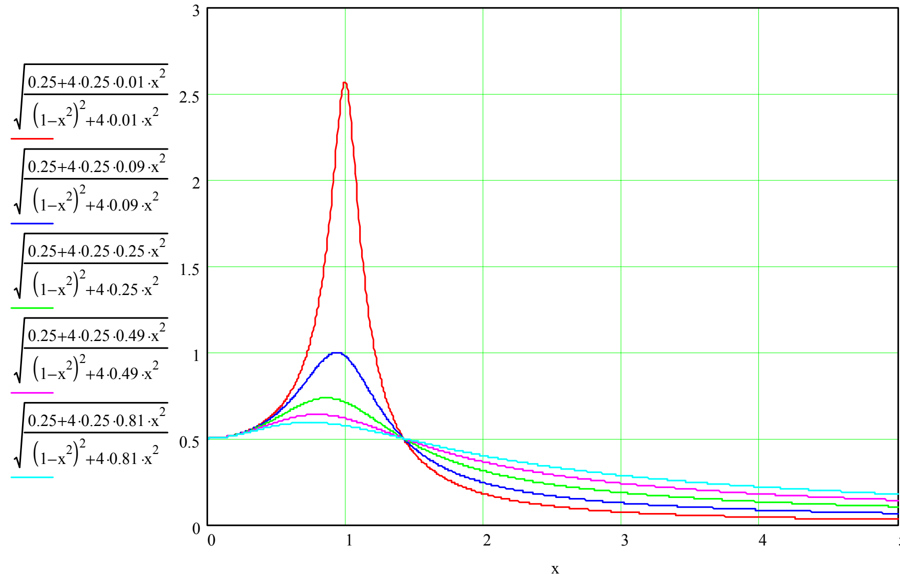


Fig. 6.1.4. Variația factorului de amplificare ξ_x cu pulsația relativă pentru diferite valori ale factorului de amortizare (*u=0,5 şi v=0,5*)

b. Influența factorului de cuplare *u*

Reprezentând variația factorului de amplificare ξ_x cu pulsația relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare *u=0.1; 0,3; 0,5; 0,7* şi *u=1* şi *v=0,5* şi pentru două valori ale factorului de amortizare: $\zeta = 0{,}2$ respectiv $\zeta = 0{,}5$ se obțin diagramele din figurile 6.1.5 şi 6.1.6.

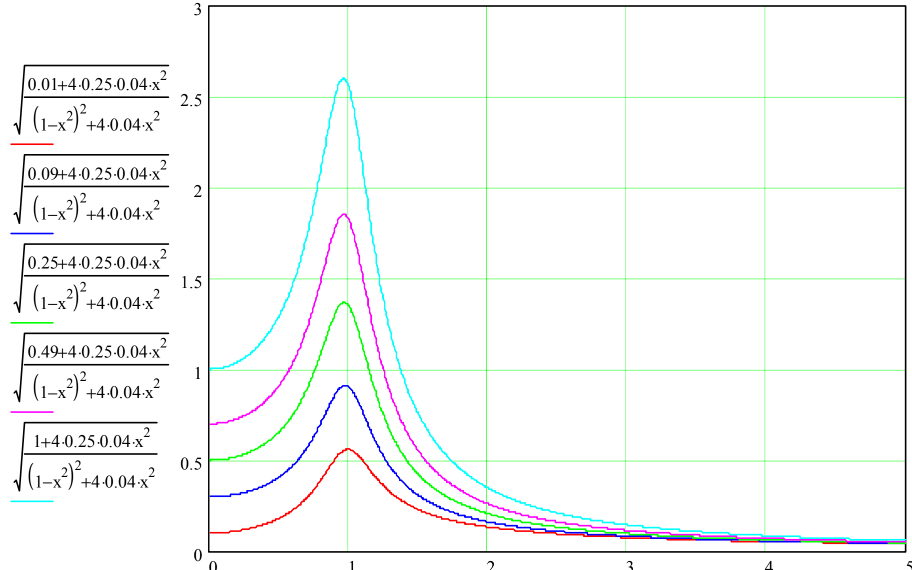


Fig. 6.1.5. Variația factorului de amplificare ξ_{xx} cu pulsația relativă pentru diferite valori ale factorului de cuplare u (*v=0,5* şi $\zeta = 0{,}2$)

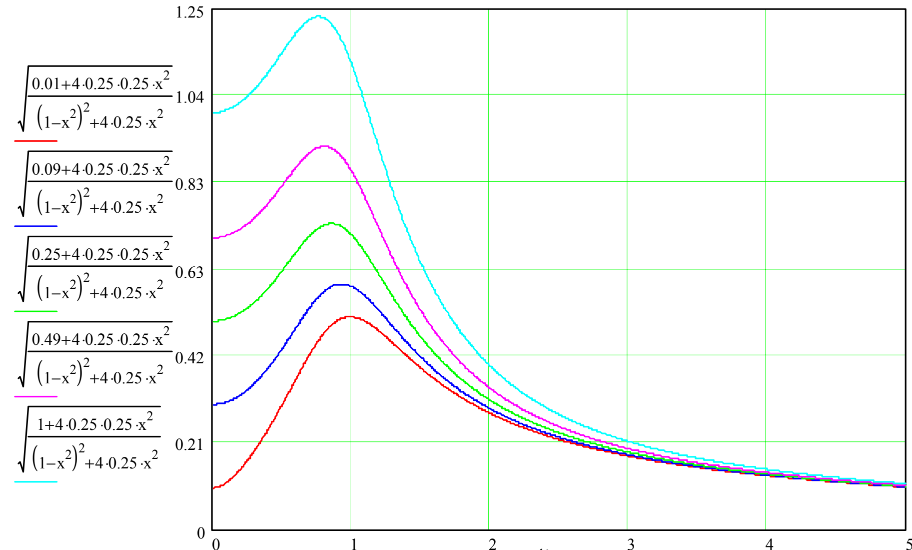


Fig. 6.1.6. Variația factorului de amplificare ξ_x cu pulsația relativă pentru diferite valori ale factorului de cuplare u (*v=0,5* şi $\zeta = 0{,}5$)

c. Influenţa factorului de cuplare *v*

Reprezentând variaţia factorului de amplificare ξ_x cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare *v=0.1; 0,3; 0,5; 0,7* şi *v=1* şi *u=0,5* şi pentru două valori ale factorului de amortizare: $\zeta = 0{,}2$ respectiv $\zeta = 0{,}5$ se obţin diagramele din figurile 6.1.7 şi 6.1.8.

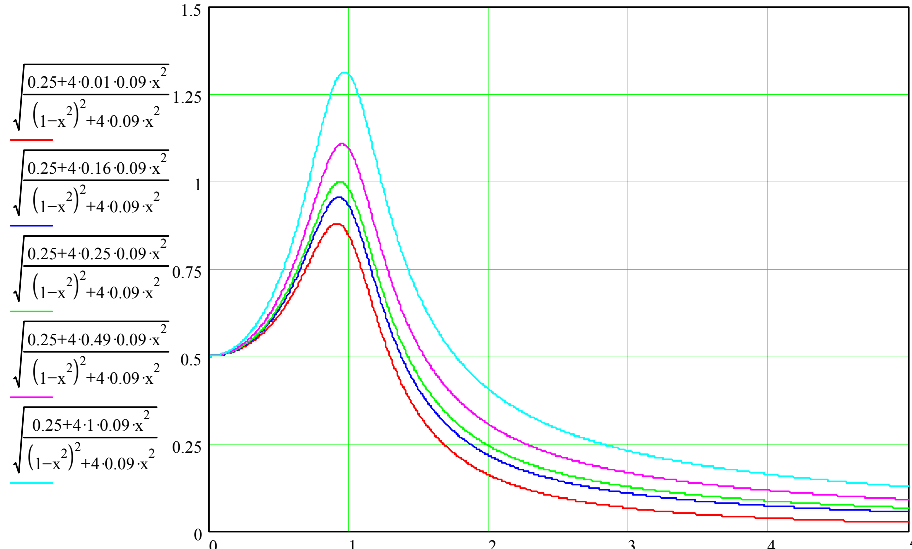


Fig. 6.1.7. Variaţia factorului de amplificare ξ_{xx} cu pulsaţia relativă pentru diferite valori ale factorului de cuplare v (*u=0,5* şi $\zeta = 0{,}2$)

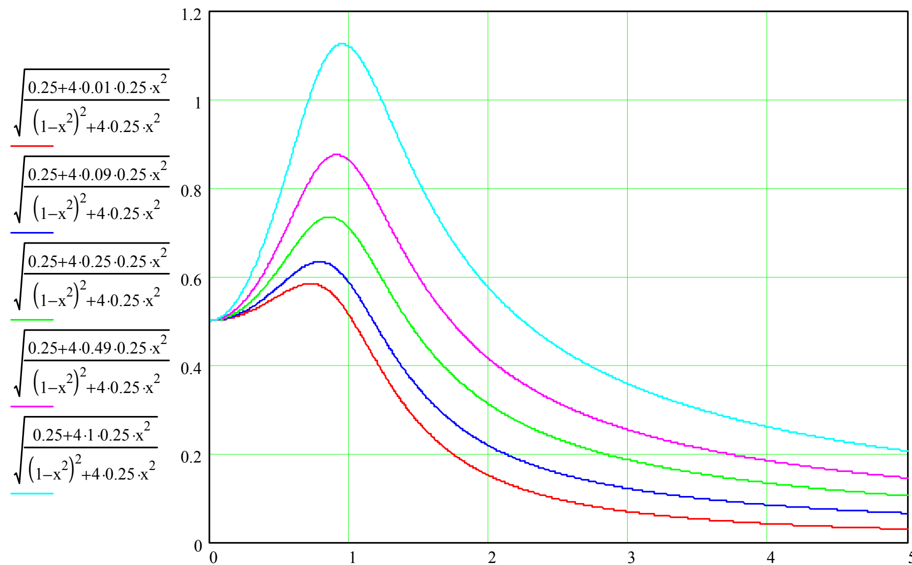


Fig. 6.1.8. Variaţia factorului de amplificare $\xi_{\ddot{x}}$ cu pulsaţia relativă pentru diferite valori ale factorului de cuplare v (*u=0,5* şi $\zeta = 0{,}5$)

d. Concluzii

- Factorul de amplificare al deplasărilor prezintă o variație mai accentuată în jurul valorii de rezonanță cu cât factorul de amortizare este mai mic şi cu cât factorul de cuplare *u* şi *v* este mai apropiat de 1 (valori care corespund lui $k_1=0$ respectiv $c_1=0$) (fig. 6.1.4);
- Cu cât factorul de cuplare *u* este mai mare, cu atât factorul de amplificare maxim este mai mare şi corespunde unei pulsații sensibil mai mică decât $\eta=1$ (fig. 6.1.5-6.1.6);
- Factorul de amplificare maxim scade odată cu creşterea factorului de amortizare ζ şi corespunde unei pulsații mai mică decât $\eta=1$ cu cât factorul de cuplare *u* este mai mare (fig. 6.1.6);
- Pentru o pulsație de regim ce corespunde în general unor valori $\eta>3$ curbele se apropie foarte mult astfel încât factorul de cuplare şi cel de amortizare au o influență mai mică asupra factorului de amplificare (fig. 6.1.5-6.1.6);
- Cu cât factorul de cuplare v este mai mare, cu atât factorul de amplificare maxim este mai mare şi corespunde unei pulsații sensibil mai mică decât $\eta=1$, diferența față de cazul precedent constând în faptul că pentru valori mici ale lui η(apropiate de zero) toate curbele trec prin acelaşi punct ce corespunde unui factor de amplificare $\xi=0,5$ (fig. 6.1.7-6.1.8);
- Pentru o pulsație de regim ce corespunde în general unor valori $\eta>3$ curbele devin paralele şi sunt cu atât mai apropiate cu cât factorul de amortizare este mai mic (fig. fig. 6.1.7-6.1.8);

Concluziile prezentate mai sus permit alegerea acelor valori ale parametrilor *u, v* şi ζ care să asigure valori ale factorului de amplificare cerute de procesul tehnologic pentru care a fost proiectată maşina vibratoare.

Defazajul răspuns - excitație

Defazajul dintre răspuns şi excitație dat de relația (6.117) se mai scrie:

$$\varphi = arccos\frac{1-\eta^2}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2+(2\eta\zeta)^2}} - arccos\frac{u}{\sqrt{u^2+\left(2v\eta\zeta\right)^2}} \qquad (6.1.17')$$

În continuare s-a prezentat variația defazajului răspuns excitație funcție de pulsația relativă şi influența parametrilor de amortizare ζ şi a parametrilor de cuplare u şi v.

a. Influența factorului de amortizare ζ

Reprezentând variația defazajului cu pulsația relativă η pentru diferite valori ale factorului de amortizare $\zeta=0,1;\ 0,3;\ 0,5;\ 0,7;\ 0,9$ şi coeficienți de cuplare $u=0,5$ şi $v=0,5$ se obțin diagramele din fig. 6.1.9.

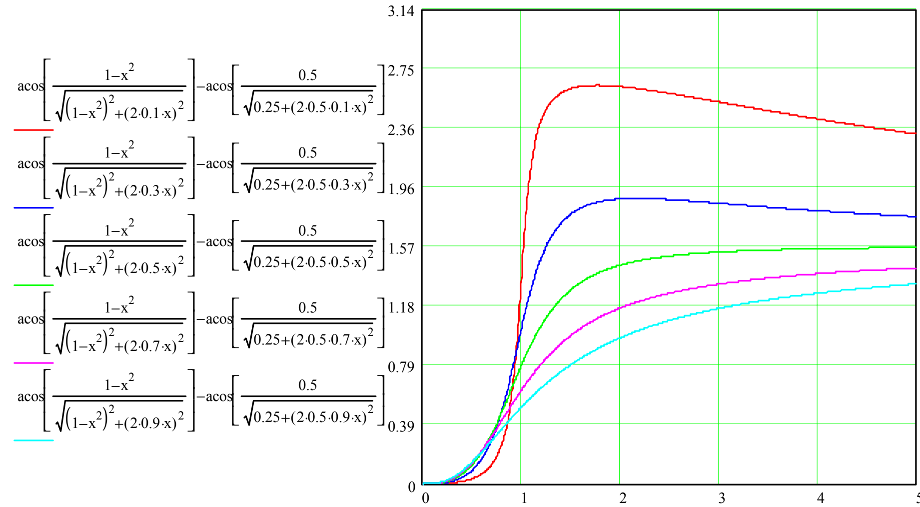


Fig. 6.1.9. Variaţia defazajului cu pulsaţia relativă pentru diferite valori ale factorului de amortizare ζ (*u=0,5 şi v=0,5*)

b. Influenţa factorului de cuplare *u*

Reprezentând variaţia defazajului dintre răspuns şi excitaţie cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare *u=0.1; 0,3; 0,5; 0,7* şi *u=1* şi *v=0,5* şi pentru două valori ale factorului de amortizare: $\zeta = 0{,}2$ respectiv $\zeta = 0{,}5$ se obţin diagramele din figurile 6.1.10 şi 6.1.11 (în radiani).

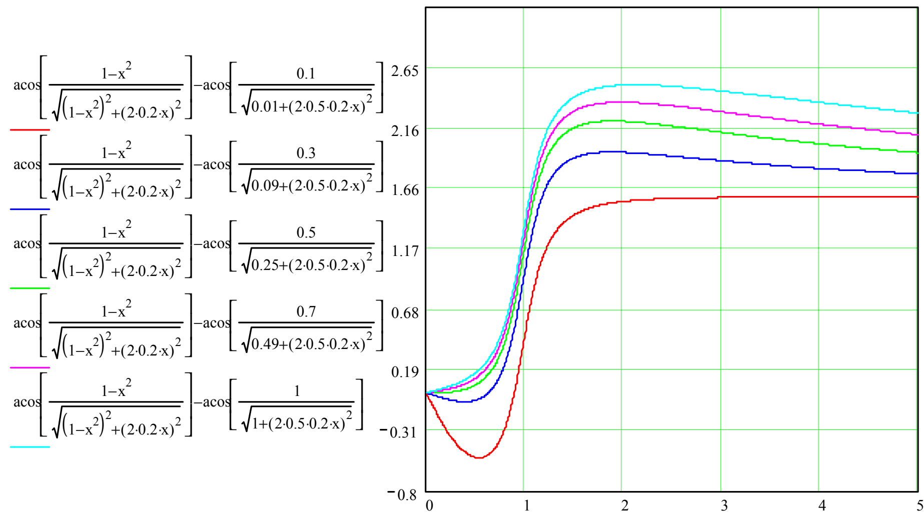


Fig. 6.1.10. Variaţia defazajului cu pulsaţia relativă pentru diferite valori ale factorului de cuplare u (*v=0,5* şi ζ=0.2)

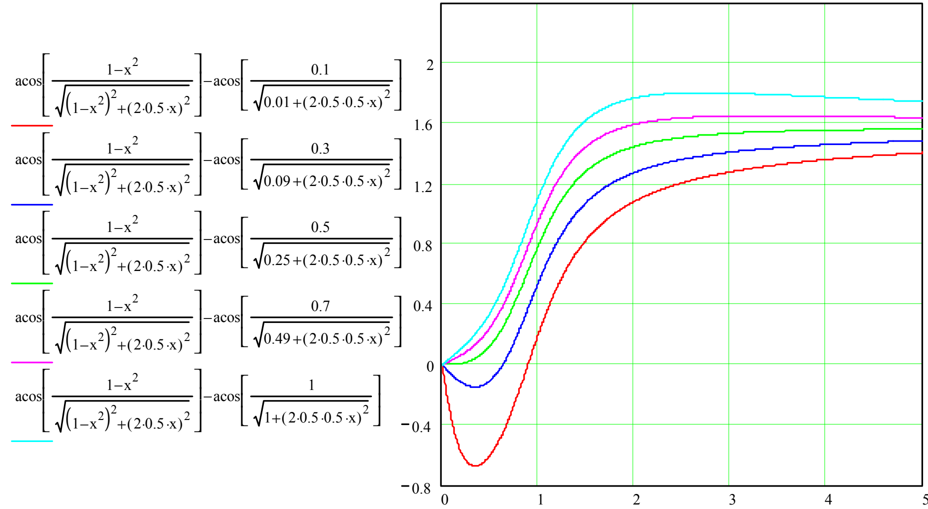


Fig. 6.1.11. Variația defazajului cu pulsația relativă pentru diferite valori ale factorului de cuplare u (*v=0,5* şi ζ=0.5)

c. Influența factorului de cuplare *v*

Reprezentând variația defazajului dintre răspuns şi excitație cu pulsația relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare *v=0.1; 0,3; 0,5; 0,7* şi *v=1* şi *u=0,5* şi pentru două valori ale factorului de amortizare: $\zeta = 0{,}2$ respectiv $\zeta = 0{,}5$ se obțin diagramele din figurile 6.1.12 şi 6.1.13 (în radiani).

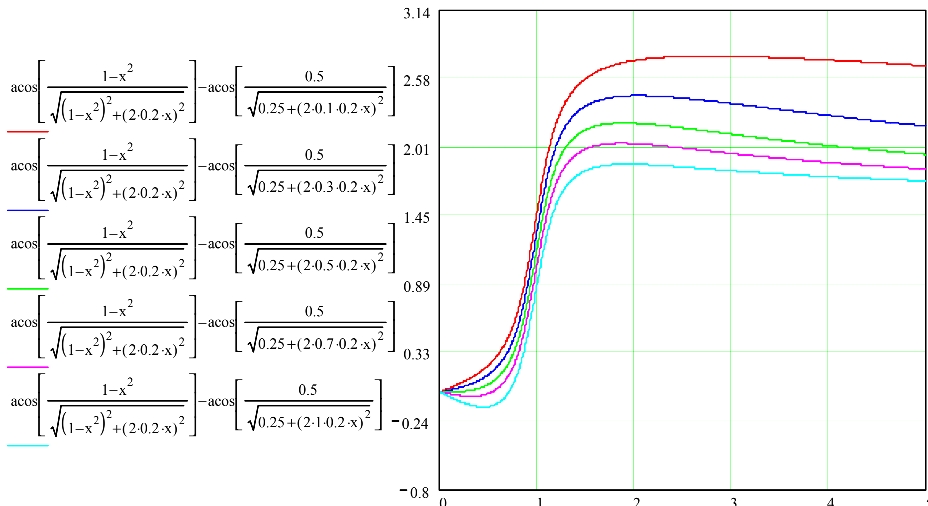


Fig. 6.1.12. Variația defazajului cu pulsația relativă pentru diferite valori ale factorului de cuplare v (u=*0,5* şi $\zeta = 0{,}2$)

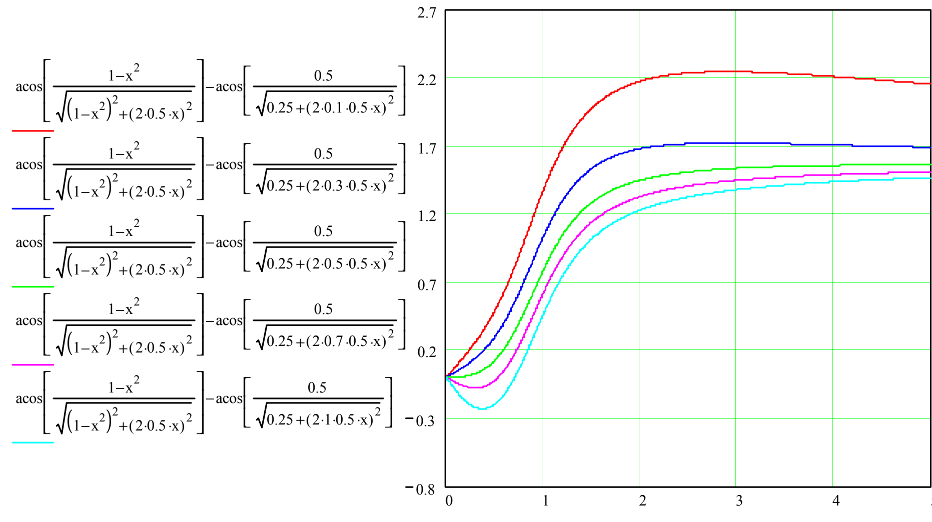


Fig. 6.1.13. Variația defazajului cu pulsația relativă pentru diferite valori ale factorului de cuplare v (u=*0,5* şi $\zeta = 0,5$)

d. Concluzii

- Defazajul răspuns-excitație prezintă o variație mai pronunțată în jurul valorii de rezonanță cu cât factorul de amortizare este mai mic; valoarea maximă a defazajului se obține pentru valori mici ale factorului de amortizare imediat după rezonanță (η=1), după care defazajul scade foarte puțin cu pulsația η. pentru o valoare a factorului de amortizare $\zeta \angle 0,5$ defazajul creşte continuu spre o valoare stabilă mai mică de $\pi/2$ fără a mai atinge un maxim (fig. 6.1.9);
- Pentru valori mici ale factorului de cuplare u se observă o scădere a defazajului de la zero la valori negative, urmată de o creştere accentuată în zona de rezonanță, atingerea unui maxim şi apoi o stabilizare pentru valori mari ale pulsației η. Scăderea din prima zonă este cu atât mai accentuată cu cât factorul de amortizare ζ este mai mare (fig. 6.1.10-6.1.11);
- Pentru valori mari ale factorului de cuplare v se observă o scădere a defazajului de la zero la valori negative, urmată de o creştere accentuată în zona de rezonanță şi apoi o stabilizare pentru valori mari ale pulsației η. Scăderea din prima zonă este cu atât mai accentuată cu cât factorul de amortizare ζ este mai mare (fig. 6.1.10-6.1.11);

6.1.3. Factorul de amplificare al accelerațiilor

Amplitudinea vitezelor se poate scrie în funcție de factorul de amplificare cu ajutorul mărimii adimensionale ξ_v:

$$\dot{x} = -\omega r \xi_x \sin(\omega t - \varphi) = -\xi_{\dot{x}} \frac{r}{p} \sin(\omega t - \varphi) \tag{6.1.19}$$

unde: $$\xi_{\dot{x}} = \eta \xi_x = \eta \sqrt{\frac{u^2 + 4v^2\eta^2\zeta^2}{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4\eta^2\zeta^2}} \tag{6.1.20}$$

Amplitudinea accelerațiilor se poate scrie în funcție de factorul de amplificare cu ajutorul mărimii adimensionale ξ_a:

$$\ddot{x} = -\omega^2 r \xi_x \cos(\omega t - \varphi) = -\xi_{\ddot{x}} \frac{r}{p^2} \cos(\omega t - \varphi) \tag{6.1.21}$$

unde: $$\xi_{\ddot{x}} = \eta^2 \xi_x = \eta^2 \sqrt{\frac{u^2 + 4v^2\eta^2\zeta^2}{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4\eta^2\zeta^2}} \tag{6.1.22}$$

este factorul de amplificare al accelerațiilor sistemului care exprimă mărimea forțelor de inerție a vibratorului .

a. Influența factorului de amortizare ζ

Reprezentând variația factorul de amplificare al accelerațiilor cu pulsația relativă η pentru diferite valori ale factorului de amortizare $\zeta = 0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}5;\ 0{,}7;\ 0{,}9$ şi coeficienți de cuplare *u=0,5* şi *v=0,5* se obțin diagramele din fig. 6.1.14.

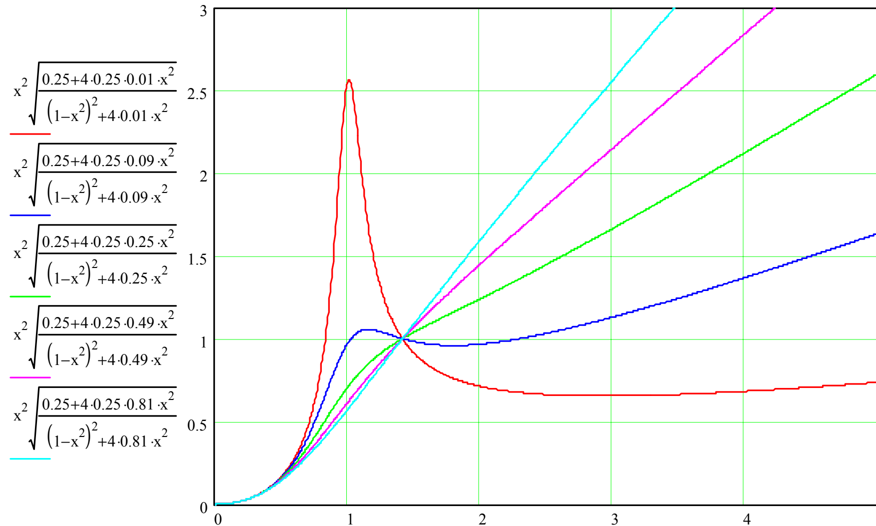


Fig. 6.1.14. Variația factorului de amplificare al accelerațiilor cu pulsația relativă pentru diferite valori ale factorului de amortizare (*u=0,5 şi v=0,5*)

b. Influența factorului de cuplare *u*

Reprezentând variația factorului de amplificare al accelerațiilor $\xi_{\ddot{x}}$ cu pulsația relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare *u=0.1; 0,3; 0,5; 0,7* şi *1* şi *v=0,5* şi pentru doua valori ale factorului de amortizare $\zeta = 0{,}2$ respectiv $\zeta = 0{,}5$ se obțin diagramele din figurile 6.1.15 şi 6.1.16

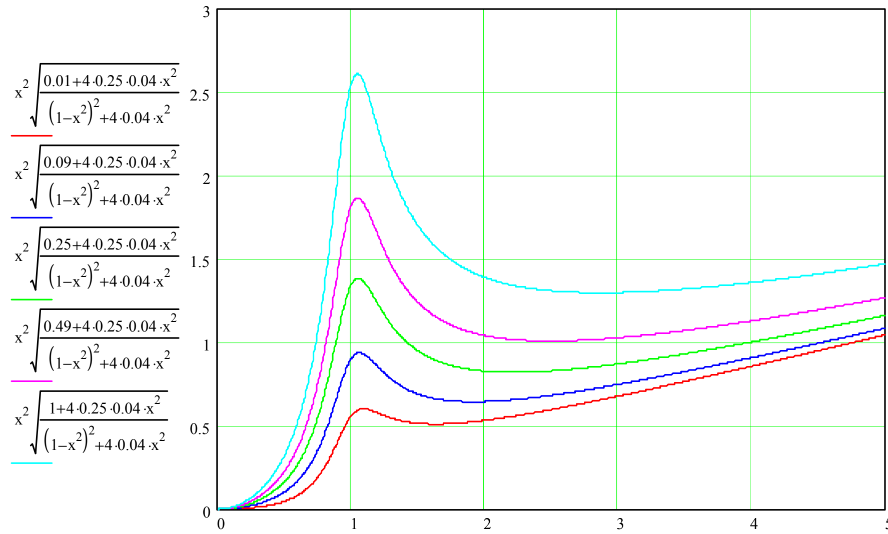


Fig. 6.1.15. Variația factorului de amplificare al accelerațiilor pulsația relativă pentru diferite valori ale factorului de cuplare u (v=*0,5 şi ζ=0,2)*

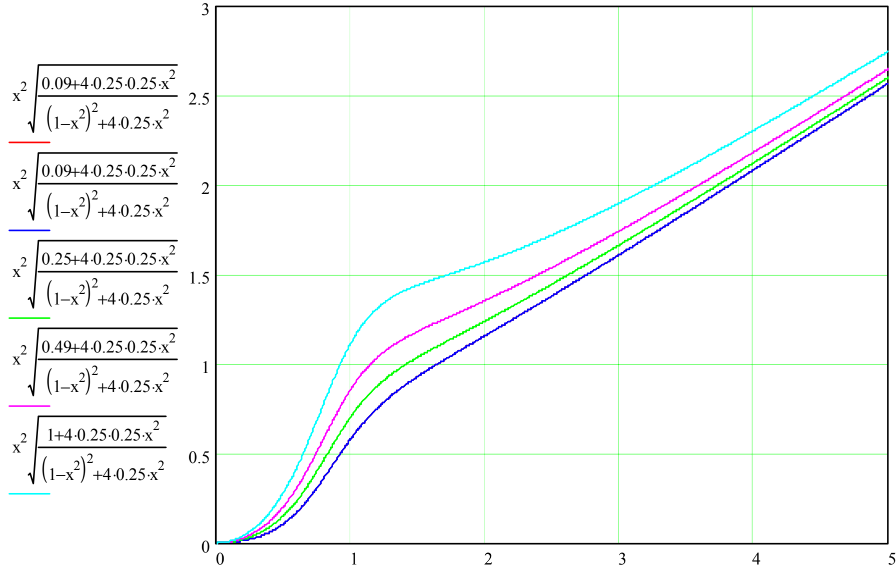


Fig. 6.1.16. Variația factorului de amplificare al accelerațiilor cu pulsația relativă pentru diferite valori ale factorului de cuplare u (v=*0,5 şi ζ=0,5)*

c. Influenţa factorului de cuplare *v*

Reprezentând variaţia factorului de amplificare al acceleraţiilor $\xi_{\ddot{x}}$ cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare *v=0.1; 0,3; 0,5; 0,7* şi *1* şi *u=0,5* şi pentru doua valori ale factorului de amortizare $\zeta = 0{,}2$ respectiv $\zeta = 0{,}5$ se obţin diagramele din figurile 6.1.17 şi 6.1.18.

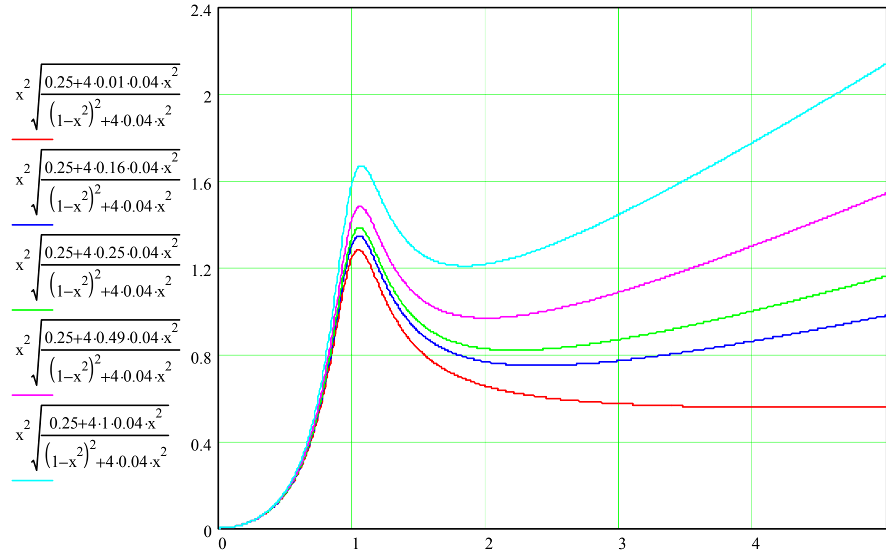


Fig. 6.1.17. Variaţia factorului de amplificare al acceleraţiilor cu pulsaţia relativă pentru diferite valori ale factorului de cuplare v (u=*0,5 şi ζ=0,2)*

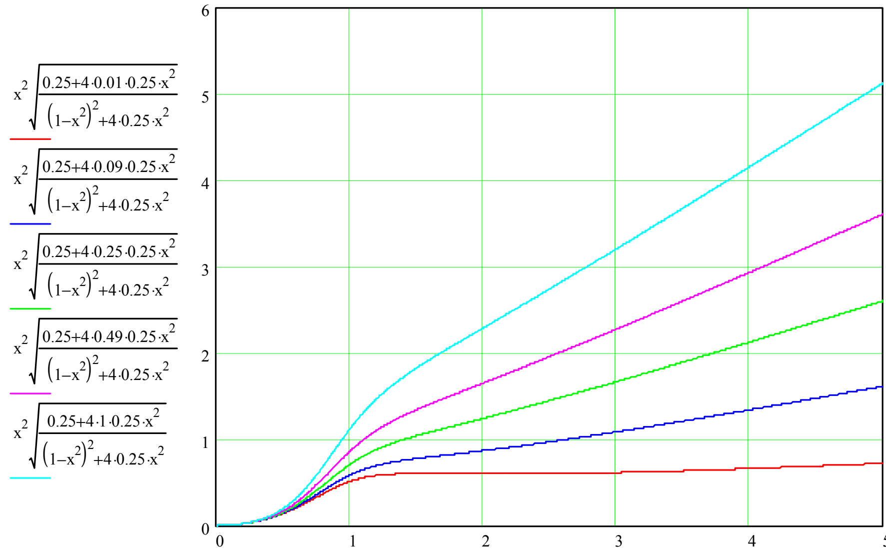


Fig. 6.1.18. Variaţia factorului de amplificare al acceleraţiilor cu pulsaţia relativă pentru diferite valori ale factorului de cuplare v (u=*0,5 şi ζ=0,5)*

d. Concluzii

- Factorul de amplificare al accelerațiilor şi implicit al forțelor de inerție la organul de lucru creşte continuu pentru valori ale factorului de amortizare $\zeta \geq$ 0,5 iar pentru valori ζ<0,5 se constată o creştere accentuată în domeniul de anterezonanță, urmată de o scădere şi apoi din nou o creştere cu atât mai moderată cu cât factorul de amortizare este mai mic (fig. 6.1.14);
- Cu cât factorul de cuplare *u* este mai mare, cu atât factorul de amplificare al accelerațiilor maxim este mai mare şi corespunde unei pulsații sensibil mai mari decât $\eta=1$. Factorul de amplificare al accelerațiilor nu mai prezintă un maxim la creşterea factorului de amortizare ζ indiferent de valorile factorului de cuplare *u* (fig. 6.1.15-6.1.16);
- Cu cât factorul de cuplare v este mai mic cu atât accelerațiile scad mai pronunțat pentru valori ale pulsației relative η>1, aceasta rămâne practic constantă pentru valori mici ale acestui factor v şi prezintă un minim pentru valori v>0.2 . Cu cât factorul de amortizare este mai mare cu atât accelerația prezintă o creştere aproape continuă (fără maxime şi minime locale), cu atât mai pronunțată cu cât factorul de cuplare vâscoasă este mai mare (fig. 6.1.17-6.1.18);

6.1.4. Factorul de amplificare al amplitudinii mişcării capetelor cuplajului

Pentru a găsi regimul de funcționare optimal se determină forța de antrenare ce acționează asupra organului de lucru prin intermediul cuplajului (transmisibilitatea cuplajului). Transmisibilitatea cuplajului are expresia:

$$F = c_2(\dot{x}-\dot{y}) + k_2(x-y) = c_2\dot{w} + k_2 w \qquad (6.1.23)$$

unde s-a notat deplasarea relativă a capetelor cu: $w = x - y$ (6.1.24)

Ecuația diferențială a mişcării (6.1.1) se mai scrie:

$$\begin{aligned} & m\ddot{x} = -c_1 x - c_2(\dot{x}-\dot{y}) - k_1 x - k_2(x-y) \\ \Leftrightarrow\quad & m(\ddot{x}-\ddot{y}) + (c_1+c_2)(\dot{x}-\dot{y}) + (k_1+k_2)(x-y) = -m\ddot{y} - c_1 y - k_1 y \\ \Leftrightarrow\quad & m\ddot{w} + (c_1+c_2)\dot{w} + (k_1+k_2)w = r(m\omega^2 - k_1)\cos\omega t + rc_1\omega\sin\omega t \\ \Leftrightarrow\quad & \ddot{w} + 2n\dot{w} + p^2 w = q^*\cos(\omega t + \theta^*) \end{aligned} \qquad (6.1.25)$$

unde: $$q^* = \frac{r}{m}\sqrt{\left(m\omega^2 - k_1\right)^2 + \left(c_1\omega\right)^2}; \qquad tg\theta^* = \frac{c_1\omega}{m\omega^2 - k_1} \qquad (6.1.26)$$

S-a obținut aceeaşi formă ca a ecuației diferențiale (6.1.3) deci soluția ecuației (6.1.26) se poate scrie: $$w = \frac{q^*\cos\beta}{p^2\left(1-\eta^2\right)}\cos(\omega t + \theta^* - \beta) \qquad (6.1.27)$$

Dacă se introduc coeficienţii de cuplare u şi v definiţi la (6.1.10) şi mărimile adimensionale η şi ζ se obţine:

$$\frac{q}{p^2}=\frac{r\sqrt{\left(m\omega^2-k_1\right)+\left(c_1\omega\right)^2}}{k_1+k_2}=r\sqrt{(1-\eta^2-u)^2+4(1-v)^2\eta^2\zeta^2}$$
$$tg\theta^*=\frac{2(1-v)\eta\zeta}{1-\eta^2-u};\quad tg\beta=\frac{2\eta\zeta}{1-\eta^2} \tag{6.1.28}$$

Înlocuind în relaţia (6.127) se obţine factorul de amplificare a amplitudinii mişcării relative a capetelor cuplajului ξ_w:

$$w=r\sqrt{\frac{\left(1-\eta^2-u\right)^2+4(1-v)^2\eta^2\zeta^2}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\eta^2\zeta^2}}\,cos(\omega t+\theta^*-\beta)$$
$$\Leftrightarrow w=r\xi_w\,cos(\omega t+\theta^*-\beta);\quad \xi_w=r\sqrt{\frac{\left(1-\eta^2-u\right)^2+4(1-v)^2\eta^2\zeta^2}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\eta^2\zeta^2}} \tag{6.1.29}$$

a. Influenţa factorului de amortizare ζ

Reprezentând variaţia factorului de amplificare a mişcării relative a capetelor cuplajului ξ_w cu pulsaţia relativă η pentru valorile coeficienţilor de cuplare *u=0.5* şi *v=0,5* pentru cinci valori ale factorului de amortizare: $\zeta=0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}5;\ 0{,}7$ *si* 0,9 se obţin diagramele din fig. 6.1.19

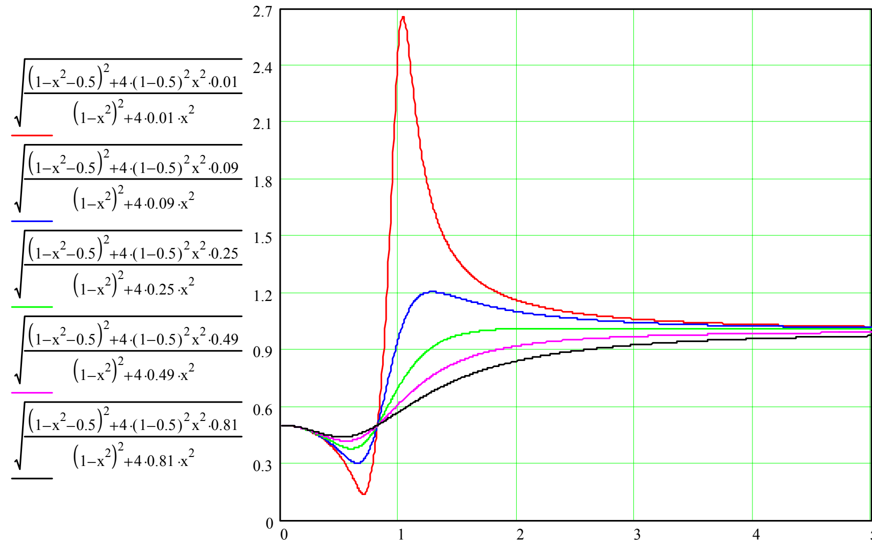


Fig. 6.1.19. Variaţia factorului de amplificare ξ_w cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de amortizare ζ pentru *u=0,5 şi v=0,5*

b. Influența factorului de cuplare *u*

Reprezentând variația factorului ξ_w cu pulsația relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare *u (u=0.1; 0,3; 0,5; 0,7* şi *1)* şi *v=0,5* şi pentru doua valori ale factorului de amortizare: $\zeta = 0{,}2$ respectiv $\zeta = 0{,}5$ se obțin diagramele din figurile 6.1.20 şi 6.1.21

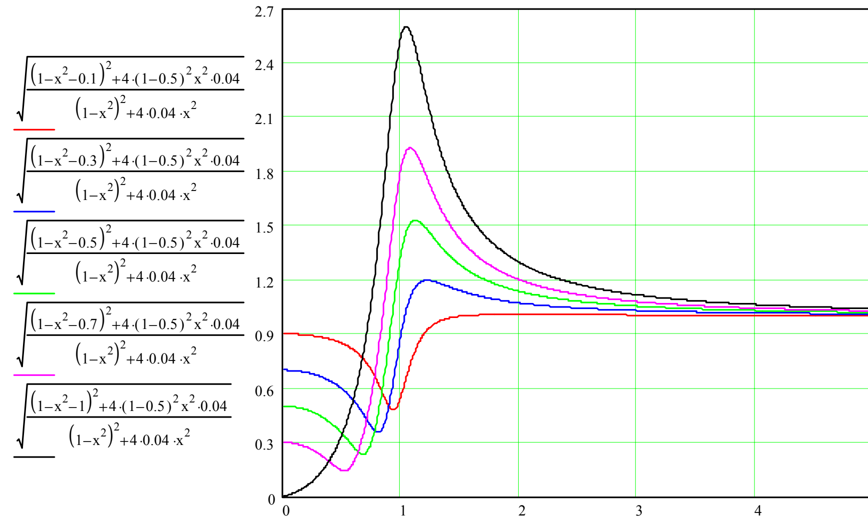


Fig. 6.1.20. Variația factorului de amplificare cu pulsația relativă η pentru diferite valori ale coeficientul de cuplare u (v*=0,5 şi ζ=0,2)*

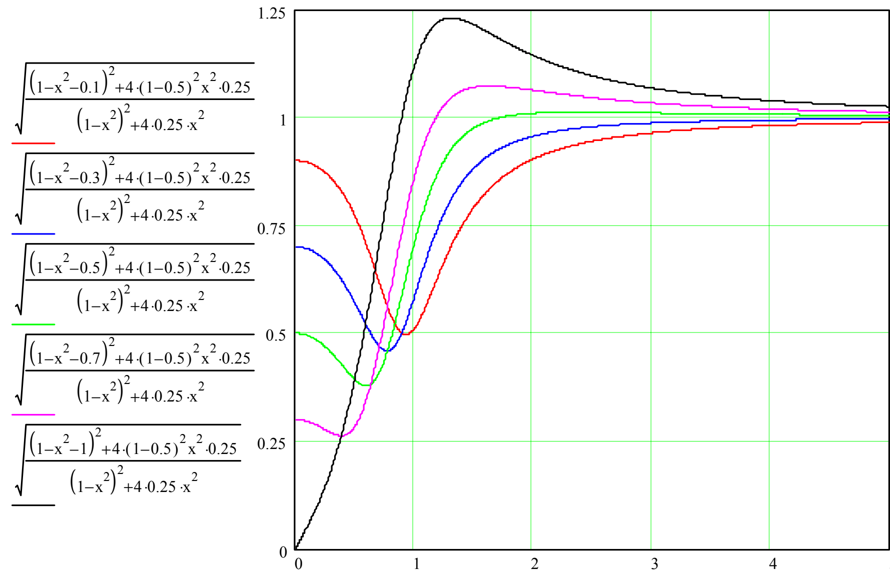


Fig. 6.1.21. Variația factorului de amplificare cu pulsația relativă η pentru diferite valori ale coeficientul de cuplare u (v*=0,5 şi ζ=0,5)*

c. Influenţa factorului de cuplare *v*

Reprezentând variaţia factorului de amplificare a mişcării relative a capetelor cuplajului ξ_w cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare *v=0.1; 0,3; 0,5; 0,7* şi *v=1* şi *u=0,5* şi pentru doua valori ale factorului de amortizare: $\zeta = 0{,}2$ respectiv $\zeta = 0{,}5$ se obţin diagramele din figurile 6.1.22 şi 6.1.23.

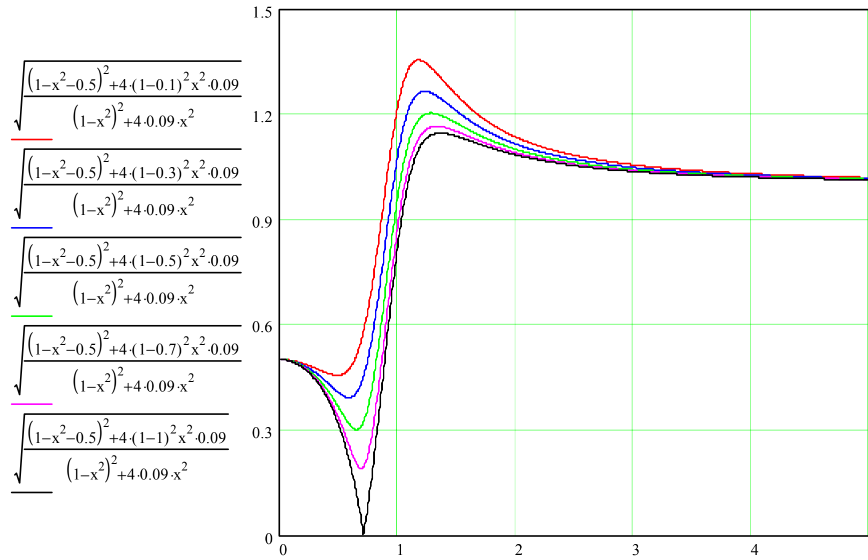


Fig. 6.1.22. Variaţia factorului de amplificare cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale coeficientul de cuplare v (u=*0,5 şi ζ=0,2)*

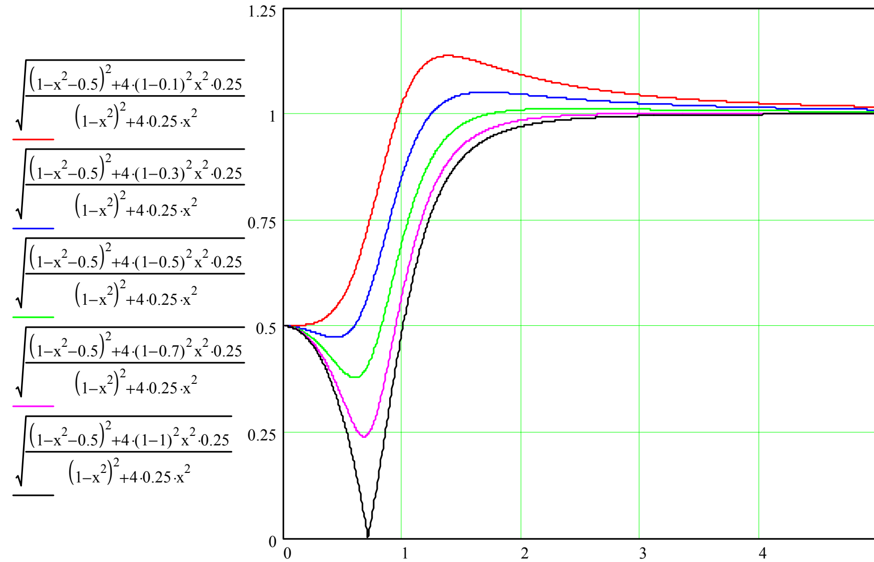


Fig. 6.1.23. Variaţia factorului de amplificare cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale coeficientul de cuplare v (u=*0,5 şi ζ=0,5)*

6.1.5. Factorul de transmisibilitate al cuplajului

Forța transmisă (6.1.23) se mai scrie:

$$F = c_2\dot{w} + k_2 w = r\xi_w\left[\left(k_2\, cos(\,\omega t + \theta^* - \beta\,) - \omega c_2\, sin(\,\omega t + \theta^* - \beta\,)\right)\right] \qquad (6.1.30)$$

sau:

$$\begin{cases} F = mrp^2\xi_w\sqrt{u^2 + 4v^2\eta^2\zeta^2}\; cos\left(\omega t + \theta^* - \beta + \alpha\right) \\ tg\alpha = \dfrac{\omega c_2}{k_2} = \dfrac{2v\eta\zeta}{u} \end{cases} \qquad (6.1.31)$$

Defazajul dintre forța transmisă şi excitație este:

$$\psi = \alpha + \theta^* - \beta = arctg\frac{2v\eta\zeta}{u} + acrtg\frac{2(1-v)\eta\zeta}{1-\eta^2-u} - arctg\frac{2\eta\zeta}{1-\eta^2} \qquad (6.1.32)$$

Notând cu $F_S = mrp^2 = mr(\,k_1 + k_2\,)$ forța transmisă se mai scrie:

$$F = F_S\xi_F\; cos\left(\omega t + \theta^* - \beta + \alpha\right) \qquad (6.1.33)$$

unde ξ_F este factorul de amplificare al forței transmise de cuplaj la organul de lucru sau factorul de transmisibilitate al cuplajului:

$$\xi_F = \xi_w\sqrt{u^2 + 4v^2\eta^2\zeta^2} = \sqrt{\frac{\left[\left(1-\eta^2-u\right)^2 + 4(1-v)^2\eta^2\zeta^2\right]\left(u^2 + 4v^2\eta^2\zeta^2\right)}{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4\eta^2\zeta^2}} \qquad (6.1.33')$$

a. Influența factorului de amortizare ζ

Reprezentând variația factorului de transmisibilitate al cuplajului ξ_F cu pulsația relativă η pentru valorile coeficienților de cuplare $u=0.5$ şi $v=0,5$ pentru cinci valori ale factorului de amortizare: $\zeta = 0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}5;\ 0{,}7\ si\ 0{,}9$ se obțin diagramele din fig. 6.1.24

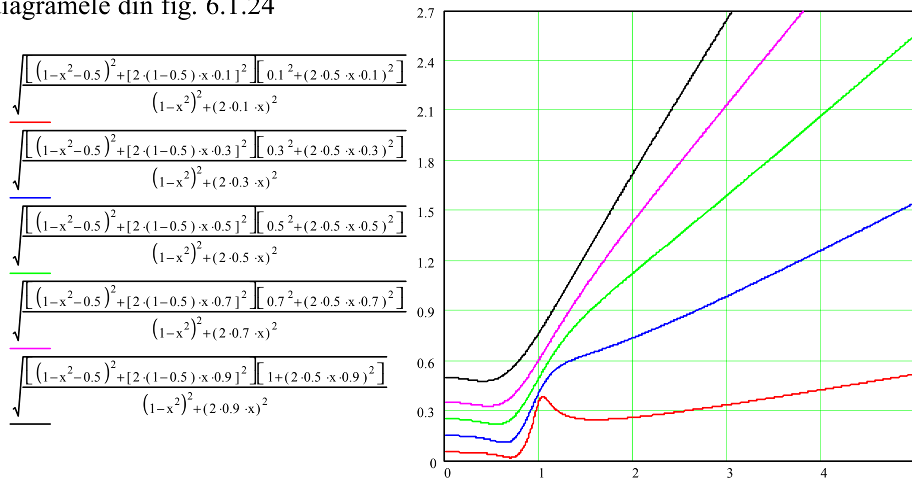


Fig. 6.1.24. Variația factorului de transmisibilitate cu pulsația relativă η pentru diferite valori ale factorului de amortizare ζ (*u=0,5 şi v=0,5*)

b. Influența factorului de cuplare *u*

Reprezentând variația factorului de transmisibilitate cu pulsația relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare *u=0.1; 0,3; 0,5; 0,7* şi *1* şi *v=0,5* şi pentru doua valori ale factorului de amortizare: $\zeta = 0{,}2$ respectiv $\zeta = 0{,}5$ se obțin diagramele din figurile 6.1.25 şi 6.1.26.

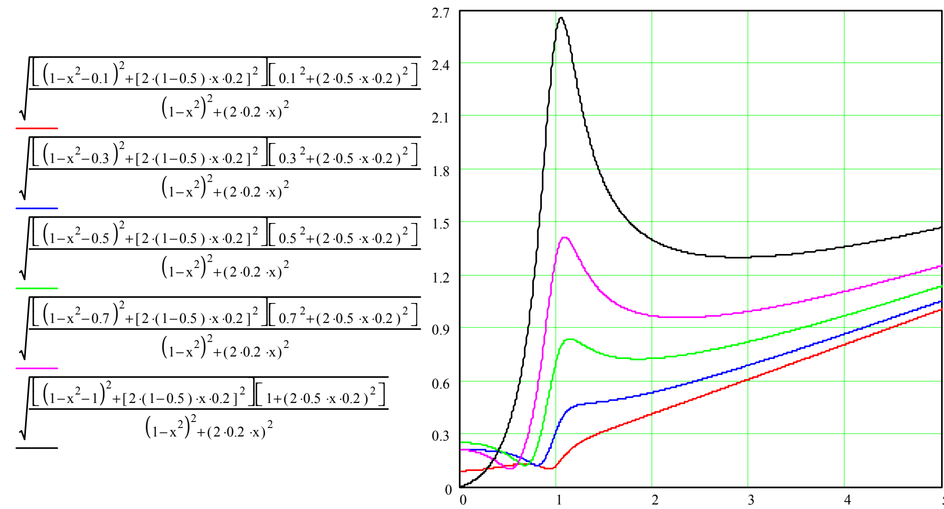


Fig. 6.1.25. Variația factorului de transmisibilitate cu pulsația relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare u (v=*0,5 şi ζ=0,2)*

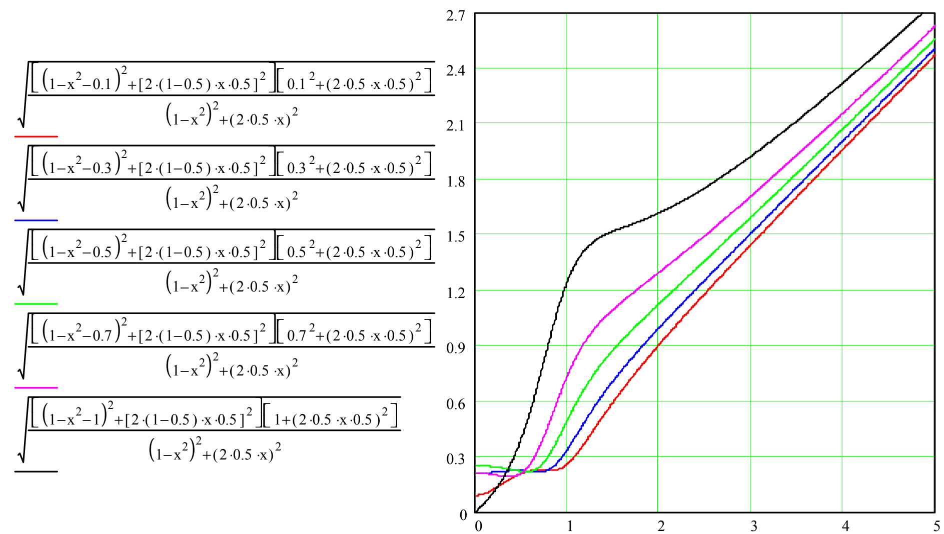


Fig. 6.1.26. Variația factorului de transmisibilitate cu pulsația relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare u (v=*0,5 şi ζ=0,5)*

c. Influența factorului de cuplare *v*

Reprezentând variația factorul de amplificare al forței transmise de cuplaj cu pulsația relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare *v=0.1; 0,3; 0,5; 0,7* şi *1* şi *u=0,5* şi pentru doua valori ale factorului de amortizare: $\zeta = 0{,}2$ respectiv $\zeta = 0{,}5$ se obțin diagramele din figurile 6.1.27 şi 6.1.28.

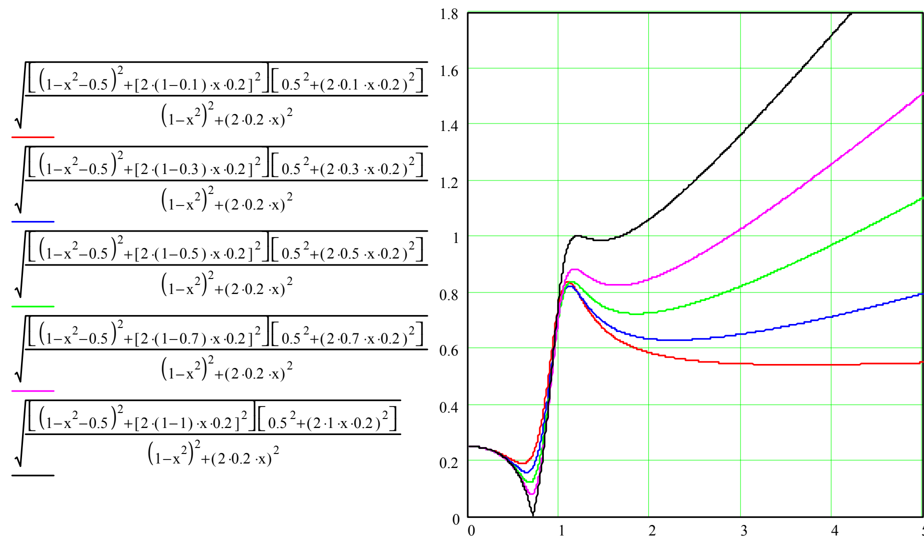


Fig. 6.1.27. Variația factorului de transmisibilitate cu pulsația relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare v (u=*0,5 şi ζ=0,2)*

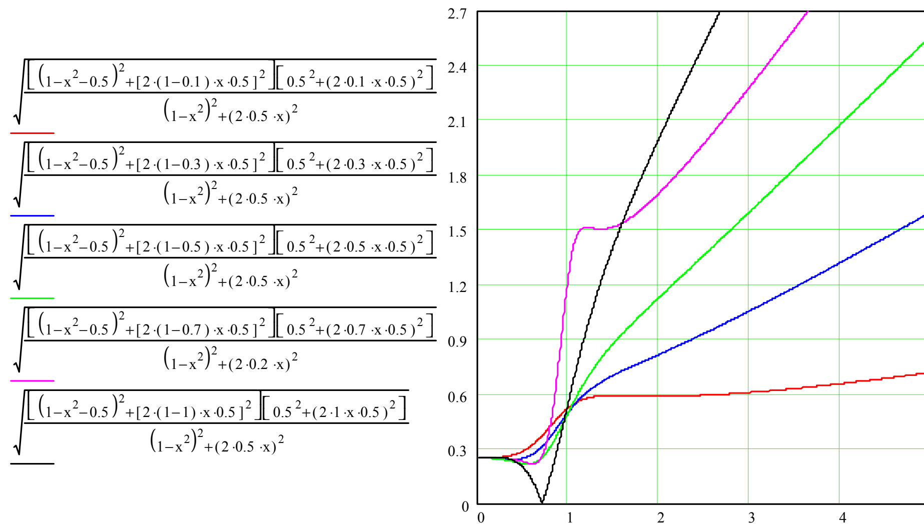


Fig. 6.1.28. Variația factorului de transmisibilitate cu pulsația relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare v (u=*0,5 şi ζ=0,5)*

d. Concluzii

- Transmisibilitatea prezintă o scădere în domeniul anterezonant, urmată de o creştere cu atât mai pronunţată cu cât factorul de amortizare ζ este mai mare. Pentru valori mai mici ale factorului de amortizare, aceasta atinge un maxim în jurul valorii de rezonanţă, după care transmisibilitatea scade obţinându-se un al doilea minim în domeniul frecventelor postrezonante, creşterea fiind în acest caz mai puţin accentuată (fig. 6.1.24);
- Factorul de cuplare elastică *u* are o influenţă diferită asupra transmisibilităţii în funcţie de valorile factorului de amortizare ζ astfel:
  - pentru ζ=0,2 şi u > 0,5 se observă un maxim în zona de rezonanţă, urmat de un minim în zona postrezonantă şi apoi o creştere mai puţin accentuată; pentru u < 0,5 se observă un minim în zona de rezonanţă, urmat de o creştere continuă , aproape liniară în zona postrezonantă (fig. 6.1.25);
  - pentru ζ=0,5 şi u > 0,5 se observă o creştere continuă mai accentuată în zona anterezonantă şi rezonantă şi mai puţin accentuată în zona postrezonantă; pentru u<0,5 se observă un palier în zona anterezonantă şi rezonantă, urmat de o creştere continuă accentuată, aproape liniară în zona postrezonantă (fig. 6.1.26)
- Factorul de cuplare vâscoasă *v* are o influenţă diferită ca şi u în funcţie de valorile factorului de amortizare ζ astfel:
  - pentru ζ=0,2 şi v>0,5 se observă un minim în zona de anterezonanţă, urmat de un maxim în zona rezonantă şi apoi un minim mai puţin accentuat, urmat de o creştere accentuată; pentru u<0,5 se observă un minim în zona de anterezonanţă, un maxim în zona de rezonanţă, urmat de un al doilea minim şi apoi o creştere continuă aproape liniară în zona postrezonantă (fig. 6.1.27);
  - pentru ζ=0,5 şi u>0,5 se observă un minim în zona de anterezonanţă, urmat de o creştere accentuată; pentru u<0,5 se observă o creştere în zona de anterezonanţă, urmată de o creştere continuă aproape liniară în zona postrezonantă cu atât mai moderată cu cât valoarea lui v este mai mică (fig. 6.1.28)

6.1.6. Factorul dinamic al cuplajului

Pulsaţia optimă de antrenare a mecanismului din punct de vedere dinamic este aceea care minimizează factorul dinamic, sau raportul dintre amplitudinea forţei transmise prin cuplaj şi amplitudinea vibraţiilor obţinute la organul de lucru :

$$\sigma = \frac{F_s \xi_F}{r \xi_x} = \frac{F_S}{r}\sqrt{\left(1-\eta^2-u\right)^2 + 4(1-v)^2\eta^2\zeta^2} \qquad (6.1.34)$$

În continuare s-a prezentat variaţia factorului dinamic funcţie de pulsaţia relativă η şi influenţa parametrului de amortizare ζ şi a parametrilor de cuplare u şi v.

a. Influența factorului de amortizare ζ

Reprezentând variația factorului dinamic al cuplajului σ cu pulsația relativă η pentru valorile coeficienților de cuplare *u=0.5* şi *v=0,5* pentru cinci valori ale factorului de amortizare: $\zeta = 0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}5;\ 0{,}7\ \ si\ \ 0{,}9$ se obțin diagramele din fig. 6.1.29

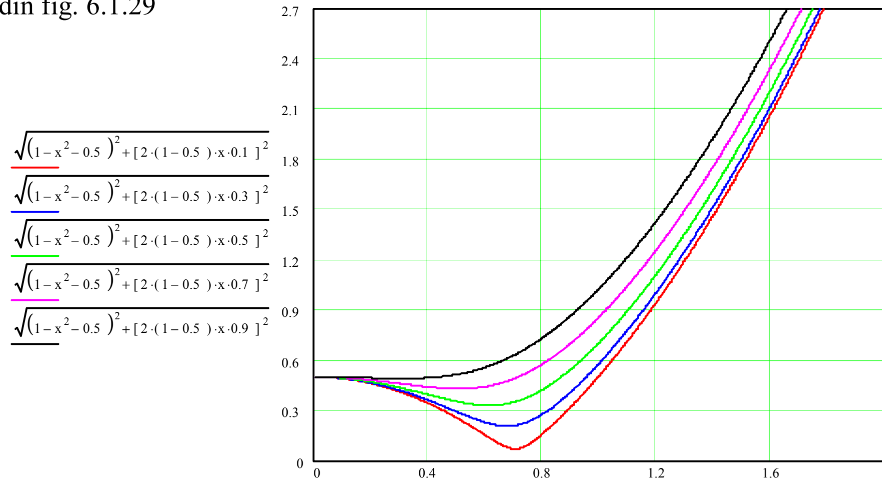


Fig. 6.1.29. Variația factorului dinamic al cuplajului cu pulsația relativă η pentru diferite valori ale factorului de amortizare ζ (*u=0,5 şi v=0,5*)

b. Influența factorului de cuplare *u*

Reprezentând variația factorului dinamic al cuplajului cu pulsația relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare *u=0.1; 0,3; 0,5; 0,7* şi *u=1* şi *v=0,5* şi pentru doua valori ale factorului de amortizare: $\zeta = 0{,}2$ şi $\zeta = 0{,}5$ se obțin fig. 6.1.30 şi 6.1.31

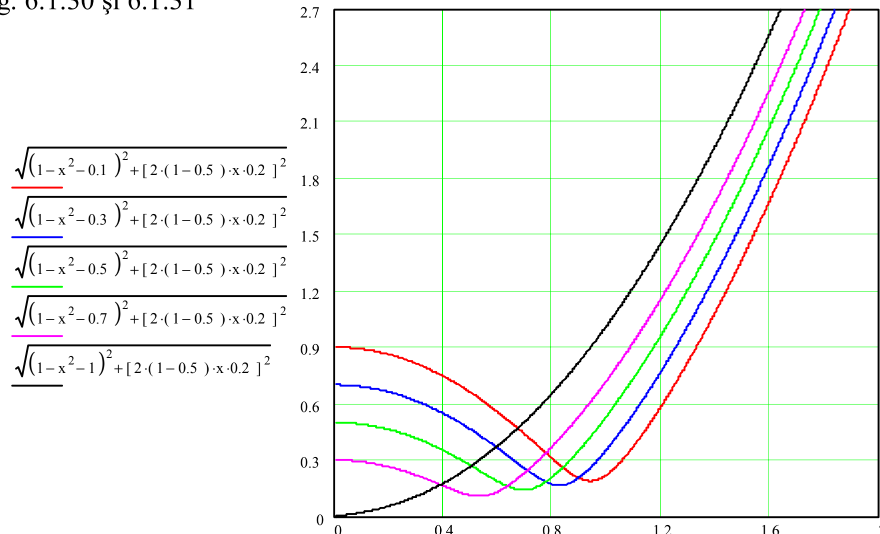


Fig. 6.1.30. Variația factorului dinamic al cuplajului cu pulsația relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare u (v=*0,5 şi ζ=0,2*)

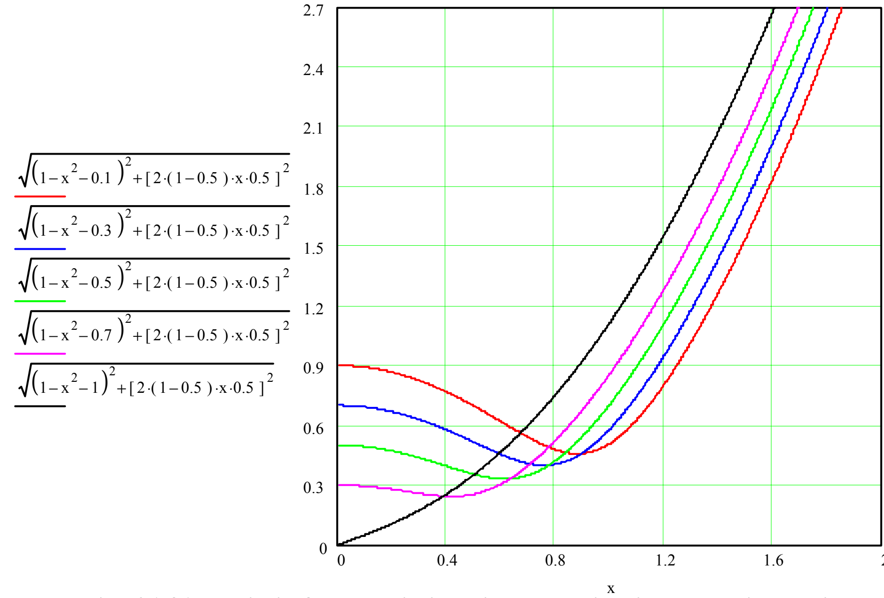


Fig. 6.1.31. Variația factorului dinamic al cuplajului cu pulsația relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare u (v=*0,5 şi ζ=0,5)*

c. Influența factorului de cuplare *v*

Reprezentând variația factorului dinamic al cuplajului cu pulsația relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare *v=0.1; 0,3; 0,5; 0,7* şi *v=1* şi *u=0,5* şi pentru doua valori ale factorului de amortizare: $\zeta = 0{,}2$ şi $\zeta = 0{,}5$ se obțin diagramele din fig. 6.1.32 şi fig. 6.1.33

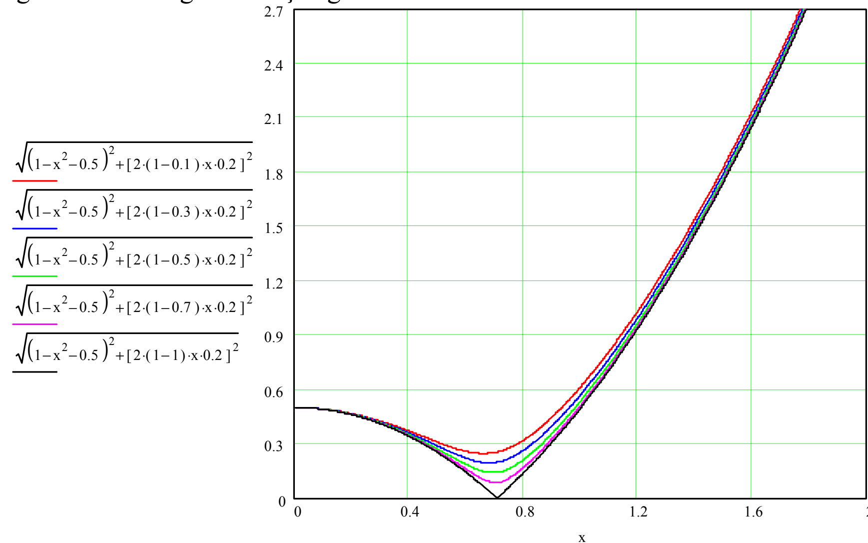


Fig. 6.1.32. Variația factorului dinamic al cuplajului cu pulsația relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare v (u=*0,5 şi ζ=0,2)*

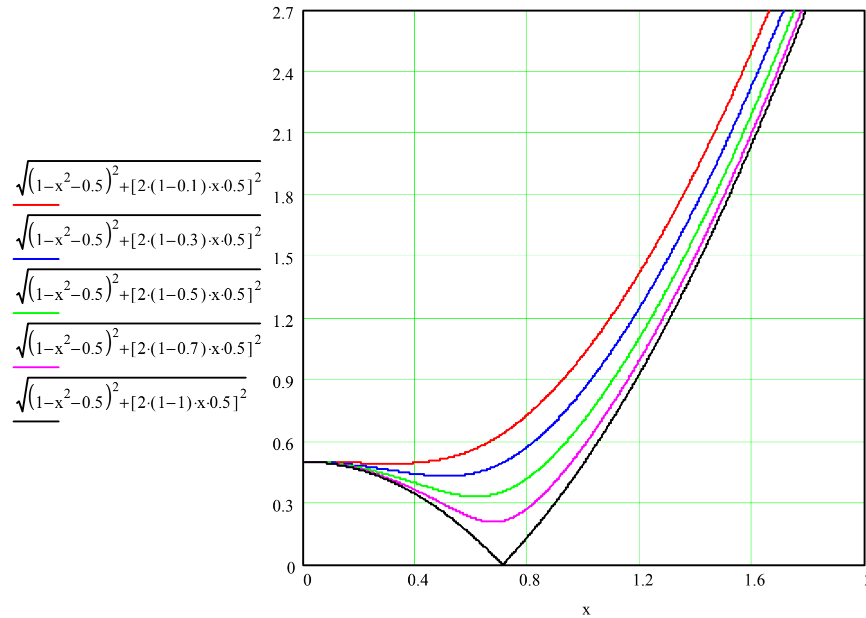


Fig. 6.1.33. Variaţia factorului dinamic al cuplajului cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare v (u=*0,5 şi ζ=0,5)*

d. Concluzii

- Factorul dinamic prezintă un minim în domeniul anterezonant cu atât mai accentuat cu cât factorul de amortizare ζ este mai mic; pentru valori mai mari ale factorului de amortizare ζ, factorul de dinamic prezintă o creştere continuă astfel încât pentru valori de regim ale pulsaţiei relative curbele se apropie foarte mult (fig. 1);
- Factorul de cuplare elastică *u* are aceeaşi influenţă asupra factorului dinamic indiferent de valorile factorului de amortizare ζ astfel pentru u < 1 se observă un minim în zona de rezonanţă, urmat de o creştere continuă , aproape liniară în zona postrezonantă; pentru u =1 creşterea este continuă (fig. 2 şi 3);
- Factorul de cuplare vâscoasă *v* are aceeaşi influenţă asupra factorului dinamic indiferent de valorile factorului de amortizare ζ astfel pentru v < 1 se observă un minim în zona de rezonanţă, urmat de o creştere continuă , aproape liniară în zona postrezonantă; pentru v =1 creşterea este continuă; curbele sunt cu atât mai apropiate cu cât factorul de amortizare este mai mic(fig. 4 şi 5).

6.1.7. Determinarea pulsației optime

Pulsația optimă este aceea pentru care factorul dinamic ia valori minime şi se obține prin anularea derivatei expresiei (6.1.34):

$$\frac{d\sigma}{d\eta}=\frac{F_S}{r}\frac{-2\eta\left(1-\eta^2-u-2(1-v)^2\zeta^2\right)}{\sqrt{\left(1-\eta^2-u\right)^2+4(1-v)^2\eta^2\zeta^2}}=0 \qquad (6.1.35)$$

$$\Rightarrow \eta_{op}=\sqrt{1-u-2(1-v)^2\zeta^2}$$

Se studiază influența factorului de amortizare ζ şi a parametrilor de cuplare u şi v asupra pulsației optime. De asemenea se vor determina limitele de variație ale factorilor de cuplare *u* şi *v* pentru anumite valori ale factorului de amortizare.

a. Influența factorului de amortizare ζ

Reprezentând variația pulsației relativă optimă η_{op} pentru valorile coeficienților de cuplare *u=0.5* şi *v=0,5* este prezentată în fig. 6.1.34

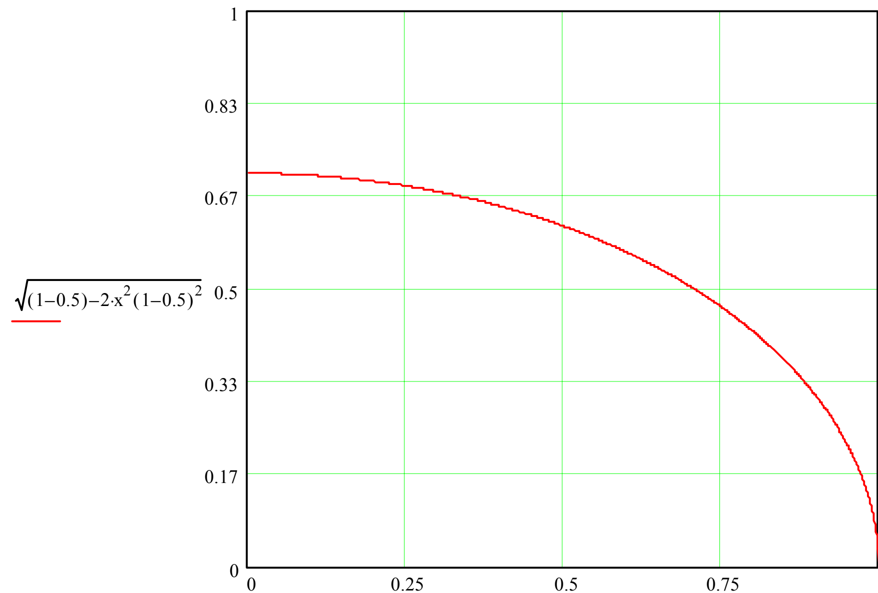


Fig. 6.1.34 Variația pulsației optime η_{op} cu amortizarea pentru *u=0.5* şi *v=0,5*

b. Influența factorului de cuplare *u*

Reprezentând variația pulsației optime dată de relația (6.1.35) pentru diferite valori ale factorului de cuplare *u=0.1; 0,3; 0,5; 0,7* şi *0,9* şi *v=0,5* în funcție de factorul de amortizare ζ se obține diagrama din figura 6.1.35.

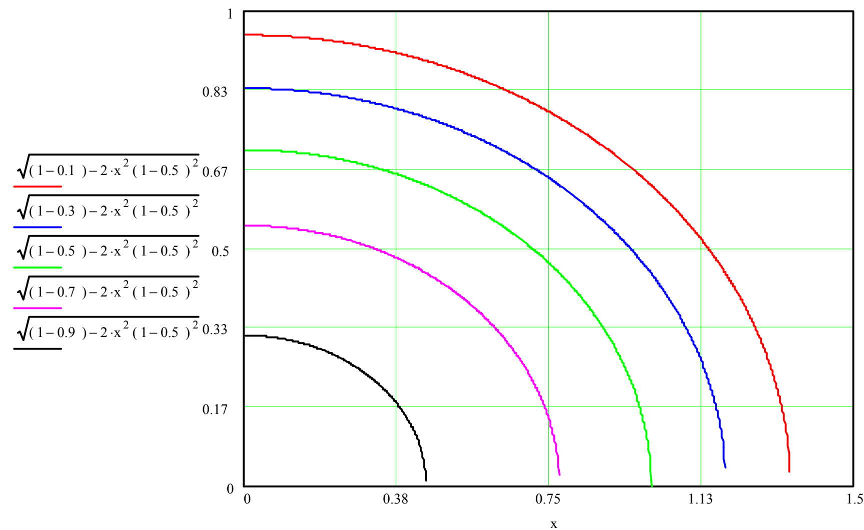


Fig. 6.1.35. Variația pulsației optime η_{op} cu amortizarea şi factorul de cuplare u pentru v=*0.5*

c. Influența factorului de cuplare *v*

Reprezentând variația pulsației optime dată de relația (6.1.35) pentru diferite valori ale factorului de cuplare *v=0.1; 0,3; 0,5; 0,7* şi *0,9* şi *u=0,5* în funcție de factorul de amortizare ζ se obține diagrama din figura 6.1.36.

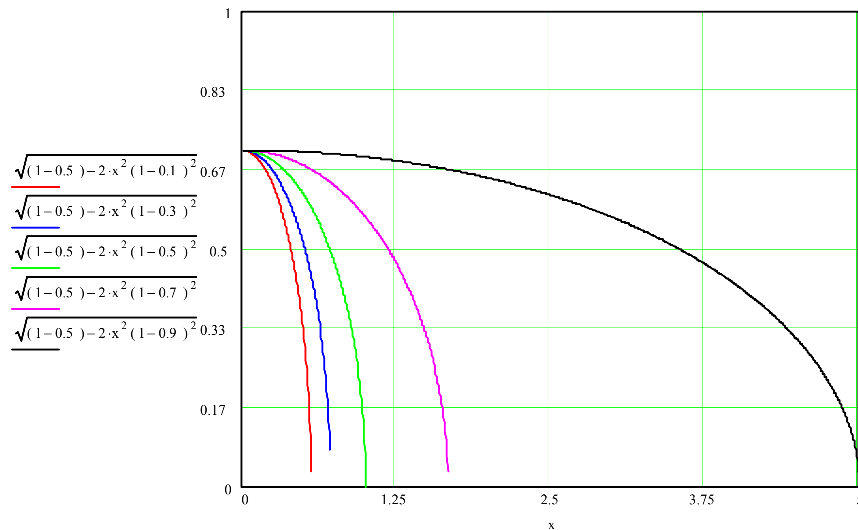


Fig. 6.1.36 Variația pulsației optime η_{op} cu amortizarea şi factorul de cuplare v pentru u=*0.5*

Condiția de existență a soluției (6.1.35) pentru pulsația optimă este:

$$1-u-2(1-v)^2\zeta^2 \geq 0 \Leftrightarrow u \leq 1-2(1-v)^2\zeta^2 \qquad (6.1.36)$$

Se reprezintă în spațiul coeficienților de cuplare funcția *u(v)* pentru diferite valori ale factorului de amortizare ζ, relația (6.1.36) reprezintă suprafața situată sub graficul funcției $u = f(v) = 1-2(1-v)^2\zeta^2$ reprezentată prin diagrama din figura 6.1.37.

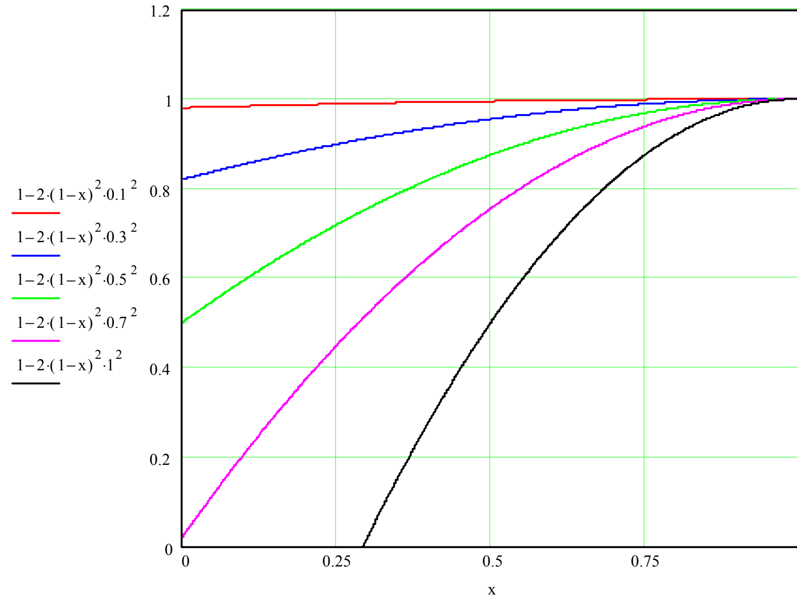


Fig. 6.1.37. Domeniile de existență ale soluțiilor pentru pulsația optimă

6.1.8. Factorul dinamic minim

Factorul dinamic minim se obține pentru pulsația optimă (6.1.35):

$\eta_{op} = \sqrt{1-u-2(1-v)^2\zeta^2}$ care înlocuită în (6.1.34) conduce la:

$$\sigma_{min} = \sqrt{\left(1-\eta_{op}^2-u\right)^2+4(1-v)^2\eta_{op}^2\zeta^2} = 2(1-v)\zeta\cdot\sqrt{1-u-(1-v)^2\zeta^2} \qquad (6.1.37)$$

Se va studia în continuare influența factorului de amortizare ζ şi a parametrilor de cuplare *u* şi *v* asupra variației factorului dinamic minim.

a. Influența factorului de amortizare ζ

Reprezentând variația factorului dinamic minim pentru valorile coeficienților de cuplare *u=0.5* şi *v=0,5* pentru diferite valori ale factorului de amortizare se obțin diagramele din fig. 6.1.38

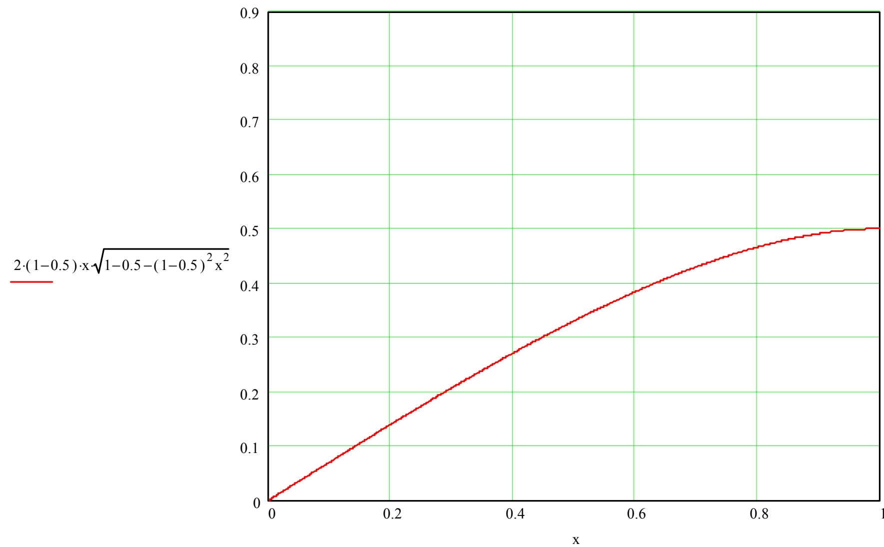


Fig. 6.1.38. Variaţia factorului dinamic minim cu amortizarea pentru *u=0.5* şi *v=0,5*

b. Influenţa factorului de cuplare *u*

Reprezentând variaţia factorului dinamic minim al cuplajului în funcţie de valorile factorului de cuplare *u* pentru *v=0,5* şi pentru trei valori ale factorului de amortizare: $\zeta = 0{,}2$, $\zeta = 0{,}5$ şi $\zeta = 0{,}7$ se obţin diagramele din fig. 6.1.39

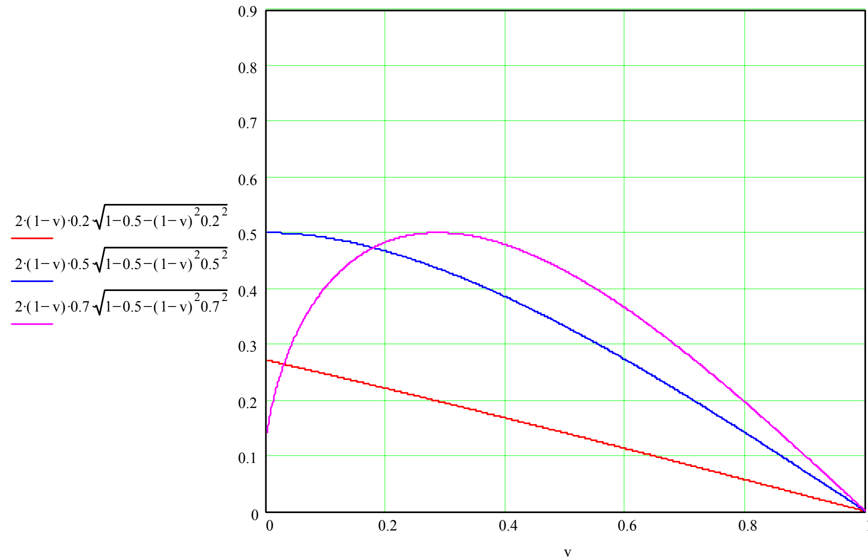


Fig. 6.1.39. Variaţia factorului dinamic minim cu factorul de cuplare *u* şi trei valori ale factorului de amortizare pentru v=0.5

c. Influenţa factorului de cuplare *u*

Reprezentând variaţia factorului dinamic minim al cuplajului în funcţie de valorile factorului de cuplare *v* pentru *u=0,5* şi pentru doua valori ale factorului de amortizare: $\zeta = 0{,}2$, $\zeta = 0{,}5$ şi $\zeta = 0{,}7$ se obţin diagramele din fig. 6.1.40

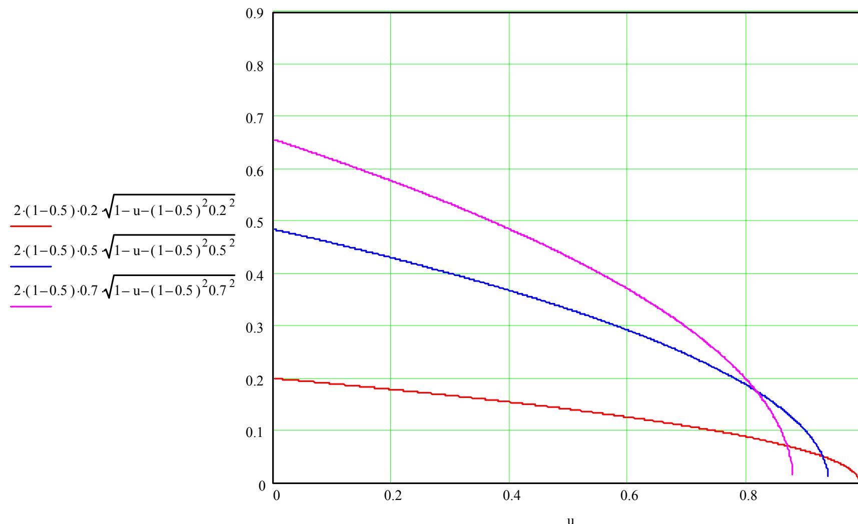


Fig. 6.1.39. Variaţia factorului dinamic minim cu factorul de cuplare *v* şi trei valori ale factorului de amortizare pentru u=0.5

d. Concluzii

- Pulsaţia optimă este situată în domeniul anterezonant şi este cu atât mai mică cu cât factorul de amortizare ζ este mai mare (fig. 6.1.34);
- Pentru o anumită valoare a factorului de amortizare ζ pulsaţia optimă este cu atât mai mare cu cât factorul de cuplare elastică u este mai mare; pentru anumite valori ale factorului de amortizare ζ nu există soluţii pentru orice factor de cuplare u (fig. 6.1.35-6.1.36);
- Din analiza diagramelor prezentate în figura 6.1.37 se poate trage concluzia că un factor dinamic optim nu se poate obţine pentru orice valori ale parametrilor de cuplare u şi v. Aceşti parametri trebuie să fie sub curba
  $u = f(v) = 1 - 2(1-v)^2\zeta^2$ corespunzătoare factorului de amortizare ζ;
- Factorul dinamic este cu atât mai mare cu cât factorul de amortizare ζ este mai mare (fig.6.1.38);
- Factorul dinamic ca funcţie de factorul de cuplare u admite un maxim pentru valori ale factorului de amortizare ζ>0,6 care corespunde unei valori u≈0,3; pentru valori mai mici ale factorului de amortizare variaţia este continuă şi descrescătoare cu u (fig.6.1.39);
- Factorul dinamic ca funcţie de factorul de cuplare v are o variaţie continuă şi descrescătoare (fig.6.1.40).

6.1.10. Cuplajul rigid

Modelul matematic este prezentat în figura 6.1.41, fiind un caz particular al celui de la punctul 6.1.1 în care $c_2 = 0;\quad k_2 \to \infty \;\Rightarrow\; u = 1,\ v = 0$

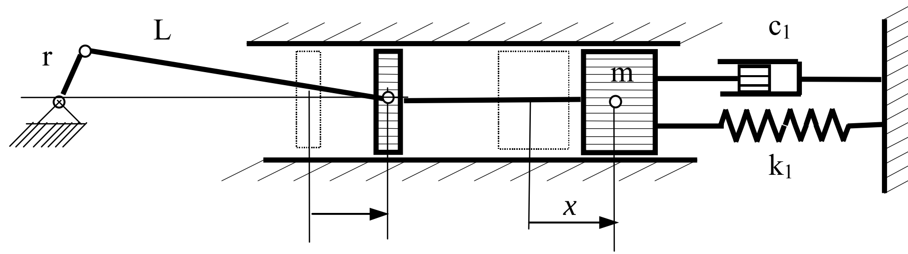


Fig.6.1.41 $y = r\cos\omega t$

Relațiile (6.1.17), (6.1.18) (6.1.33') şi (6.1.34) devin:

- factorul de amplificare: $\xi_x = 1$ (6.1.38)
- factorul de transmisibilitate al cuplajului: $\xi_F = 1$ (6.1.39)
- factorul dinamic al cuplajului: $\sigma = \dfrac{F_s \xi_F}{r \xi_x} \to \infty$ (6.1.40)

6.1.11. Cuplajul elastic simplu

Modelul matematic este prezentat în figura 6.1.42 fiind un caz particular al celui de la punctul 6.1.1 în care $c_2 = 0 \;\Rightarrow\; v = 0$

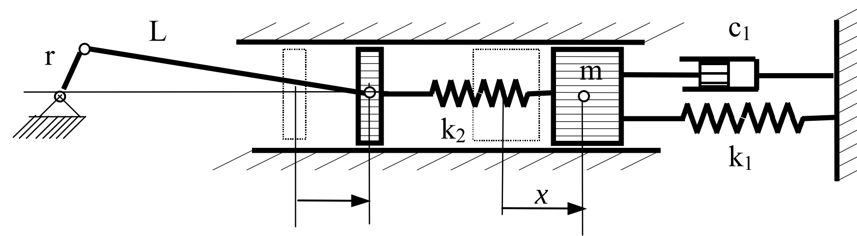


Fig.6.1.42 $y = r\cos\omega t$

Relațiile (6.1.18), (6.1.33') şi (6.1.34) devin:

- factorul de amplificare: $\xi_x = \dfrac{u}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4\eta^2\zeta^2}}$ (6.1.41)
- factorul de transmisibilitate : $\xi_F = \sqrt{\dfrac{\left[\left(1-\eta^2-u\right)^2 + 4\eta^2\zeta^2\right]u^2}{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4\eta^2\zeta^2}}$ (6.1.42)
- factorul dinamic al cuplajului: $\sigma = \left(F_S / r\right)\sqrt{\left(1-\eta^2-u\right)^2 + 4\eta^2\zeta^2}$ (6.1.43)

a. Influența factorului de cuplare u asupra factorului de amplificare

Reprezentând variația factorului de amplificare cu pulsația relativă η pentru diferite valori ale coeficientului de cuplare *u=0.1; 0,3; 0,5; 0,7* şi *1* şi pentru două valori ale factorului de amortizare: $\zeta = 0{,}2$ *si* $\zeta = 0{,}5$ se obțin diagramele din fig. 6.1.43 şi 6.1.44.

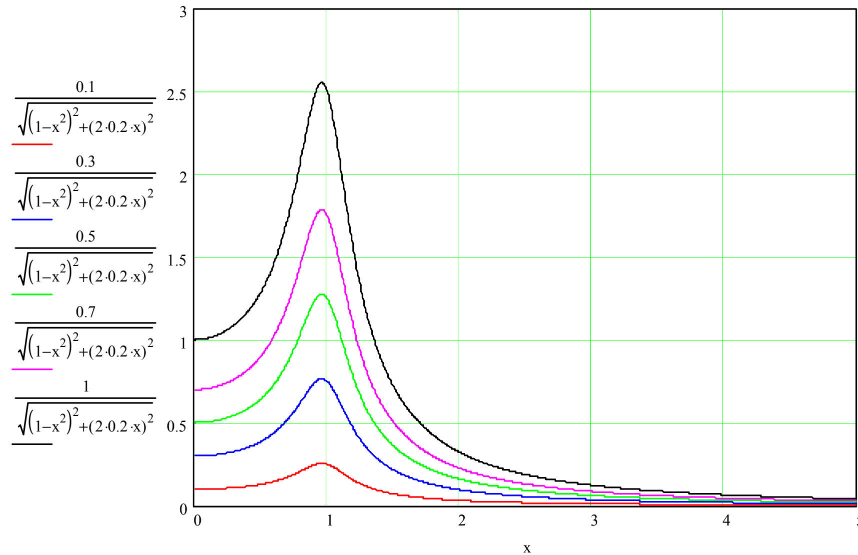


Fig. 6.1.43. Variația factorului de amplificare cu pulsația relativă pentru diferite valori ale factorului de cuplare u şi ζ=0,2

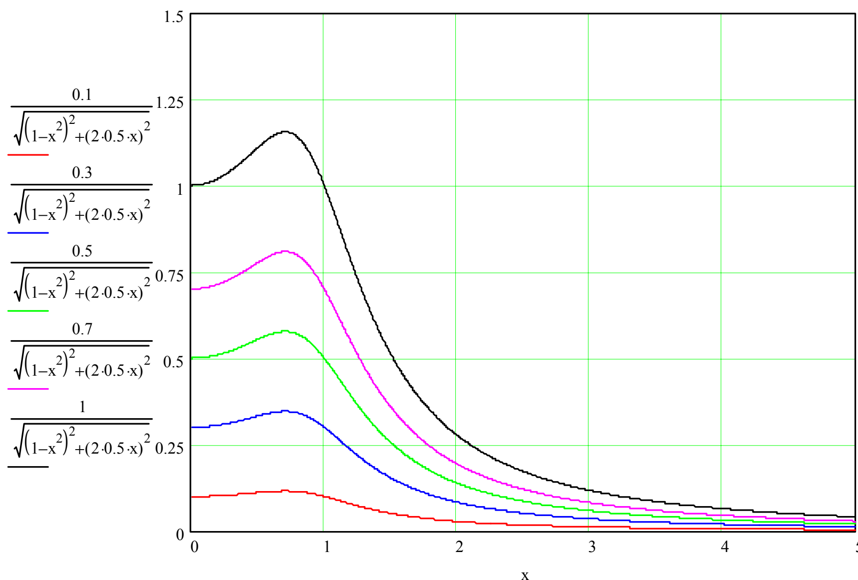


Fig. 6.1.44. Variația factorului de amplificare cu pulsația relativă pentru diferite valori ale factorului de cuplare u şi ζ=0,5

b. Influența factorului de cuplare u asupra factorului de transmisibilitate

Reprezentând variația factorului de transmisibilitate al cuplajului cu pulsația relativă η pentru diferite valori ale coeficientului de cuplare *u=0.1; 0,3; 0,5; 0,7* şi *1* şi pentru două valori ale factorului de amortizare: $\zeta = 0{,}2$ *si* $\zeta = 0{,}5$ se obțin diagramele din fig. 6.1.45 şi 6.1.46.

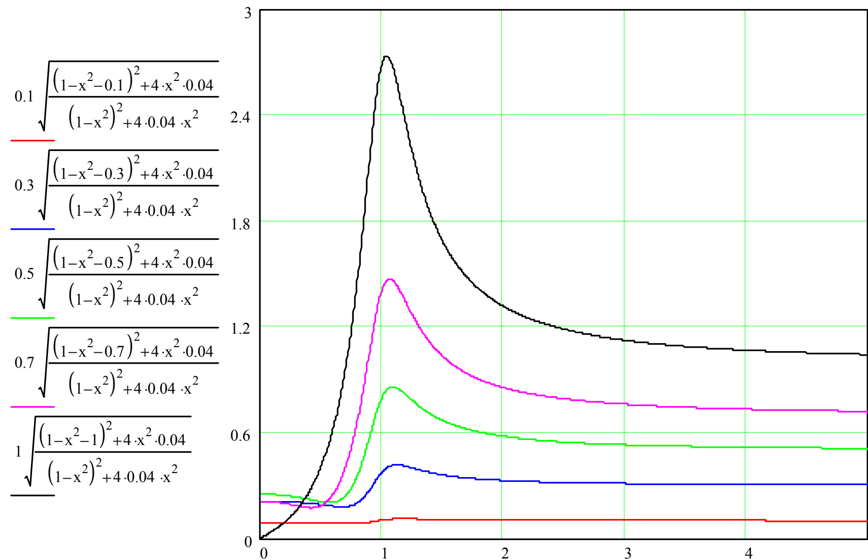


Fig. 6.1.45. Variația factorului de transmisibilitąte cu pulsația relativă pentru diferite valori ale factorului de cuplare u şi ζ=0,2

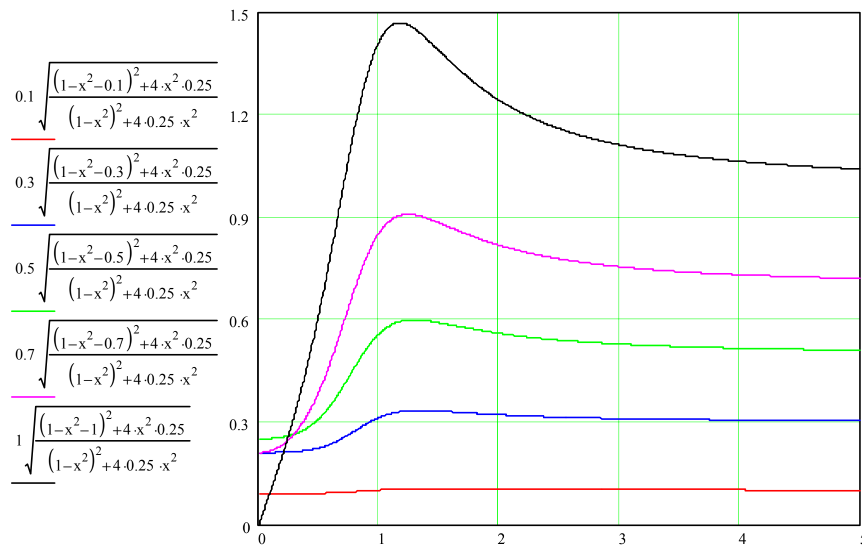


Fig. 6.1.46. Variația factorului de transmisibilitate cu pulsația relativă pentru diferite valori ale factorului de cuplare u şi ζ=0,5

c. Influenţa factorului de cuplare u asupra factorului dinamic

Reprezentând variaţia factorului dinamic al cuplajului cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale coeficientului de cuplare *u=0.1; 0,3; 0,5; 0,7* şi *1* şi pentru două valori ale factorului de amortizare: $\zeta = 0{,}2$ *si* $\zeta = 0{,}5$ se obţin diagramele din fig. 6.1.47 şi 6.1.48.

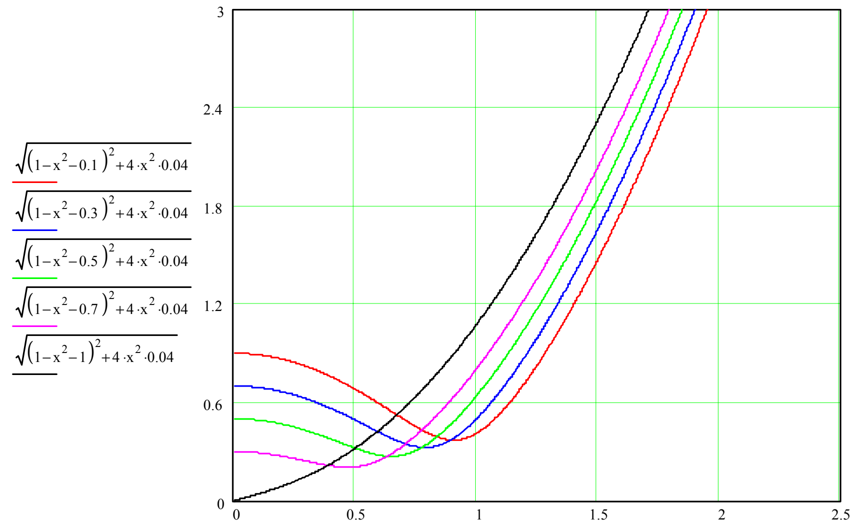


Fig. 6.1.47. Variaţia factorului dinamic cu pulsaţia relativă pentru diferite valori ale factorului de cuplare u şi ζ=0,2

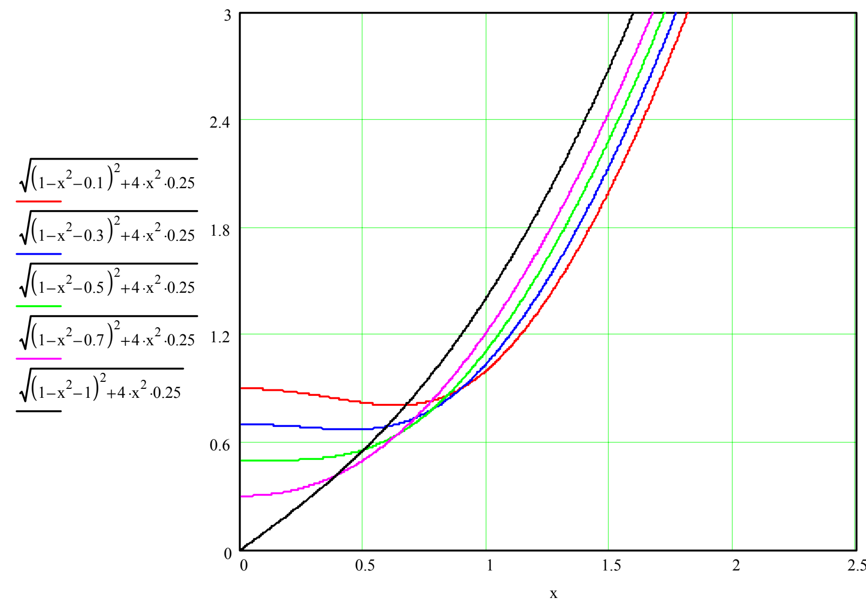


Fig. 6.1.47. Variaţia factorului dinamic cu pulsaţia relativă pentru diferite valori ale factorului de cuplare u şi ζ=0,5

6.1.12. Cuplajul amortizor simplu

Modelul matematic este prezentat în figura 6.1.49 fiind un caz particular al celui de la punctul 6.1.1 în care $k_2 = 0 \;\Rightarrow\; u = 0$

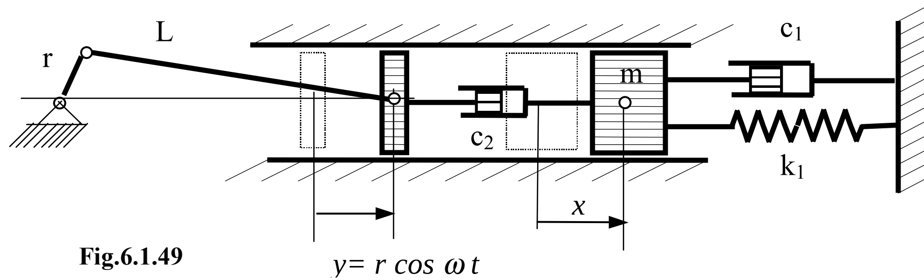


Fig.6.1.49

Relațiile (6.1.18), (6.1.33') şi (6.1.34) devin:

- factorul de amplificare:

$$\xi_x = \frac{2\nu\eta\zeta}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4\eta^2\zeta^2}} \tag{6.1.44}$$

- factorul de transmisibilitate:

$$\xi_F = \sqrt{\frac{\left[\left(1-\eta^2\right)^2 + 4(1-\nu)^2\eta^2\zeta^2\right]4\nu^2\eta^2\zeta^2}{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4\eta^2\zeta^2}} \tag{6.1.45}$$

- factorul dinamic al cuplajului:

$$\sigma = \frac{F_S}{r}\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4(1-\nu)^2\eta^2\zeta^2} \tag{6.1.46}$$

a. Influența factorului de cuplare v asupra factorului de amplificare

Reprezentând variația factorului de amplificare cu pulsația relativă η pentru diferite valori ale coeficientului de cuplare *ν=0.1; 0,3; 0,5; 0,7* şi *1* şi pentru două valori ale factorului de amortizare: $\zeta = 0{,}2$ *si* $\zeta = 0{,}5$ se obțin diagramele din fig. 6.1.50 şi 6.1.51.

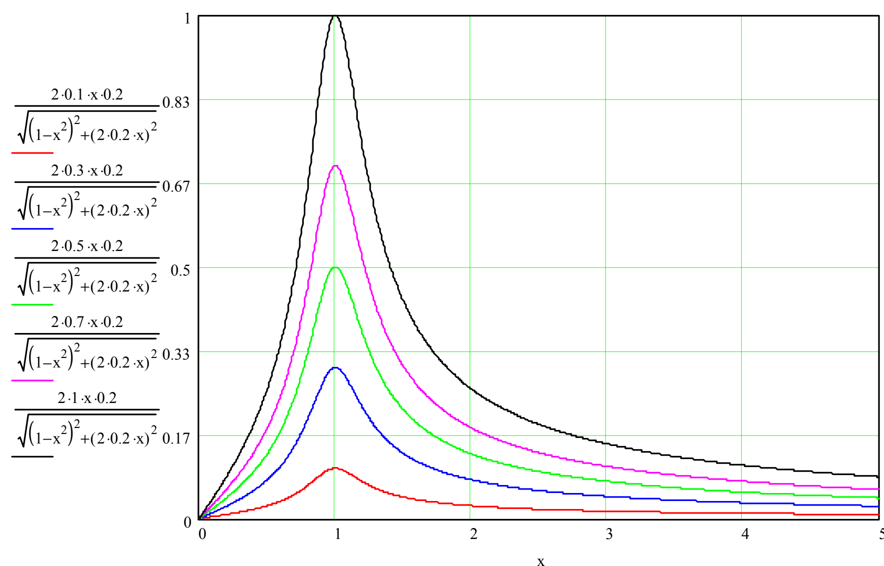


Fig. 6.1.50. Variaţia factorului de amplificare cu pulsaţia relativă pentru diferite valori ale factorului de cuplare v şi ζ=0,2

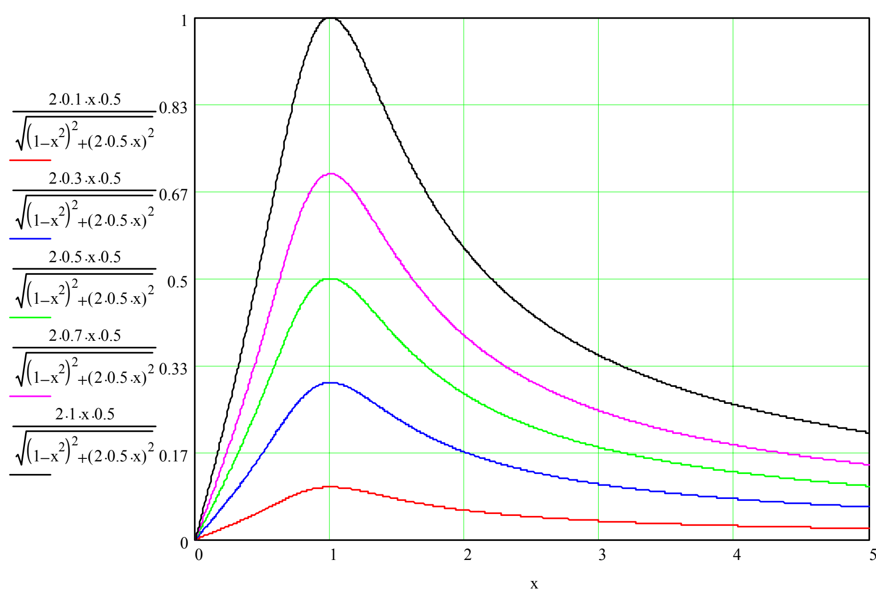


Fig. 6.1.51. Variaţia factorului de amplificare cu pulsaţia relativă pentru diferite valori ale factorului de cuplare v şi ζ=0,5

b. Influența factorului de cuplare ν asupra factorului de transmisibilitate

Reprezentând variația factorului de transmisibilitate al cuplajului cu pulsația relativă η pentru diferite valori ale coeficientului de cuplare *ν=0.1; 0,3; 0,5; 0,7* şi *1* şi pentru două valori ale factorului de amortizare $\zeta = 0{,}2$ *si* $\zeta = 0{,}5$ se obțin diagramele din fig. 6.1.52 şi 6.1.53.

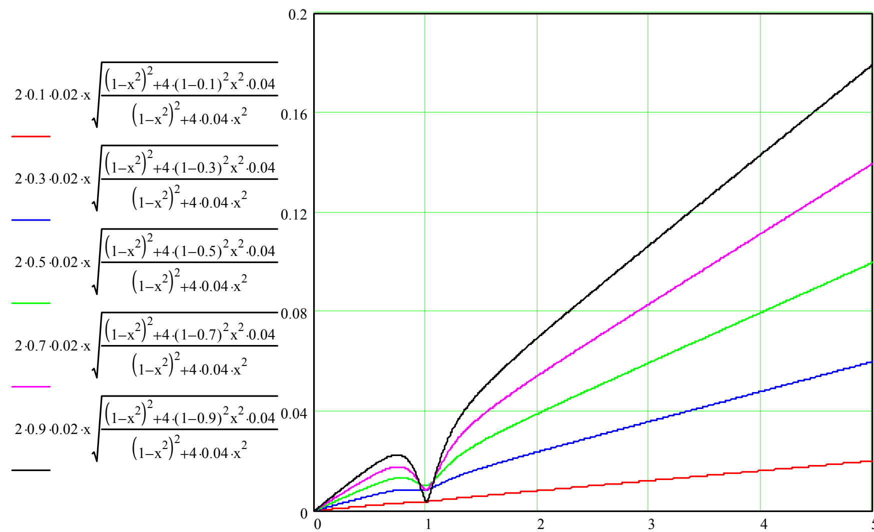


Fig. 6.1.52. Variația factorului de transmisibilitate cu pulsația relativă pentru diferite valori ale factorului de cuplare ν şi ζ=0,2

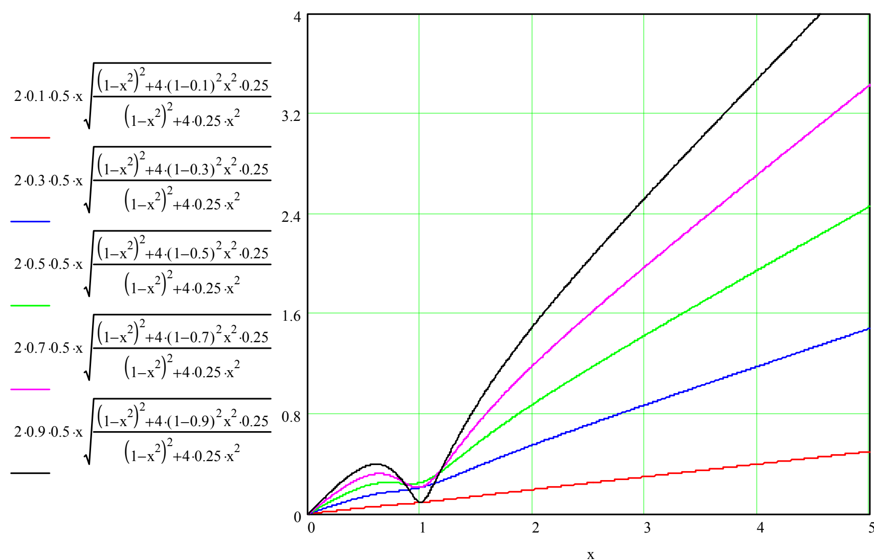


Fig. 6.1.53. Variația factorului de transmisibilitate cu pulsația relativă pentru diferite valori ale factorului de cuplare ν şi ζ=0,5

c. Influența factorului de cuplare ν asupra factorului dinamic

Reprezentând variația factorului dinamic al cuplajului cu pulsația relativă η pentru diferite valori ale coeficientului de cuplare *ν=0.1; 0,3; 0,5; 0,7* şi *1* şi pentru două valori ale factorului de amortizare $\zeta = 0{,}2$ *si* $\zeta = 0{,}5$ se obțin diagramele din fig. 6.1.54 şi 6.1.55.

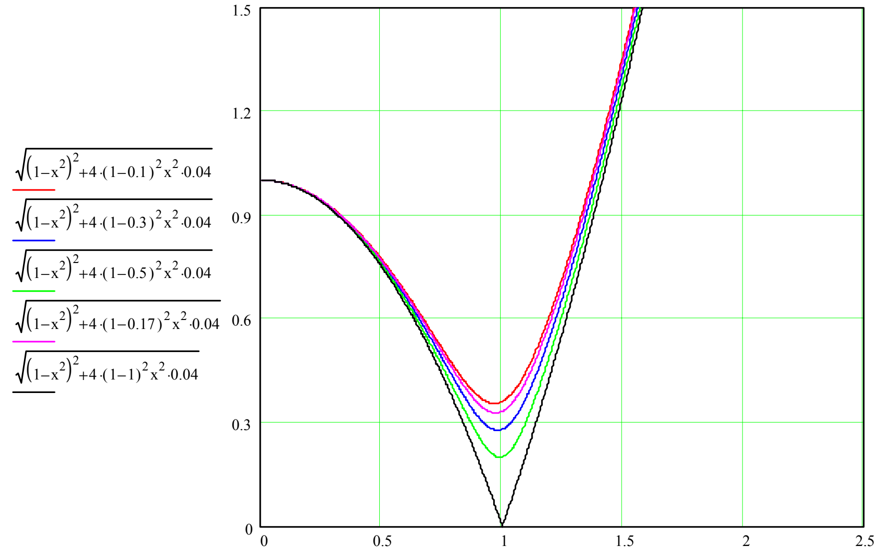


Fig. 6.1.54. Variația factorului dinamic cu pulsația relativă pentru diferite valori ale factorului de cuplare ν şi ζ=0,2

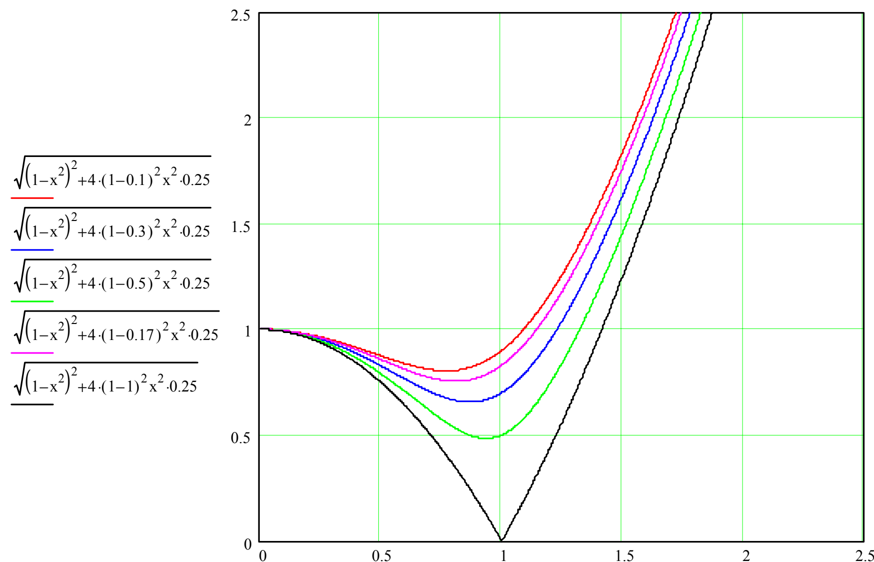


Fig. 6.1.55. Variația factorului dinamic cu pulsația relativă pentru diferite valori ale factorului de cuplare ν şi ζ=0,5

6.2. Maşini vibratoare sprijinite pe suporți rigizi articulați

Vibratoarele sprijinite pe suporți rigizi articulați (fig.6.2.1) au modelul matematic prezentat în figura 6.2.1. Acesta este format dintr-un corp de masă m legat de bază prin intermediul unui amortizor hidraulic (forța de amortizare vâscoasă fiind proporțională cu viteza $\overline{R}=-c\overline{v}$). Corpul de masă m este legat prin intermediul unui arc şi a unui amortizor de un piston având o lege de mişcare armonică: $y=r\cos\omega t$. Acesta este un caz particular al celui de la punctul 6.2.1 pentru care avem: $k_1=0 \;\;\Rightarrow\;\; u=1$

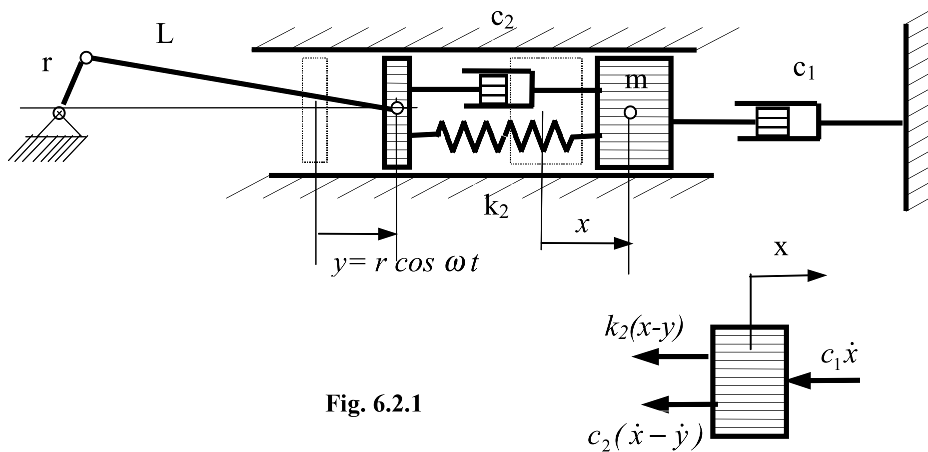


Fig. 6.2.1

6.2.1. Factorul de amplificare ξ_x şi defazajul φ

- Factorul de amplificare de la dispozitivul de antrenare la organul de lucru condus (jgheabul vibrator) este:

$$\xi_x=\frac{a}{r}=\sqrt{\frac{1+4v^2\eta^2\zeta^2}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\eta^2\zeta^2}} \qquad (6.6.2.1)$$

- Defazajul dintre argumentul excitației şi argumentul răspunsului:

$$\varphi=arctg\frac{2\eta\zeta}{1-\eta^2}-arctg2v\eta\zeta \qquad (6.2.2)$$

a. Influența factorului de amortizare ζ

Reprezentând variația factorul de amplificare cu pulsația relativă η pentru diferite valori ale factorului de amortizare $\zeta=0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}5;\ 0{,}7;\ 0{,}9$ şi un factor de cuplare $v=0{,}5$ se obțin diagramele din fig. 6.2.2.

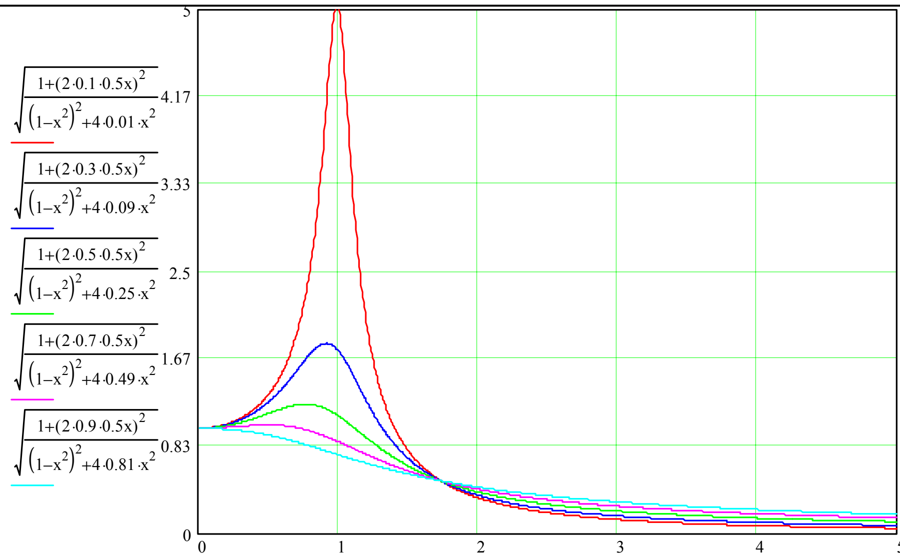


Fig.6.2.2. Variaţia factorul de amplificare cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de amortizare ζ

b. Influenţa factorului de cuplare *ν*

Reprezentând variaţia factorul de amplificare cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare *ν=0.1; 0,3; 0,5; 0,7* şi pentru doua valori ale factorului de amortizare: $\zeta = 0{,}2$ respectiv $\zeta = 0{,}5$ se obţin diagramele din figurile 6.2.3 şi 6.2.4.

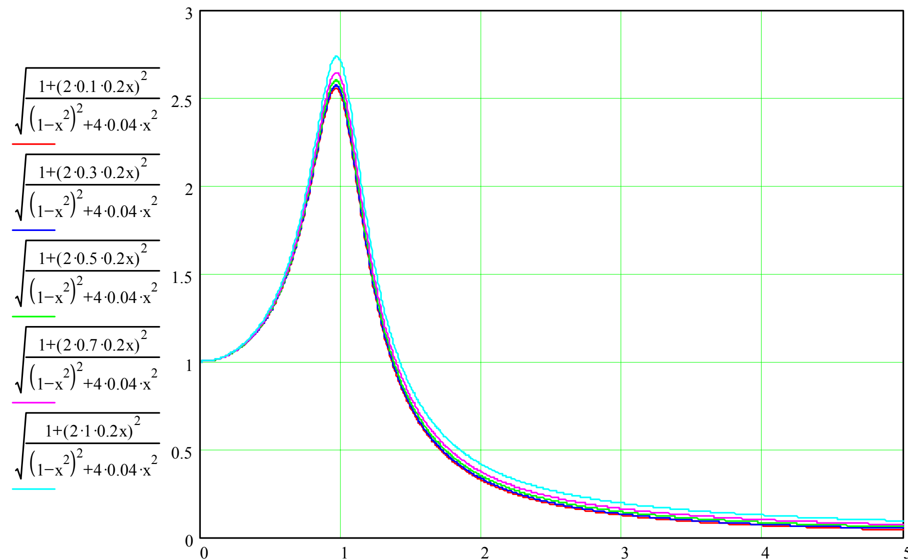


Fig.6.2.3. Variaţia factorul de amplificare cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare ν (ζ=0,2)

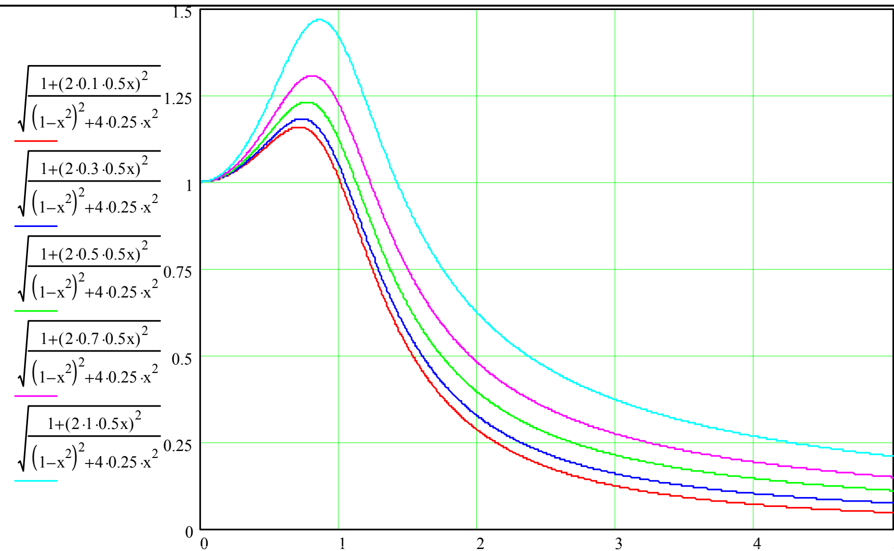


Fig.6.2.4. Variaţia factorul de amplificare cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare v (ζ=0,5)

6.2.2. Factorul de amplificare al acceleraţiilor $\xi_{\ddot{x}}$

a. Influenţa factorului de amortizare ζ

Reprezentând variaţia factorul de amplificare al acceleraţiilor $\xi_{\ddot{x}}$ cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de amortizare $\zeta = 0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}5;\ 0{,}7;\ 0{,}9$ şi un coeficient de cuplare $v=0,5$ se obţin diagramele din fig. 6.2.5

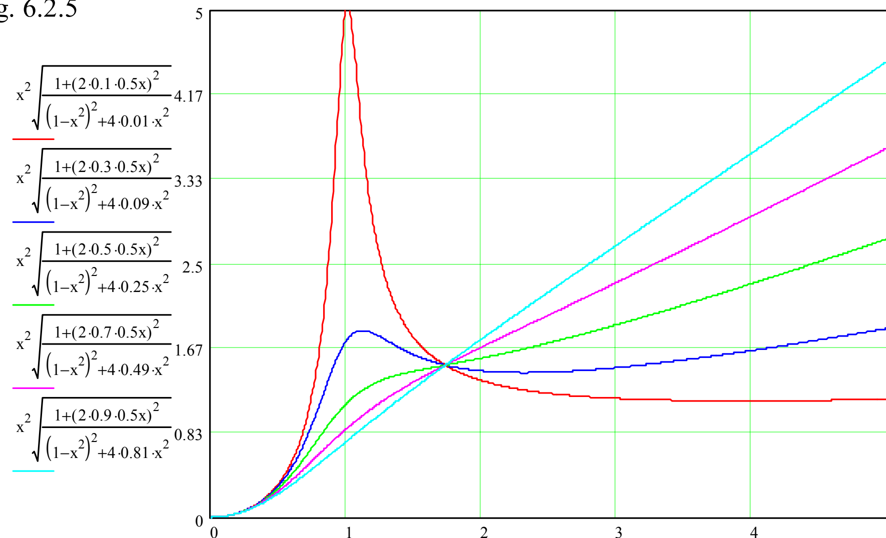


Fig.6.2.5. Variaţia factorul de amplificare al acceleraţiilor cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de amortizare ζ

b. Influenţa factorului de cuplare v

Reprezentând variaţia factorul de amplificare al acceleraţiilor $\xi_{\ddot{x}}$ cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare *v=0.1; 0,3; 0,5; 0,7* şi pentru doua valori ale factorului de amortizare: $\zeta = 0{,}2$ respectiv $\zeta = 0{,}5$ se obţin diagramele din figurile 6.2.6 şi 6.2.7.

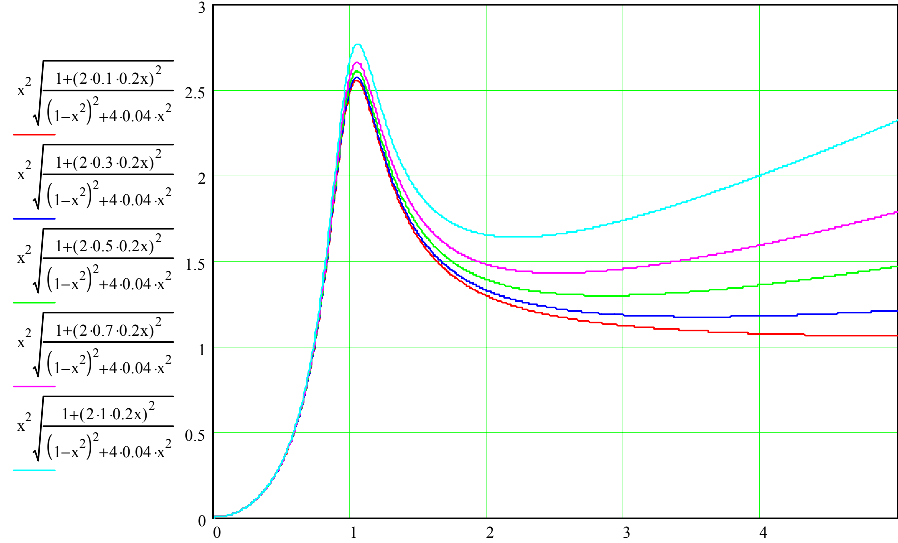


Fig.6.2.6. Variaţia factorul de amplificare al acceleraţiilor cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare v (ζ=0,2)

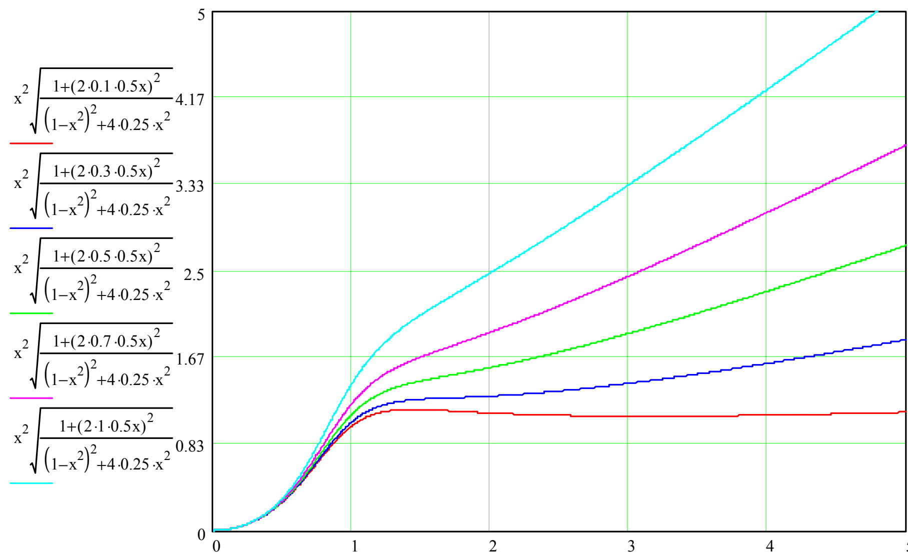


Fig.6.2.7. Variaţia factorul de amplificare al acceleraţiilor cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare v (ζ=0,5)

6.2.3. Factorul de amplificare a amplitudinii mişcării relative a capetelor cuplajului ξ_w

Factorul de amplificare a mişcării relative a capetelor cuplajului ξ_w (6.2.29') se scrie pentru acest caz:

$$\xi_w = \sqrt{\frac{\eta^4 + 4(1-v)^2\eta^2\zeta^2}{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4\eta^2\zeta^2}} \tag{6.2.3}$$

a. Influenţa factorului de amortizare ζ

Reprezentând variaţia factorul de amplificare a mişcării relative a capetelor cuplajului ξ_w cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de amortizare $\zeta = 0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}5;\ 0{,}7;\ 0{,}9$ şi un coeficient de cuplare *v=0,5* se obţin diagramele din figura 6.2.8

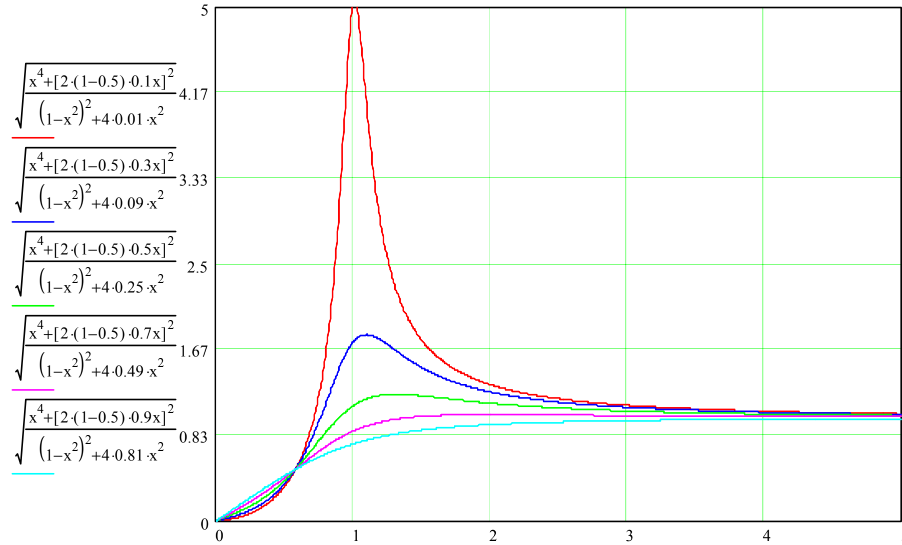


Fig.6.2.8. Variaţia factorul de amplificare cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de amortizare ζ

b. Influenţa factorului de cuplare *v*

Reprezentând variaţia factorului de amplificare a mişcării relative a capetelor cuplajului ξ_w cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare *v=0.1; 0,3; 0,5; 0,7* şi *v=1* şi pentru doua valori ale factorului de amortizare: $\zeta = 0{,}2$ respectiv $\zeta = 0{,}5$ se obţin diagramele din figurile 6.2.9 şi 6.2.10.

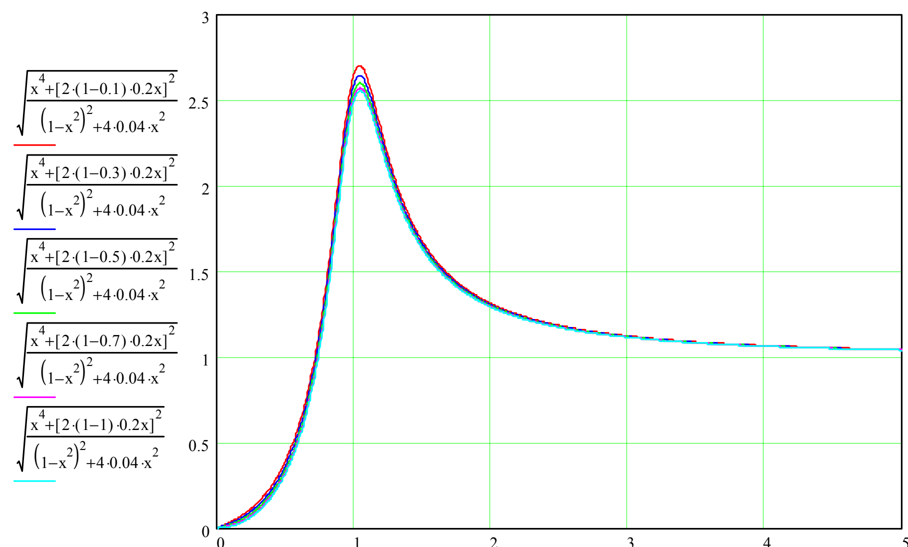


Fig.6.2.9. Variaţia factorul de amplificare al mişcării relative a capetelor cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare ν (ζ=0,2)

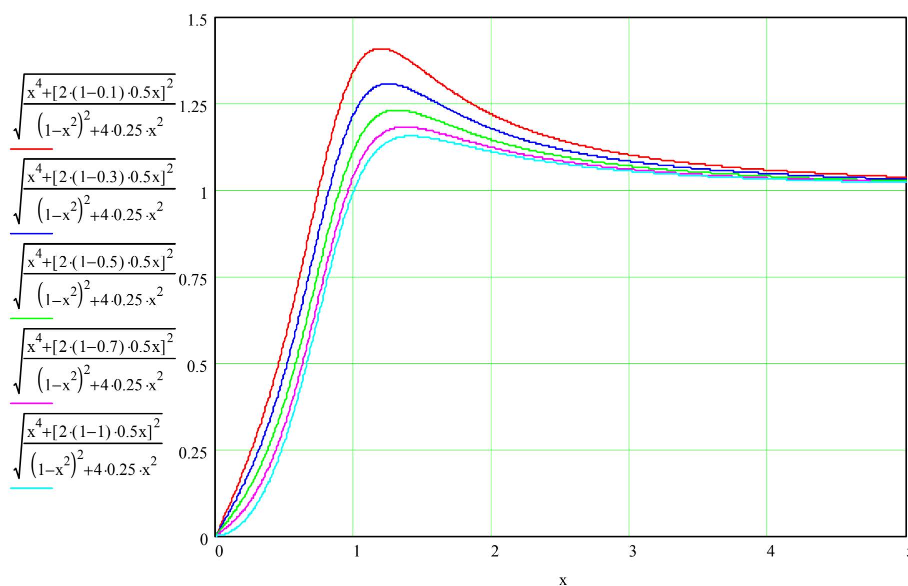


Fig.6.2.10. Variaţia factorul de amplificare al mişcării relative a capetelor cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare ν (ζ=0,5)

6.2.4. Factorul de transmisibilitate al cuplajului ξ_F

Factorul de transmisibilitate al cuplajului ξ_F (6.2.33') se scrie pentru acest caz:

$$\xi_F = \xi_w \sqrt{1^2 + 4v^2\eta^2\zeta^2} = \sqrt{\frac{\left[\eta^4 + 4(1-v)^2\eta^2\zeta^2\right]\left(1+4v^2\eta^2\zeta^2\right)}{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4\eta^2\zeta^2}} \qquad (6.2.4)$$

a. Influenţa factorului de amortizare

Reprezentând variaţia factorului de transmisibilitate al cuplajului ξ_F cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de amortizare $\zeta = 0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}5;\ 0{,}7;\ 0{,}9$ şi un coeficient de cuplare *v=0,5* se obţin diagramele din fig. 6.2.11

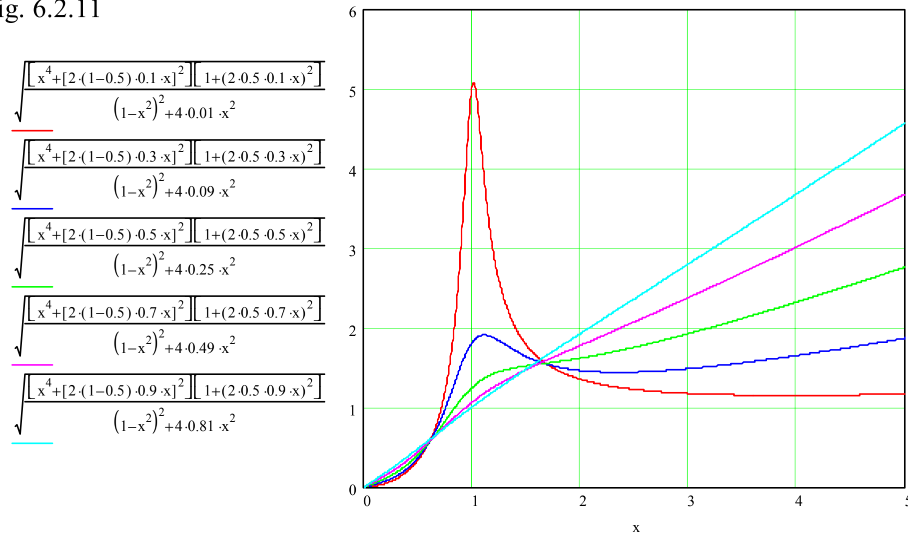


Fig.6.2.11. Variaţia factorul de transmisibilitate cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de amortizare ζ

b. Influenţa factorului de cuplare *v*

Reprezentând variaţia factorului de transmisibilitate al cuplajului ξ_F cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare *v=0.1; 0,3; 0,5; 0,7* şi *v=1* şi pentru doua valori ale factorului de amortizare: $\zeta = 0{,}2$ respectiv $\zeta = 0{,}5$ se obţin diagramele din figurile 6.2.12 şi 6.2.13.

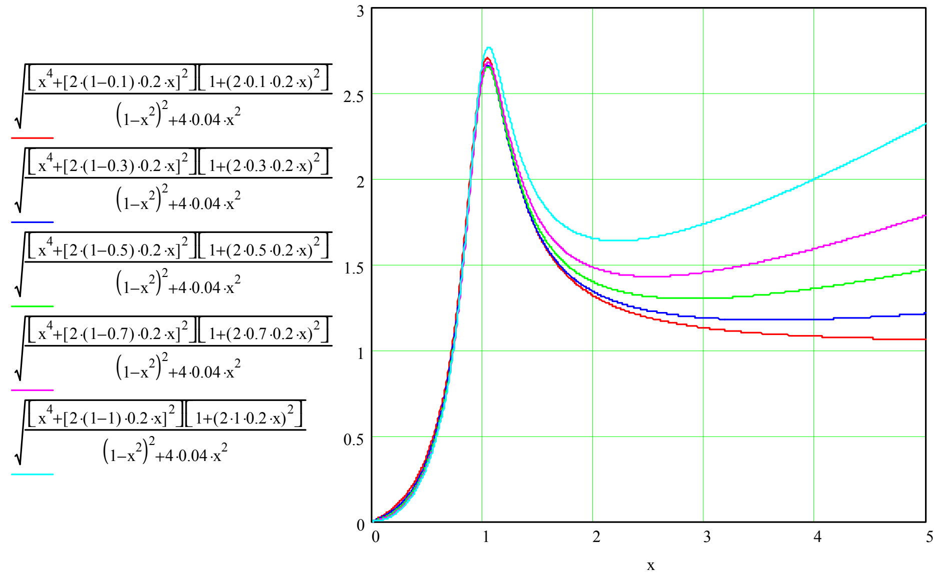


Fig.6.2.12. Variaţia factorul de transmisibilitate cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare ν (ζ=0,2)

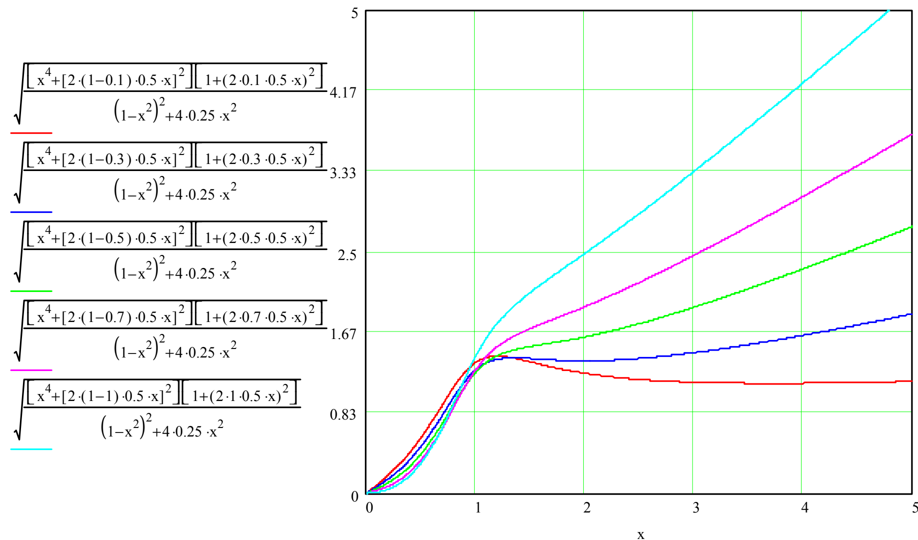


Fig.6.2.13. Variaţia factorul de transmisibilitate cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare ν (ζ=0,2)

6.2.5. Factorul dinamic al cuplajului

Raportul dintre amplitudinea forţei transmise prin cuplaj şi amplitudinea vibraţiilor obţinute la organul de lucru este factorul dinamic al cuplajului :

$$\sigma = \frac{F_s \xi_F}{r \xi_x} = \frac{F_S}{r}\sqrt{\eta^4 + 4(1-v)^2 \eta^2 \zeta^2} \tag{6.2.5}$$

a. Influenţa factorului de amortizare ζ

Reprezentând variaţia raportului dintre amplitudinea forţei transmise prin cuplaj şi amplitudinea vibraţiilor cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de amortizare $\zeta = 0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}5;\ 0{,}7;\ 0{,}9$ şi un coeficient de cuplare *v=0,5* se obţin diagramele din fig. 6.2.14.

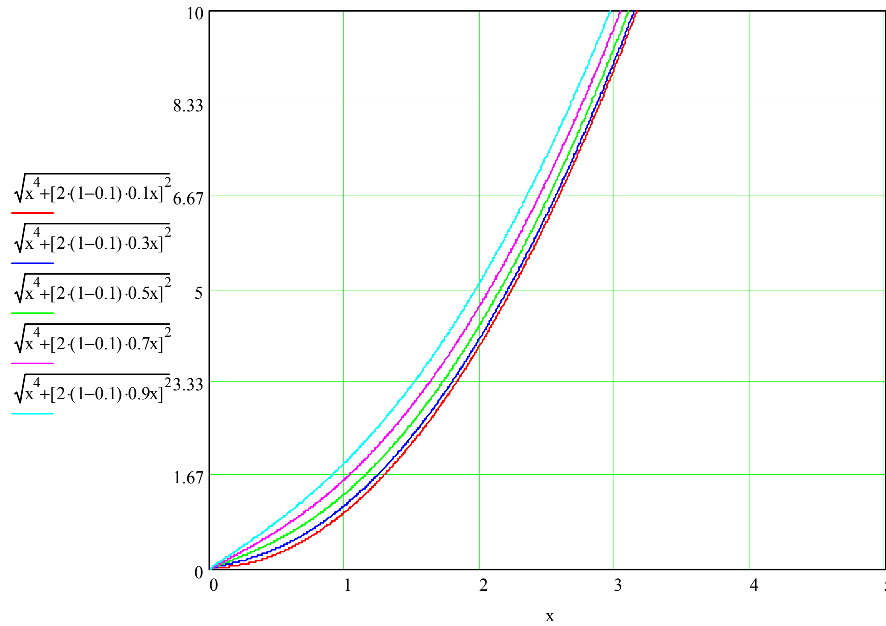


Fig.6.2.14. Variaţia factorul dinamic cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de amortizare ζ (v=0,5)

b. Influenţa factorului de cuplare *v*

Reprezentând variaţia raportului dintre amplitudinea forţei transmise prin cuplaj şi amplitudinea vibraţiilor cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare *v=0.1; 0,3; 0,5; 0,7* şi *v=1* şi pentru doua valori ale factorului de amortizare: $\zeta = 0{,}2$ şi $\zeta = 0{,}5$ se obţin fig. 6.2.15 şi 6.2.16.

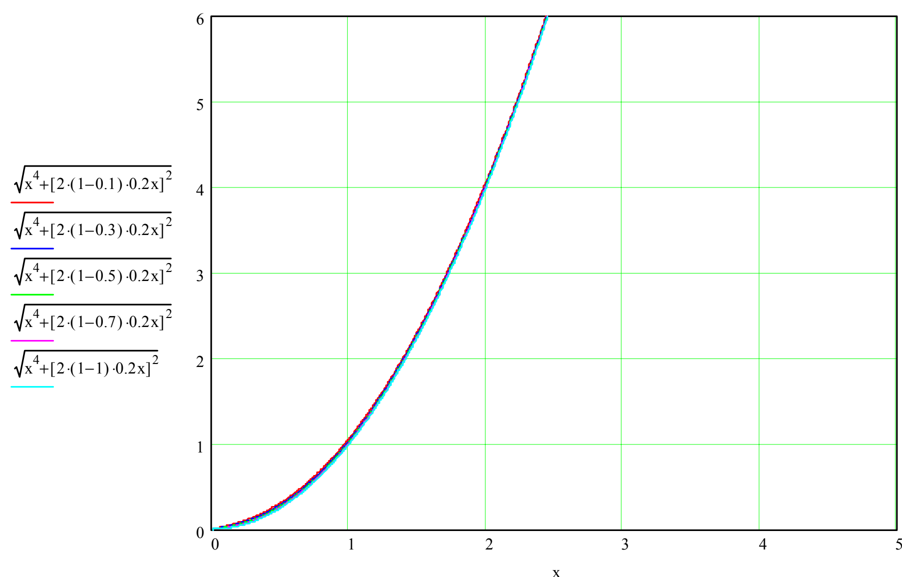


Fig.6.2.15. Variaţia factorul dinamic cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare v (ζ=0,2)

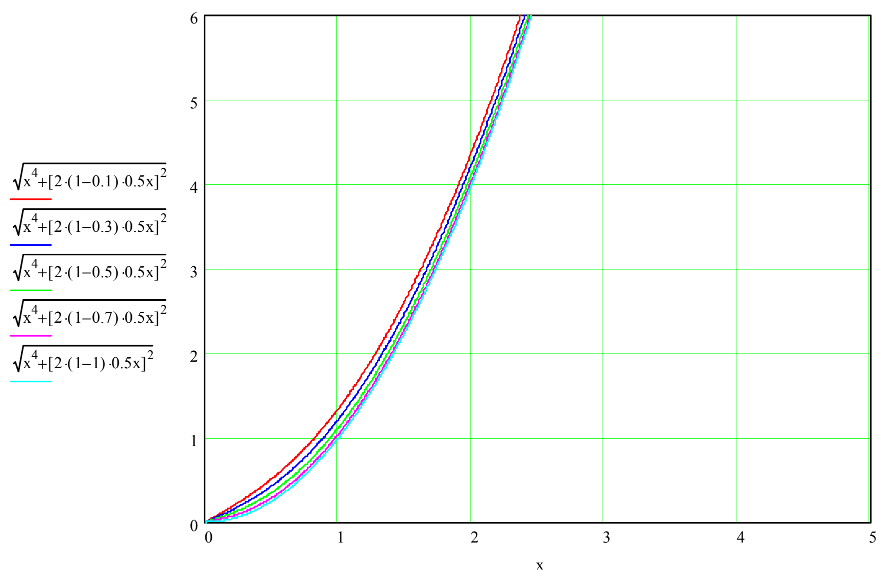


Fig.6.2.16. Variaţia factorul dinamic cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare v (ζ=0,5)

6.2.6. Defazajul

a. Influenţa factorului de amortizare ζ

Reprezentând variaţia defazajului dintre excitaţie şi răspuns (6.2.1) cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de amortizare: $\zeta = 0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}5;\ 0{,}7;\ 0{,}9$ şi un coeficient de cuplare *v=0,5* se obţin diagramele din fig. 6.2.17. Defazajul se mai scrie:

$$\varphi = arccos\frac{1-\eta^2}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2+4\eta^2\zeta^2}} - ar\cos\frac{1}{\sqrt{1+\left(2v\eta\zeta\right)^2}} \qquad (6.2.6)$$

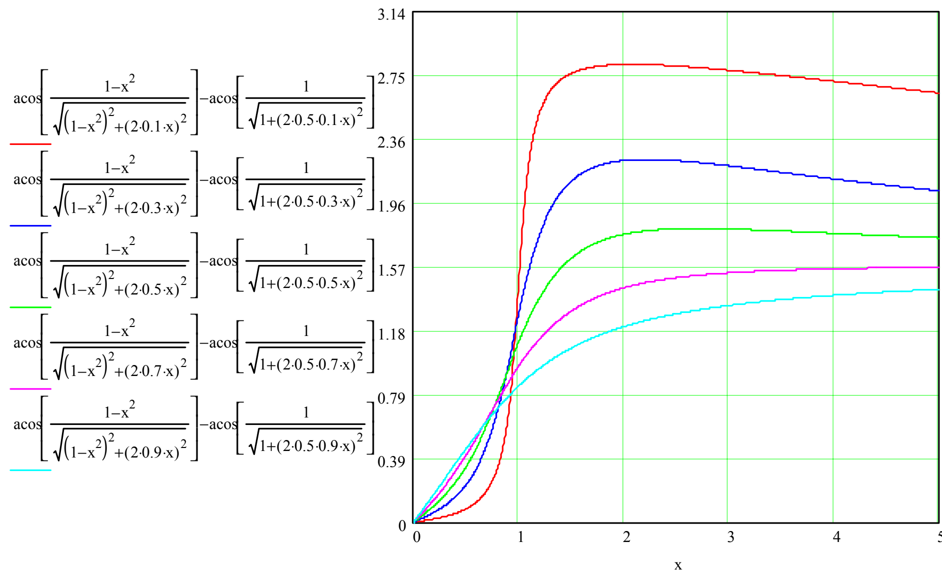


Fig.6.2.17. Variaţia defazajului cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de amortizare ζ (v=0,5)

b. Influenţa factorului de cuplare *v*

Reprezentând variaţia defazajului dintre excitaţie şi răspuns (6.2.1) cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare *v=0.1; 0,3; 0,5; 0,7* şi *v=1* şi pentru valoarea ale factorului de amortizare $\zeta = 0{,}5$ se obţine fig. 6.2.18.

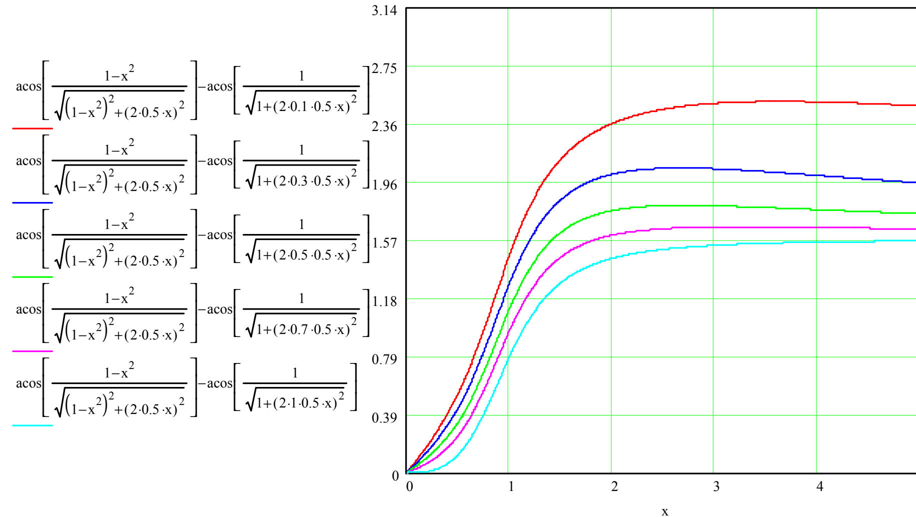


Fig.6.2.18. Variaţia defazajului cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare v (ζ=0,5)

6.2.7. Concluzii

După stabilirea relaţiilor de calcul a factorului de amplificare, defazajului, factorului de amplificare a acceleraţiilor, factorului de transmisibilitate şi factorului dinamic şi prin simularea numerică a variaţiei acestor mărimi dinamice ale vibraţiilor prin modificarea unuia din cei trei categorii de parametrii:

- factorul de amortizare definit cu ajutorul relaţiei (1.8')
- factorii de cuplare *u* şi *v* definiţi cu ajutorul relaţiei (1.10)

se obţin diferite curbe de variaţie care permit concluzii asupra comportării dinamice a vibratoarelor monomasice cu acţionare cinematică sprijinite pe suporţi rigizi articulaţi, cu amortizare.

Din analiza diagramelor obţinute se pot trage următoarele concluzii:

1. *Factorul de amplificare al deplasărilor* organului de lucru prezintă o variaţie mai pronunţată în jurul valorii de rezonanţă cu cât factorul de amortizare este mai mic (fig. 6.2.2) şi o variaţie mai pronunţată cu cât factorul de cuplare v este mai apropiat de *v=1* (fig. 6.2.3 ÷ 6.2.4);
2. *Factorul de amplificare al acceleraţiilor* sau al forţelor de inerţie la organul de lucru creşte continuu pentru valori ale factorului de amortizare ζ ≥ 0,5 iar pentru valori ζ< 0,5 se constată o creştere în domeniul de anterezonanţă, urmată de o scădere şi apoi din nou o creştere cu atât mai moderată cu cât factorul de amortizare este mai mic; de aici rezultă că pentru a obţine forţe de inerţie scăzute se recomandă valori scăzute ale

factorului de amortizare (fig. 6.2.5); pentru diferite valori ale factorului de cuplare *v* diagramele prezintă valori maxime foarte apropiate (fig. 6.2.6) pentru o amortizare redusă, şi o pantă din ce în ce mai mare cu cât acest factor este mai mare (fig. 6.2.7) pentru o amortizare mărită;

3. Pentru diferite valori ale factorului de amortizare ζ şi ale factorului de cuplare *u* şi *v factorul de amplificare al deplasării relative a capetelor cuplajului* prezintă o valoare maximă în domeniul de rezonanţă, după care valoarea tinde către valoarea $\xi_w = 1$ (fig. 6.2.8÷ 6.2.10);
4. *Factorul de transmisibilitate al cuplajului* ξ_F are o variaţie între două limite strânse pentru valori mici ale factorului de amortizare, şi o variaţie crescătoare pentru valori ale factorului de amortizare $\zeta \geq 0{,}5$ (fig.6.2.11); pentru diferite valori ale factorului de cuplare v se observă maxime foarte apropiate în zona de rezonanţă (fig.6.2.12) pentru o amortizare redusă şi valori crescătoare cu o pantă mai mare cu cât factorul v este mai mare (fig.6.2.13) pentru o amortizare mărită;
5. *Factorul dinamic al cuplajului* σ prezintă o creştere continuă cu o pantă din ce în ce mai mare atât pentru diferite grade de amortizare cât şi pentru diferite valori ale factorului de cuplare v (fig.6.2.14÷ 6.2.16);
6. *Defazajul* creşte foarte mult în zona de anterezonanţă cu atât mai pronunţat cu cât factorul de amortizare este mai mic, după care în domeniul de postrezonanţă defazajul scade foarte puţin faţă de valoarea maximă atinsă (fig. 6.2.17); defazajul scade sub zero în zona de anterezonanţă pentru valori ale factorului de cuplare $v \leq 0{,}5 \Leftrightarrow c_1 = c_2$, iar în domeniul de postrezonanţă scade foarte puţin faţă de valoarea maximă atinsă (fig. 6.2.17 ÷ 6.2.18).

6.2.8. Cuplajul rigid

Modelul matematic este prezentat în figura 6.2.19, fiind un caz particular al celui de la punctul 6.2.1 în care $k_2 \to \infty, \quad c_2 = 0 \quad \Rightarrow u = 1, \quad v = 0$

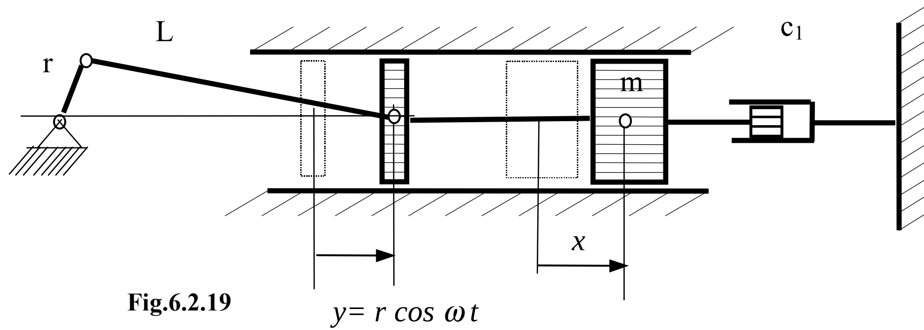


Fig.6.2.19

Relațiile (6.2.2), (6.2.4) şi (6.2.5) devin:

- factorul de amplificare: $\xi_x = 1$ (6.2.7)
- factorul de transmisibilitate: $\xi_F = 1$ (6.2.8)
- factorul dinamic: $\sigma = \frac{F_s \xi_F}{r \xi_x} \to \infty$ (6.2.9)

6.2.9. Cuplajul elastic simplu

Modelul matematic este prezentat în figura 6.2.20, fiind un caz particular al celui de la punctul 6.2.1 în care $c_2 = 0 \;\Rightarrow\; v = 0$

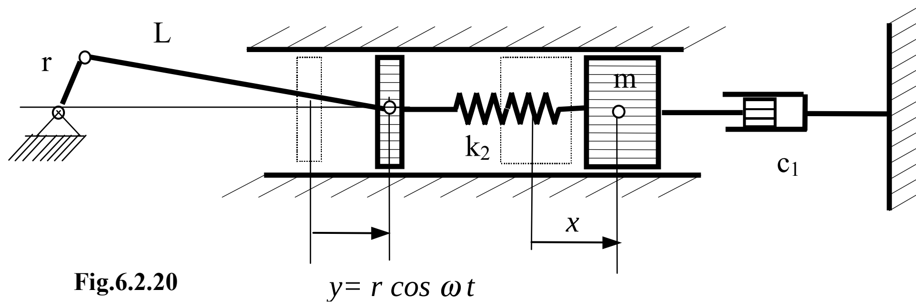


Fig.6.2.20

Relațiile (6.2.2), (6.2.4) şi (6.2.5) devin:

- factorul de amplificare: $\xi_x = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4\eta^2\zeta^2}}$ (6.2.10)

- factorul de transmisibilitate: $\xi_F = \sqrt{\dfrac{\left[\eta^4 + 4\eta^2\zeta^2\right]}{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4\eta^2\zeta^2}}$ (6.2.11)

- factorul dinamic: $\sigma = \sqrt{\left[\eta^4 + 4\eta^2\zeta^2\right]}$ (6.2.12)

a. Influența factorului de amortizare ζ asupra factorului de amplificare

Reprezentând variația factorului de amplificare cu pulsația relativă η pentru diferite valori ale factorului de amortizare: $\zeta = 0{,}1 \ldots 0{,}5$ se obțin diagramele din fig. 6.2.21.

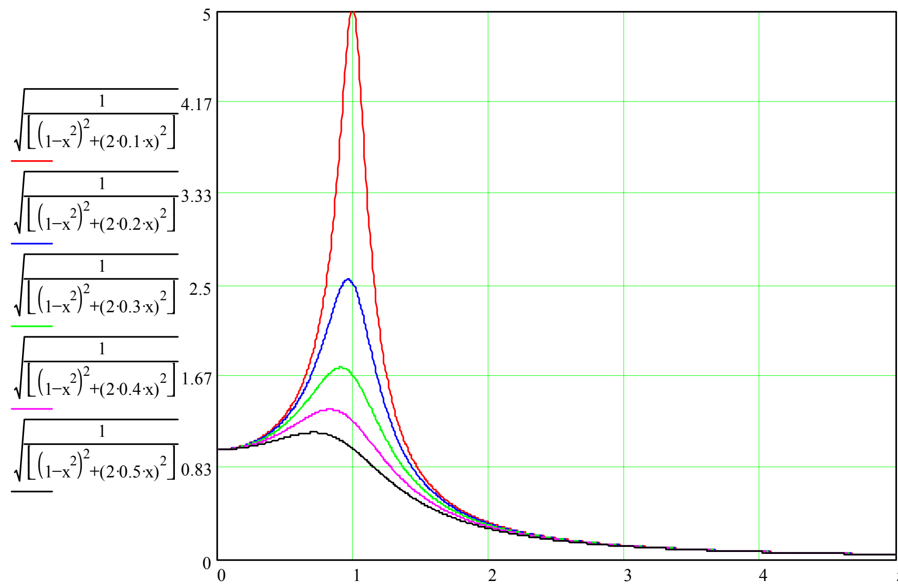


Fig.6.2.21. Variația factorul de amplificare cu pulsația relativă η pentru diferite valori ale factorului de amortizare ζ

b. Influența factorului de amortizare ζ asupra transmisibilității

Reprezentând variația factorului de transmisibilitate cu pulsația relativă η pentru diferite valori ale factorului de amortizare: $\zeta = 0{,}1 \ldots 0{,}5$ se obțin diagramele din fig. 6.2.22.

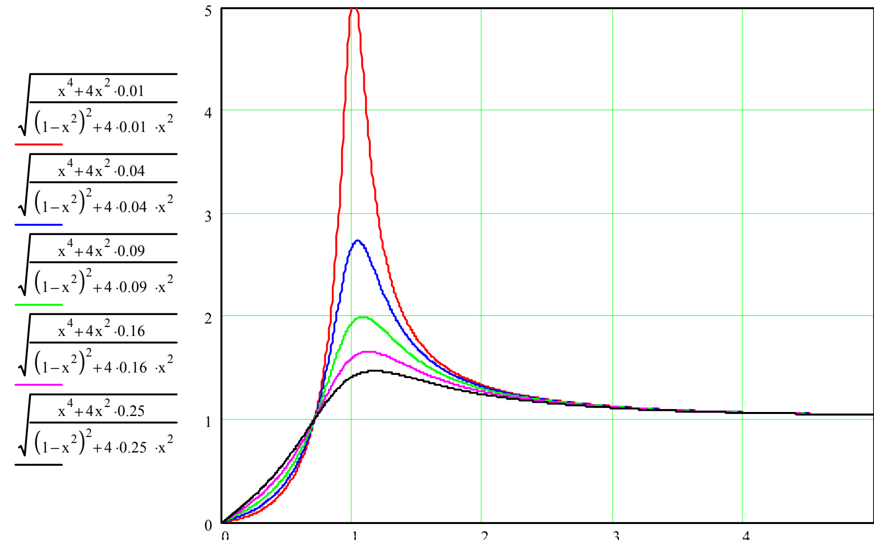


Fig.6.2.22. Variaţia factorul de transmisibilitatę cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de amortizare ζ

c. Influenţa factorului de amortizare ζ asupra factorului dinamic

Reprezentând variaţia factorului dinamic cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de amortizare: ζ = 0,1 ... 0,5 se obţin diagramele din fig. 6.2.23.

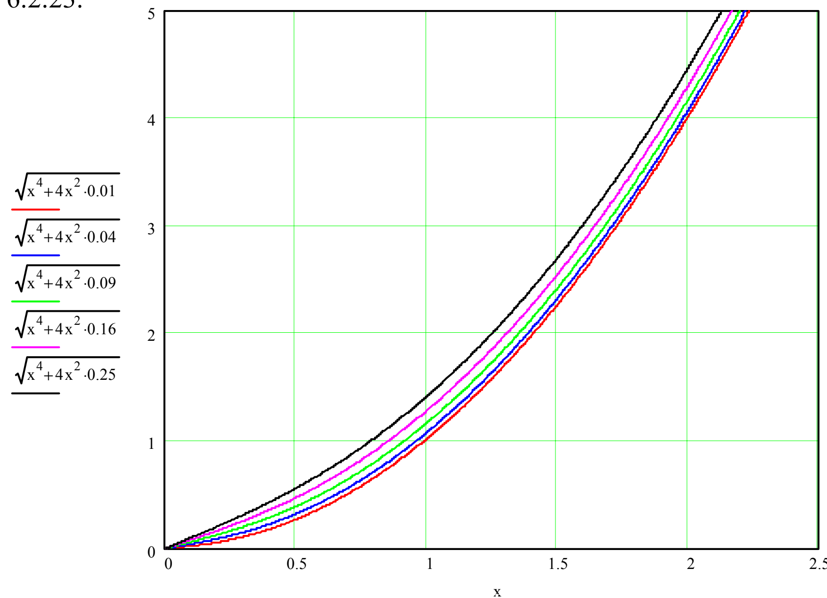


Fig.6.2.23. Variaţia factorul dinamic cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de amortizare ζ

6.2.10. Cuplajul amortizor simplu

Modelul matematic este prezentat în figura 6.2.24 fiind un caz pentru care $k_2 = k_2 = 0$. În acest caz parametrii $u,\ \eta\ si\ \ \zeta$ nu mai au sens.

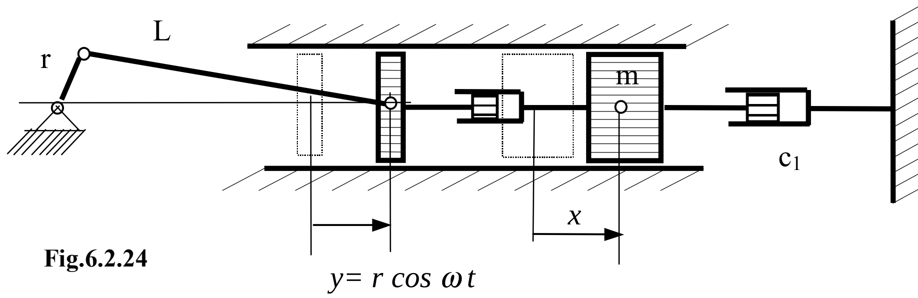


Fig.6.2.24

Ecuaţia diferenţială a mişcării se scrie în acest caz:

$$m\ddot{x} = -c_1 x - c_2(\dot{x} - \dot{y})$$
$$m\ddot{x} + (c_1 + c_2)\dot{x} = -rc_2\omega sin\,\omega t \qquad (6.2.13)$$

Dacă se folosesc notaţiile:

$$2n = \frac{c_1 + c_2}{m};\ v = \frac{c_2}{c_1 + c_2};\ q = \frac{rc_2}{m} = 2rnv \qquad (6.2.14)$$

ecuaţia diferenţială (6.2.13) se mai scrie:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} = -q\omega sin\,\omega t$$
$$\Leftrightarrow \ddot{x} + 2n\dot{x} = q\omega cos(\omega t - \pi/2) \qquad (6.2.15)$$

Soluţia staţionară a ecuaţiei diferenţiale (6.2.15) în complex este:

$$\ddot{z} + 2n\dot{z} = q\omega e^{i(\omega t - \pi/2)} \qquad (6.2.16)$$

este de forma: $z = \tilde{a}e^{i(\omega t - \pi/2 - \varphi)}$ (6.2.17)

Înlocuind în (6.2.16) se obţine:

$$\left(-\omega^2 + 2in\omega\right)\tilde{a}e^{i(\omega t + \pi/2 - \varphi)} = q\omega e^{i(\omega t + \pi/2)} \qquad (6.2.18)$$

Rezultă amplitudinea complexă:

$$\tilde{a} = \frac{qe^{i\varphi}}{\left(-\omega + 2in\right)} \qquad (6.2.19)$$

Amplitudinea reală este:

$$a = \left|\tilde{a}\right| = \frac{2rvn}{\sqrt{\omega^2 + 4n^2}} \qquad (6.2.20)$$

Defazajul dintre argumentul excitaţiei şi argumentul răspunsului:

$$\varphi = arctg\frac{2n}{\omega} \tag{6.2.21}$$

Notând cu: $\eta = \frac{\omega}{p}$ $\zeta = \frac{n}{p}$ relaţia (6.2.21) se scrie:

$$\varphi = arctg\frac{2n}{p}\frac{p}{\omega} = \frac{2\zeta}{\eta} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = arccos\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + 4\zeta^2}} \tag{6.2.22}$$

Factorul de amplificare este definit astfel:

$$\xi = \frac{a}{r} = \frac{2\nu n}{\sqrt{\omega^2 + 4n^2}} = \frac{2\nu\zeta}{\sqrt{\eta^2 + 4\zeta^2}} \tag{6.2.23}$$

a. Influenţa factorului de amortizare ζ asupra factorului de amplificare şi asupra defazajului

Reprezentând variaţia factorului de amplificare şi a defazajului cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de amortizare: $\zeta = 0{,}1$;0,3;0,5;0,7; 1 se obţin diagramele din fig. 6.2.25 şi 6.2.26.

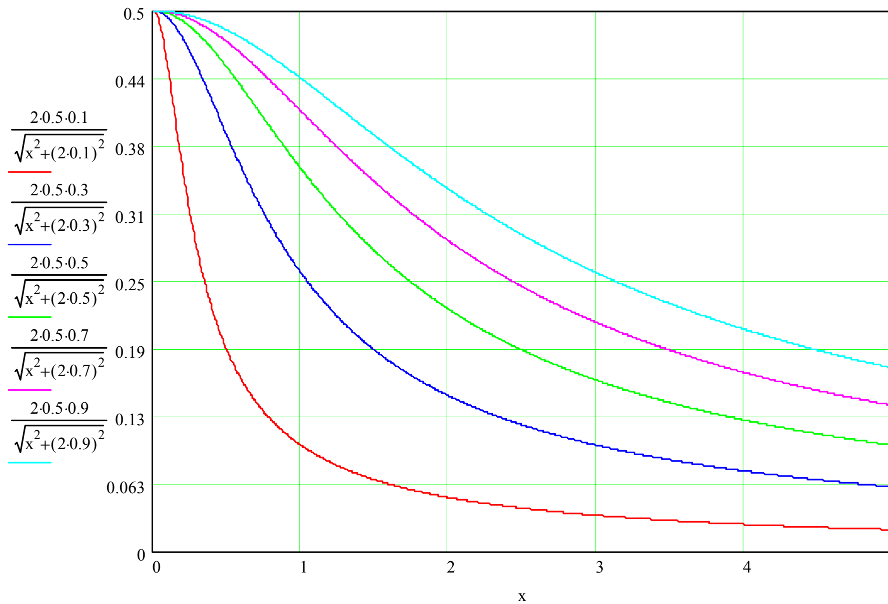


Fig. 6.2.25. Variaţia factorului de amplificare cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de amortizare

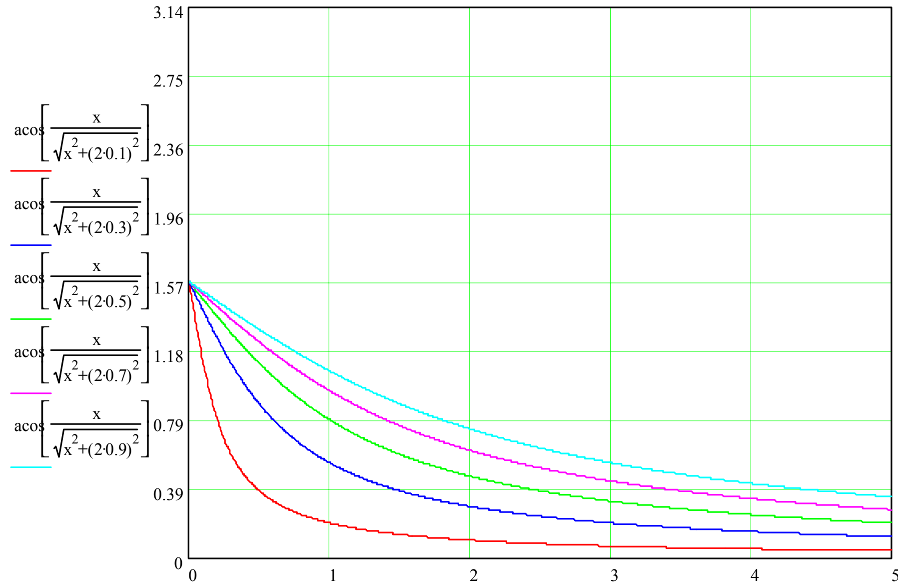


Fig. 6.2.26. Variaţia defazajului cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de amortizare

b. Influenţa factorului de cuplare *v* asupra factorului de amplificare

Reprezentând variaţia factorului de amplificare cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare *v* şi pentru două valori ale factorului de amortizare $\zeta = 0.2$ *si* $\zeta = 0.5$ se obţin diagramele din fig. 6.2.27 şi 6.2.28.

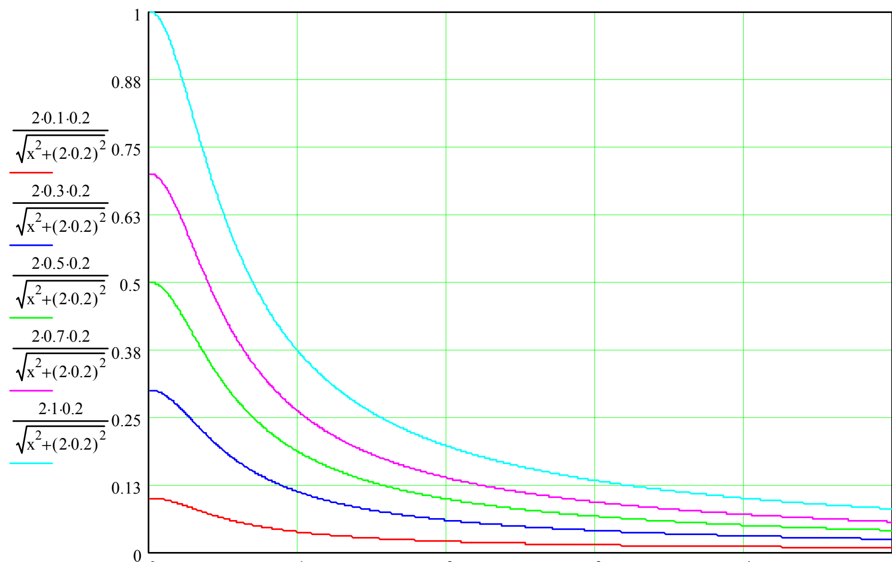


Fig. 6.2.27. Variaţia factorului de amplificare cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare v pentru ζ=0,2

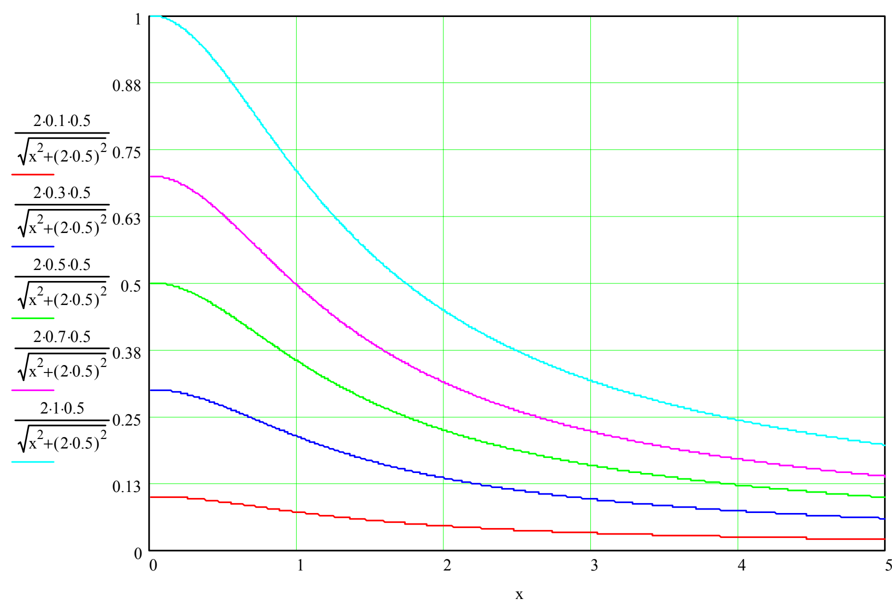


Fig. 6.2.28. Variaţia factorului de amplificare cu pulsaţia relativă η pentru diferite valori ale factorului de cuplare ν pentru ζ=0,5

BIBLIOGRAFIE

1. Bratu, P.P.- *Vibrațiile structurilor mecanice.* Editura Tehnică, București, 2000
2. Bratu, P.P. - *Izolarea şi amortizarea vibrațiilor la utilaje de construcții*. Editura INCERC, Bucureşti 1982
3. Bratu, P.P., Drăgan, D. - *Vibrațiile mecanice. Teorie. Aplicații tehnice.* Editura Impuls, Bucureşti, 1998
4. Bratu, P.P., Drăgan, D. - *Vibrațiile mecanice.. Aplicații.* Editura Impuls, Bucureşti, 1998
5. Bratu, P.P., Marin., C. - *Asupra variației coeficientului de încărcare - dinamică* Ψ *a unui sistem mecanic cu pornire sub sarcină* – ROPET, Petrosani 2003
6. Buzdugan, Gh. Fetcu, L. Radeş, M.– *Vibrații Mecanice.* Ed. Didactică şi Pedagogică Bucureşti, 1982
7. Buzdugan, Mihăilescu, E., Radeş, M.– *Măsurarea vibrațiilor* Editura Academiei RSR , Bucureşti , 1979
8. Buzdugan, Gh. – *Izolarea antivibratorie a maşinilor*, Editura Academiei RSR , Bucureşti , 1980
9. Ceauşu,V., Enescu,V., Ceauşu,F.- Culegere de probleme de mecanică, Editura IPB, Bucureşti 1983
10. Dimarogonas, A., Haddad, S – *Vibrations for Engineers,* Prince Hall International, Inc, New Jersey, 1992
11. Enescu, N., Stroe,S., Ion,C., Ivan,M., Magheți,I., Savu,M., Cayacu,C.- Seminar de mecanică. Probleme. Editura IPB, Bucureşti 1983
12. Marin, C., Huidu, T. – *Mecanica,* Editura Printech, Bucureşti 1999
13. Marin ,C. – *Analiza dinamică a structurilor liniar-elastice* , Editura Macarie, Târgovişte 1999
14. Marin, C., Huidu, T. – *Probleme rezolvate de mecanica*, Editura Macarie, Târgovişte 2001
15. Marin, C., Popa, F. – Rezistența materialelor. Probleme de examen. Editura Printech, Bucureşti 2001
16. Huidu, T. Marin, C., Popa, A.– *Culegere de probleme şi teme aplicative de mecanica*, Editura Macarie, Târgovişte 2001
17. Marin, C., Soare-Brojboiu, C. – *Influența coeficienților de cuplare elastică şi vâscosă respectiv a factorului de amortizare asupra amplitudinii organului de lucru al unei maşini vibratoare monomasice cu acționare cinematică* , Teză de disertație, Târgovişte iunie 2003,
18. Marin,C., Popa F., Ardeleanu M. - *Expression of energy in the case of forced vibrations with elasto – viscous damping. Determination damping factor of elasto – viscous shells* – OPROTEH, 14 noiembrie 2003, Bacău .
19. Marin, C., Popa, F., Ardeleanu, M. - *Expression of average, instantaneous, real and reactive power in case of forced vibrations with elasto-viscous damping. Influence of damping factor on real and reactive power* - OPROTEH 14 noiembrie 2003, Bacău
20. Marin, C., Popa, F., Ardeleanu, M. - *Influența parametrilor elastici şi de amortizare ai unui absorbitor dinamic cu amortizare vâscoasă asupra amplitudinii sistemului principal* – ROPET, Petrosani 2003
21. Marin,C., Popa F., Ardeleanu M. - *On the variation of vibrations amplitude of an ends supports –shaft with rotative speed and the damping factor of bearing boxes* – INTER-ING, 7 noiembrie 2003, Targu Mures

22. Marin,C., Popa F., Ardeleanu M. - *The dissipation of natural vibrations' energy when using elasto-viscous and dry friction damping elements. determination of isolators' damping capacity* - Academia Tehnica Militara, 7 noiembrie 2003, Bucureşti
23. Marin,C., Popa F., Ardeleanu M. - *Expresia bilanţului energetic a unui sistem mecanic supus vibraţiilor forţate cu amortizare elasto-histeretică.* CNDD Bucuresti
24. Marin,C., Popa F., Ardeleanu M. - *Some practical aspects regarding passive ant vibration isolation using elasto-viscous damping covers* – In Annals of the ORADEA UNIVERSITY, Fascicle of Management and Technological Engineering CD-ROM Edition Vol. II (XII) 2003, ISSN 1583-0691, p. 18-19
25. Marin,C., Popa F., Ardeleanu M. - *Unele aspecte privind izolarea antivibratorie activă a maşinilor în cazul folosirii păturilor elasto-vâscoase. Determinarea frecvenţelor critice şi a transmisibilităţii maxime* –In Buletinul Stiintific al ceei de a XXVII –a Conferinta de Mecanica Solidelor, Pitesti 23-24 mai 2003, ISSN 1582-9561, p. 203-208
26. Marin,C., Popa F., Ardeleanu M. - *Influence of the natural modes vibration on the magnitude of basis acceleration during the seismic test operated on an elastic structure with rigid supports fixed at ends* - SISOM 2003, p. 103-108
27. Marin,C., Popa F., Ardeleanu M. - *Expresiile analitice ale deplasării şi vitezei pentru vibraţiile care apar în timpul proceselor tehnologice având ca sursă frecarea uscată între sculă şi piesă* – A XII a Conferinta Nationala de Tehnologii si produse noi in Constructia de Masini – TEHNOMUS, Suceava, 6-7 iunie 2003, ISBN 973-666-017-6, p. 95-100
28. Marin, C. - *Model matematic pentru studiul influenţei amplitudinii acceleraţiei vibraţiilor proprii asupra amplitudinii acceleraţiei bazei în timpul testului seismic*. In Rev. Armatura-Aparat de robinetarie, Nr.2 (6) 2003 ISSN 1582-8816, p. 21-26
29. Marin,C., Popa F., Ardeleanu M. - *Unele aspecte privind izolarea antivibratorie activă a maşinilor în cazul folosirii păturilor elasto-histeretice* In Rev. Armatura-Aparat de robinetarie, Nr.3 (7) 2003 ISSN 1582-8816, p. 15-16
30. Marin,C., Voicu, A., Marin, E., Soare, C.- *Influenţa coeficienţilor de cuplare elastică şi vâscoasă respectiv a factorului de amortizare asupra amplitudinii organului de lucru al unei maşini vibratoare monomasice cu acţionare cinematică.* În Buletinul Universitatii Petrol Gaze Ploieşti, Volum LV, Seria tehnică Nr. 4/2003, ISSN 1221-9371, p. 305-310.
31. Marin,C., Voicu, A., Marin, E., Soare, C.- *Influenţa coeficientilor de cuplare şi de amortizare asupra acceleraţiei şi forţei de inerţie corespunzătoare organului de lucru al unei maşini vibratoare monomasice cu acţionare cinematică.* În Buletinul Universitatii Petrol Gaze Ploieşti, Volum LV, ISSN 1221-9371, p. 311
32. Marin,C., Voicu, A., Marin, E., Soare, C.- *Influenţa parametrilor de amortizare şi cuplare asupra transmisibilităţii cuplajului elastic al unei maşini vibratoare monomasice cu acţionare cinematică.* Lucrare prezentată la Simpozionul International "Mecatronica, microtehnologii si materiale noi" Târgovişte 7-8 noiembrie, 2003
33. Marin,C., Voicu, A., Marin, E., Soare, C.- *Influenţa parametrilor unui cuplaj elastic asupra factorului dinamic al al unei maşini vibratoare monomasice cu acţionare cinematică* Lucrare prezentată la Simpozionul International "Mecatronica, microtehnologii si materiale noi" Târgovişte 7-8 noiembrie, 2003
34. Marin,C., Voicu, A., Marin, E., Soare, C.- *Optimizarea parametrilor cuplajului unei maşini vibratoare monomasice cu acţionare cinematică şi influenţa lor asupra factorului dinamic minim.* Lucrare prezentată la Simpozionul International "Mecatronica, microtehnologii si materiale noi" Târgovişte 7-8 noiembrie 2003.
35. Munteanu, M. - *Introducere în dinamica maşinilor vibratoare,* Editura Academiei RSR, Bucureşti, 1986

36. Pană T. – *Absorbitori dinamici de vibraţii,* Editura Tehnică Bucureşti 1984
37. Pandrea, N. Munteanu, M. – *Curs de Vibraţii cu aplicaţii în Construcţia de maşini,* Editura Institutul Politehnic Bucureşti , 1979
38. Posea, N. – *Calculul dinamic al structurilor* . Editura Tehnică, Bucureşti, 1991
39. Radeş,M.- *Metode dinamice de identificare a structurilor mecanice.* Editura Acdemiei RSR, Bucureşti 1979
40. Radeş,M.Deciu, E., Voiculescu,D. – *Elemente de vibraţii mecanice.* Editura Tehnică Bucureşti 1973
41. Roşca,I. – *Mecanica pentru ingineri*. Editura MatrixRom, Bucureşti 1998
42. Staicu, Şt. - *Mecanica.* Editura Didactică şi pedagogică, Bucureşti 1998.
43. Voinea, R., Voiculescu, D., Ceauşu,V.- *Mecanica.* Editura Didactică şi pedagogică, Bucureşti 1975.